Ch.One/ Relations and Inqualities in Real Numbers

Lesson [1-1] Ordering operations In Real Numbers

Using Ordering Operation to simplify Numerical sentences	[1 – 1 – 1]

تعرفنا سابقًا على مجموعة الاعداد الحقيقية و تقسم الى :-

1. مجموعة الاعداد الطبيعية (Natural Numbers) و يرمز لها بالرمز N وهي $N = \{1,2,3,4,5, \dots \dots\}$.
2. مجموعة الاعداد الكلية (Whole Numbers) و يرمز لها بالرمز W وهي $W = \{0,1,2,3,4,5, \dots \dots\}$.
3. مجموعة الاعداد الصحيحة (Integer Numbers) و يرمز لها بالرمز Z وهي $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \dots \dots\}$.

4. مجموعة الاعداد النسبية (Rational Numbers)و يرمز لها بالرمز Q وهي $N \subset W \subset Z \subset Q$. وتقسم Q الى :
   - ✓ مجموعة الاعداد التي يمكن جعلها على شكل كسري $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ مثل $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{3}, \frac{8}{1}, \frac{1}{5}$
   - ✓ مجموعة الاعداد الدورية مثل 1.61616 و 0.33333ومجموعة الاعداد المنتهية مثل 1.5

5. مجموعة الاعداد الغير نسبية (Irrational Numbers) و يرمز لها بالرمز H و تقسم الى :
   - ✓ مجموعة الاعداد العشرية (The set of decimal Numbers) الغير دورية و مجموعة الاعداد العشرية الغير منتهية مثل الثابت $\pi = 3.1415926535897$.
   - ✓ مجموعة الاعداد التي لا يمكن ايجاد جذورها مباشرتًا مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{11}$

6. مجموعة الاعداد الحقيقية و هي $N \subset W \subset Z \subset (Q \cup H) \subset R$.

Properties of Square Roots $\sqrt{a}$

Properties of Square Roots	Example
$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$\sqrt{10} = \sqrt{5 \times 2} = \sqrt{5} \times \sqrt{2}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$	$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$
$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$	$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$
$\sqrt[2]{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$ 2 قوة الجذر و n اس العدد تحت الجذر	$\sqrt[2]{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$

Some of direct suare roots

$\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{100} = 10$

Some Rule to simplify the numerical sentences

1. ضرب عدد في مقدار جبري باستخدام خاصية التوزيع :

Multiply a number by algebraic term using desterbutive property

$$\sqrt{2}(\sqrt{8}-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\times\sqrt{8}-\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \sqrt{2\times 8}-2 = \sqrt{16}-2 = 4-2 = 2$$

2. ضرب مقدار جبري في مقدار جبري باستخدام خاصية التوزيع :

Multiply a number by algebraic term using desterbutive property

$$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{8}) = \sqrt{5}\times\sqrt{5}-\sqrt{5}\times\sqrt{8} = \sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{2}\times\sqrt{8}$$
$$= 5-\sqrt{5\times 8}+\sqrt{2\times 5}-\sqrt{2\times 8} = 5-\sqrt{40}+\sqrt{10}-\sqrt{16}$$
$$= 5-2\sqrt{10}+\sqrt{10}-4 = 1-\sqrt{10}$$

3. فتح مربع حدانية (المربع الكامل) بأستخدام القانون : Perfect Square

$$(a\pm b)^2 = (\text{الاول})^2 \pm 2(\text{الاول})(\text{الثاني}) + (\text{الثاني})^2$$

اشارة الحد الوسط — موجب دائمًا

$$(a\pm b)^2 = (a)^2 \pm 2(a)(b) + (b)^2$$
$$(x+4)^2 = (x)^2 - 2(x)(4) + (4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

4. تحليل الفرق بين مربعين: Difference between two square

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

يجب ان تكون اشارة الحد الوسط سالبة و ليس من الضروري ان يكون الحد الاول و الحد الثاني مربعًا كاملاً (يعني اس الحد تربيع).

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$
$$x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

EX./ Simplify the following numerical sentences using the ordering operations :

اذا كانت الأقواس متشابهة و أشارة الوسط مختلفة مباشرة نختار احد الأقواس نربع الحد الاول و نضع اشارة سالبة في الوسط و نربع الحد الثاني كما في المثال 1.

1. $(\sqrt{12}-\sqrt{18})(\sqrt{12}+\sqrt{18}) = (\sqrt{12})^2 - (\sqrt{18})^2 = 12 - 18 = -6$

اذا كانت الأقواس مختلفة و الحدود مختلفة نستخدم خاصية التوزيع كما في المثال 2.

2. $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{5} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{5} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= \sqrt{2 \times 5} + \sqrt{2 \times 3} - \sqrt{3 \times 5} - 3 = \sqrt{10} + \sqrt{6} - \sqrt{15} - 3$

3. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = \cdots H.W \quad \Rightarrow \quad Ans = 2$

4. $(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \cdots H.W \quad \Rightarrow \quad Ans = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 +$

5. $\sqrt{6}(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{7})^2 - 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 7 - 2\sqrt{7 \times 2} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}$

6. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

بإستخدام مربع حدانية (Using Perfect Square)

$= (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 3 + 2\sqrt{3 \times 5} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$

7. $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2 = \cdots H.W \quad \Rightarrow \quad Ans = 11 + 2\sqrt{30}$

Properties of cubic roots $\sqrt[3]{a}$

Properties of square roots	Properties of cubic roots
$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$
$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad , \quad b \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$
$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$	$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \times 9} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$
$\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$	$\sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}}$

بعض الجذور التكعيبية المباشرة

$\sqrt[3]{0} = 0 \ , \sqrt[3]{1} = 1 \ , \sqrt[3]{8} = 2 \ , \sqrt[3]{27} = 3 \ , \sqrt[3]{64} = 4 \ , \sqrt[3]{125} = 5 \ ,$
$\sqrt[3]{125} = 5 \ , \sqrt[3]{216} = 6 \ , \sqrt[3]{343} = 7$

Ex./ Simplify the following numerical sentences using the ordering operation on Real numbers :

1. $(\sqrt{125}-\sqrt{20})\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right) = (5\sqrt{5} - 2\sqrt{5})\left(\frac{2}{3}\right) = 3\sqrt{5}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{3}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

نحلل دواخل الجذور الغير مباشرة الى عواملها الاولية

داخل الجذر ←	5	20
خارج الجذر ← 2	2	10
	2	2
		1

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2. $\left(\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)\left(-\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \cdots H.W \quad \Longrightarrow \quad Ans = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

خارج الجذر ← 5	5	50
	5	10
داخل الجذر →	2	2
		1

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

3. $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \div \left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right)$

$= \left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \div \left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)$

$= \left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\right)$

$= \left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\right)$

$= \left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{-\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}\right) = -1$

$3\sqrt{2}-2\sqrt{3} = -\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)$

خارج الجذر ← 3	3	27
	3	9
داخل الجذر →	3	3
		1

$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

4. $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}} = \cdots H.W \quad \Longrightarrow \quad Ans = \frac{\sqrt{3}}{15}$

خارج الجذر ← 5	5	125
	5	25
داخل الجذر →	5	5
		1

$\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

بعض الجذور التربيعية غير المباشرة

$\sqrt{2} \simeq 1.4$, $\sqrt{3} \simeq 1.7$, $\sqrt{5} \simeq 2.2$, $\sqrt{6} \simeq 2.4$,
$\sqrt{7} \simeq 2.6$, $\sqrt{8} \simeq 2.8$, $\sqrt{11} \simeq 3.3$, $\sqrt{13} \simeq 3.6$

Ex./ Find the approximate speed to Tusnami if the water deep is 1000m.

Sol/

$$v = \sqrt{9.6d} = \sqrt{9.6 \times 1000} = \sqrt{9600} \approx 98 \ m/sec$$ سرعة التسونامي التقريبية

Ex./ Simplify the following numerical sentences by using the odrdering operations on the real numbers, then write the result to the nearest tenth:

1. $\sqrt{12}\left(\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)-6 = \sqrt{12}\times\sqrt{3}-\sqrt{12}\times\sqrt{8}-6$

$= 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}-6$

$= 2\times 3-4\sqrt{3\times 2}-6$

$= 6-4\sqrt{6}-6 = -4\sqrt{6} \simeq -4\times 2.4 \approx -9.6$

خارج الجذر ← 2 | 2 | 12
2 | 6
داخل الجذر → 3 | 3
1

$\sqrt{12} = 3\sqrt{2}$

2. $\sqrt{7}\left(\sqrt{28}-\sqrt{2}\right) = \cdots H.W \quad \Longrightarrow \quad Ans \approx 10.36$

3. $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\sqrt{28}\right) = \sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}2\sqrt{7}\right)$

$= -3\left(\frac{\sqrt{7}}{9}-\frac{2\sqrt{7}}{9}\right) = -3\left(\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{7}}{9}\right) = -3\left(\frac{-\sqrt{7}}{9}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx \frac{2.6}{3} \approx 0.9$

$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

$-(-\sqrt{7}) = \sqrt{7}$

خارج الجذر ← 2 | 2 | 28
2 | 14
داخل الجذر → 7 | 7
1

$\sqrt{7} \approx 0.9$ $\quad \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

4. $(-125)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{12}\right) = \sqrt[3]{-125}\left(\frac{\sqrt{3}}{10}-\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$

$= -5\left(\frac{\sqrt{3}}{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -5\left(\frac{-4\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{20\sqrt{3}}{10} = 2\sqrt{3}$

$\approx 2\times(1.7) \approx 3.4$

$(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5$

$\sqrt{3} \approx 1.7$

ملاحظة / عند تحليل الجذور الغير مباشرة الى عواملها الاولية : هي الاعداد التي لا تقبل القسمة الا على نفسها و الواحد ما عدى الواحد

مثل $2, 3, 5, 7, 11, \ldots\ldots$

- في الجذور التربيعية : نأخذ من كل عاملين اوليين متشابهين عامل واحد نضعه خارج الجذر و العامل المختلف يبقى داخل الجذر.
- في الجذور التكعيبية : نأخذ من كل ثلاث عوامل اولية متشابهة عامل واحد نضعه خارج الجذر و العامل المختلف يبقى داخل الجذر.

$$\sqrt{15} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}$$

5. $5\sqrt{\frac{3}{15}} + 2\sqrt{\frac{4}{5}} - 5\sqrt{\frac{1}{125}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{1}}{\sqrt{125}}$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} + \frac{2 \times 2}{\sqrt{5}} - \frac{5(1)}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5 + 4 - 1}{\sqrt{5}} \approx \frac{8}{2.2} \approx 3.6$$

ملاحظـة / اذا كان المقام يحتوي على جذر فيجب التخلص منه وهنالك حالتان :

1) اذا كان المقام يتكون من حد واحد تحت الجذر نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام . أي أن :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

2) اذا كان المقام يتكون من حدين (مقدار جبري) نقوم بضرب البسط والمقام بمرافق المقام (نفس المقدار لكن عكس اشارة الحد الوسط) .

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Ex./ Simplify the following numerical sentences by using rooting the denominator and ordering operations on *R*

1) $\frac{7 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7 \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5} - 5}{5}$

2) $\frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{4 \times 3} = \frac{\sqrt{3} - 3}{12}$

Ex./ Simplify the following numerical sentences by using rooting the denominator and ordering operations on *R:*

في هذا المثال نتخلص من الجذور بالمقام يضرب البسط و المقام بنفس الجذور و لكن عكس اشارة الوسط (العامل المنسب).

1. $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{2\sqrt{3} - \sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2\sqrt{3} + \sqrt{7}}$

$$= \frac{2 \times 3 \times \sqrt{7} + 7 \times \sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{4(3) - 7}$$

$$= \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{12 - 7} = \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{5}$$

مرافق العدد الجبري
$2\sqrt{3} - \sqrt{7}$ هو $2\sqrt{3} + \sqrt{7}$

$$\sqrt{21} = \sqrt{7} \times \sqrt{3}$$

2. $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}-3\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7})^2-(3\sqrt{5})^2}$

$= \frac{(\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{7}\times3\sqrt{5}+(3\sqrt{5})^2}{7-45} = \frac{7-6\sqrt{7\times5}+9(5)}{7-45} = \frac{7-6\sqrt{35}+45}{-38}$

$= \frac{52-6\sqrt{35}}{-38} = \frac{2(26-3\sqrt{35})}{-38} = \frac{26-3\sqrt{35}}{-19}$

3. $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} - \frac{10\times\sqrt{6}-\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$= \frac{5\sqrt{6}-3}{2(3)} - \frac{10\sqrt{6}-\sqrt{6}}{2(6)}$

$= \frac{5\sqrt{6}-3}{6} - \frac{2(5\sqrt{6}-6)}{12} = \frac{5\sqrt{6}-3}{6} - \frac{5\sqrt{6}-3}{6} = 0$

	5	50
	5	10
خارج الجذر ←	5	2
داخل الجذر →		1

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

4. $\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}} - \frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{11}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}} - \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}$

$= \frac{\sqrt{11}(\sqrt{3}-1)}{3\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{3}-1)}{5\sqrt{5}\times\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{2\sqrt{3}-1}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{2\sqrt{3}-1}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{2(3)-\sqrt{3}}{5(3)}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{6-\sqrt{3}}{15}$

$= \frac{5(\sqrt{3}-1)-(6-\sqrt{3})}{15} = \frac{5\sqrt{3}-5-6+\sqrt{3}}{15} = \frac{6\sqrt{3}-11}{15}$

توحيد مقامات

	2	60
	2	30
خارج الجذر ←	2	5
		3
داخل الجذر	×	3

$\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

خارج الجذر ←	3	3
	3	33
داخل الجذر →	11	11
		1

$\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$

$\sqrt{33} = \sqrt{3\times11} = \sqrt{3}\times\sqrt{11}$

Using calculator and approximation to simplify Numerical sentence	[1 – 1 – 2]

بعض خـواص الأسـس المهمة :

- أذا تساوت الأساسات عند الضرب تجمع الأسس . If the bases are equal, then their powers are equal too

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad , 2^3 \times 2^5 = 2^8$$

- اذا تساوت الأساسات عند القسمة تطرح الأسس . If the bases are equal in divition, then their powers will subtract

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} , \qquad \frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

- عند الرفع تضرب الأسس .

$$(a^n)^m = a^{n \times m} \ , \ (2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

- اذا كان العدد في البسط وأسهُ سالب ننزلهُ الى المقام ليصبح أسهُ موجباً .

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \ , \qquad 2^{-3} = \frac{2}{2^3}$$

- اذا كان العدد في المقام وأسهُ سالب نرفعهُ الى البسط ليصبح أسهُ موجباً .

$$\frac{1}{a^{-3}} = a^3 \ , \ \frac{1}{2^{-5}} = 2^5$$

Ex./ Calculate the powers for each of the following , then write the result which should be approximated to two decimal places, if it is not an integer:

1. $9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3\times\frac{-3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \simeq 0.04$
2. $(\sqrt{7})^2 \simeq \cdots H.W$
3. $2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41$
4. $5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} = \cdots H.W \quad \Longrightarrow \quad Ans \approx 2.24$
5. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^{-2} - 2^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1^2}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3}$
   $= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8} \approx 0.25 + 0.11 - 2.83 \approx -2.47$
6. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^{-3} - 3^{\frac{3}{2}} = \cdots H.W \quad \Longrightarrow \quad Ans \approx -5.04$

Ex./ Calculate the powers for each of the following , then write the result which should be approximated to two decimal places, if it is not an integer:

1. $8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 9 \times \sqrt{3}$
   $= 2 - 1 + 9\sqrt{3} \simeq 1 + 9(1.73)$
   $\simeq 1 + 15.57 \simeq 16.57$

اي عدد اسهُ صفر
يساوي واحد في 1

2. $(27)^{\frac{1}{2}} - (-9)^0 - 3^2 \times (5)^{\frac{1}{2}} \simeq \cdots H.W \quad \Longrightarrow \quad Ans \simeq 22.12$

3. $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + (121)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \cdots H.W \quad \Longrightarrow \quad Ans \simeq 2.86$

نستخدم فرق بين مربعين في 5

Ex./ Use calculator to write the result in the scientific form for the number which should be aproximated to the nearest two decimal places:

عند تحريك الفارزة الى جهة اليسار نُضيف اس موجب و اذا تحركت الى اليمين نضيف أس سالب. و تكون الإضافة بقدر عدد المراتب التي تحركت بها الفارزة

يسار $\xleftarrow{+}$, يمين $\xrightarrow{-}$ $\left(10^{\text{عدد المراتب}}\right)$

1) $7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3} = 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4} = (7.6 - 4.135) \times 10^{-4}$
$= 3.465 \times 10^{-4} \approx 3.47 \times 10^{-4}$

2) $0.052 \times 10^4 + 7.13 \times 10^2 = 5.2 \times 10^2 + 7.13 \times 10^2 = (5.2 + 7.13) \times 10^2$
$= 12.33 \times 10^2$

3) $(7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83 \times 10^{-5})(7.83 \times 10^{-5}) = 61.3089 \times 10^{-10} \approx 61.31 \times 10^{-10}$

4) $4.86 \times 10^2 \div 0.55 \times 10^5 = (4.86 \div 0.55) \times 10^2 \times 10^{-5} = 8.836 \times 10^{-3}$

Make sure of your understanding

Q1/Simplify the following numerical sentences;

[1] $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$

[2] $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2}) = \sqrt{7} \times \sqrt{7} - \sqrt{7} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{7} + \sqrt{2} \times \sqrt{2}$
$= 7 - \sqrt{14} - \sqrt{14} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}$

[3] $(\sqrt{125} - \sqrt{20})\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right) = (5\sqrt{5} - 2\sqrt{5})\left(\frac{2}{3}\right) = 3\sqrt{5} \times \frac{2}{3}$
$= 2\sqrt{5}$

2	20
2	10
5	5
$2\sqrt{5}$	1

5	125
5	25
5	5
$5\sqrt{5}$	1

[4] $\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}} \div \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{5(-3)} \div \frac{2 \times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$
$= \frac{8\sqrt{3}}{-15} \div \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{-15} \div \frac{4\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{8\sqrt{3}}{-15} \times \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{-4}{15}$

2	8
2	4
2	2
$2\sqrt{2}$	1

2	12
2	6
3	3
$2\sqrt{3}$	1

2	24
2	12
2	6
3	3
$2\sqrt{5}$	1

Q2/ Simplify the following numerical sentences , and write the result to the nearest tenth

[1] $\sqrt{7}\left(\sqrt{28}-\sqrt{2}\right)-5=\sqrt{7}(2\sqrt{7}-\sqrt{2})-5=\sqrt{7}\times 2\sqrt{7}-\sqrt{7}\times\sqrt{2}-5$

$=14-\sqrt{14}-5=9-\sqrt{14}=9-3.74\quad=5.26\approx 5.3$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 28 \\ 2 & 14 \\ 7 & 7 \\ \hline 2\sqrt{7} & 1 \end{array}$$

[2] $(-125)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{12}\right)=\sqrt[3]{-125}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\times 2\sqrt{3}\right)$

$=-5\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=-5\times\frac{1}{10}\sqrt{3}+5\times\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$=\frac{-1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}=2\times 1.73=3.46$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ \hline 2\sqrt{3} & 1 \end{array}$$

Q3/ Simplify the following numerical sentences by rooting the denominator and ordering operations on the real numbers:

[1] $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times 1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}-3}{12}$

[2] $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\frac{1-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}(1-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\times 1-\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}-10}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ 5 & 5 \\ \hline 2\sqrt{5} & 1 \end{array}$$

[3] $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}==\frac{\sqrt{3}(5\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}(10-\sqrt{6})}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$=\frac{\sqrt{3}\times 5\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{6}\times 10-\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{12}$

$=\frac{5\sqrt{6}-3}{6}-\frac{10\sqrt{6}-6}{12}=\frac{10\sqrt{6}-6-10\sqrt{6}+6}{12}=\frac{0}{12}=0$

Q4/Use the ordering of operations and write the result which should be approximated to two decimal places by using the calculator for each of the following:

[1] $\left(\frac{1}{3}\right)^2+3^{-3}-3^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\sqrt{3^3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\sqrt{27}=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-3\sqrt{3}$

$=0.111+0.037-3(1.73)$

$=0.148-5.19=-5.042\approx -5.04$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 50 \\ 5 & 25 \\ 5 & 5 \\ \hline 5\sqrt{2} & 1 \end{array}$$

[2] $27^{\frac{1}{2}}-(-9)^0+3^2\times 5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{27}-1+9\times\sqrt{5}==3\sqrt{3}-1+9\times 2.236$

$=3\times 1.73-1+20.124$

$=5.19-1+20.124=24.314\approx 24.31$

Q5/Use the calculator to write the result in the scientific form of the number which should be approximated to the nearest two decimal places:

[1] $6.43\times 10^{-5}-0.25\times 10^{-4}=0.643\times 10^{-4}-0.25\times 10^{-4}=(0.643-0.25)\times 10^{-4}$

$=0.393\times 10^{-4}\approx 0.39\times 10^{-4}$

[2] $(9.23\times10^{-3})^2 = 9.23\times10^{-3}\times9.23\times10^{-3} = 85.192\times10^{-6}\approx 85.19\times10^{-6}$

Solve the Exercises

Q1/Simplify the following numerical sentences:

[1] $(\sqrt{18}-\sqrt{50})\left(\frac{-27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = (3\sqrt{2}-5\sqrt{2})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}\right) = -2\sqrt{2}\times\frac{-3}{4} = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

[2] $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\times5} \div \frac{5\times2}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{15} \div \frac{10}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{15}\times\frac{5}{10} = \frac{\sqrt{3}}{15}$

Q2/ Simplify the following numerical sentences , and write the result to the nearest tenth

$$7\sqrt{\frac{2}{49}} - 3\sqrt{\frac{8}{81}} + \sqrt{\frac{18}{36}} = 7\times\frac{\sqrt{2}}{7} - 3\times\frac{\sqrt{8}}{9} + \frac{\sqrt{18}}{6} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{5\times1.41}{6} = \frac{7.05}{6} = 1.17 \approx 1.2$$

Q3/ Simplify the following the numerical sentences by using rooting the denominator and the ordering of operations in the real numbers :

[1] $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-3\sqrt{5})-3\sqrt{5}(\sqrt{7}-3\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(3\sqrt{5})^2}$

$$= \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{7}-\sqrt{7}\times3\sqrt{5}-3\sqrt{5}\times\sqrt{7}+3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}{7-45}$$

$$= \frac{7-3\sqrt{35}-3\sqrt{35}+45}{-38} = \frac{52-6\sqrt{35}}{-38} = \frac{-52+6\sqrt{35}}{38}$$

[2] $\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}} - \frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}} - \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}$

$$= \frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}}\times\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} - \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}\times\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{33}-\sqrt{11})\sqrt{11}}{3\sqrt{11}\times\sqrt{11}} - \frac{(2\sqrt{15}-\sqrt{5})\sqrt{15}}{5\sqrt{15}\times\sqrt{15}}$$

$$= \frac{\sqrt{33}\times\sqrt{11}-\sqrt{11}\times\sqrt{11}}{3\times11} - \frac{2\sqrt{15}\times\sqrt{15}-\sqrt{5}\times\sqrt{15}}{5\times15}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\sqrt{11}-11}{33} - \frac{2\times15-\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{75} = \frac{11\sqrt{3}-11}{33} - \frac{30-5\sqrt{3}}{75}$$

$$\frac{11(\sqrt{3}-1)}{33} - \frac{5(6-\sqrt{3})}{75} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{3} - \frac{(6-\sqrt{3})}{15} = \frac{5(\sqrt{3}-1)-(6-\sqrt{3})}{15} \quad \frac{5\sqrt{3}-5-6+\sqrt{3}}{15} = \frac{-11-6\sqrt{3}}{15}$$

Solve the problems

Q1/Satellites: We essentialy use satellite in communications, such us TV signals, telephone calls in all over the world, weather forecasts and tracking of hurricanes. The satellites rotate around earth in limited speed and special orbits. The orbital speed of moon is calculated by the following relation $v = \sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}$ m/sec, where r represents the radius of orbit (the distance of moon from the earth centre), what is the speed of moon if the orbit radius is 300 km?

Sol/

نحول نصف القطر من km الى m

$$r = 300km = 300 \times 1000 = 3 \times 10^5 m$$

$$V = \sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}} = \sqrt{\frac{4\times10^{14}}{3\times10^5}} = \sqrt{\frac{4\times10^{14-5}}{3}} = \frac{2\times\sqrt{10^9}}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10^8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{10}\times10^4}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{10}\times10^4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{30}\times10^4}{3} = \frac{2\times5.47\times10^4}{3} = \frac{10.94\times10^4}{3} = 3.65 \times 10^4$$

Q2/ Fighting fires: We can calculate the speed of flowing water which releases by fire trucks by using the following law $V = \sqrt{2hg}$ foot/sec , where h represents the maximum height of water, and (g) represents the acceleration speed of earth (32 foot/sec2). To fire fighting in the forests, the firefighters in the Civil Defence need to huge bumper to pump water in height of 80 foot. Is it enough to use a pumper releases water in a speed of 72 foot/sec,?

Sol/

V : السرعة . أقصى ارتفاع $h = 80$ foot . التعجيل الأرضي $g = 32$ foo/sec^2

$V = \sqrt{2hg} \Rightarrow 72 = \sqrt{2 \times h \times 32} \Rightarrow \Rightarrow 72 = \sqrt{64 \times h}$ بتربيع الطرفين

$5184 = 64 \times h$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الأرتفاع

$h = \frac{5184}{64} = 81 \Rightarrow$ نعم : مضخة الماء تفي بالحاجة

Q3/ Geometry: Find the area of triangle which topped a front of house if its height $\sqrt{18} - \sqrt{3}$ m meter and its base length is $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ m.

Sol/

Area $= \frac{1}{2} b * h$, where $b = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $h = \sqrt{18} - \sqrt{3}$

$$A = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{18} - \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2\right] = \frac{1}{2}(18 - 3) = \frac{1}{2} \times 15 = 7.5 \text{ m}^2$$

Think

Q1/ Challenge: Prove the correct of the following: $\left(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)=2$

Sol/

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$L.H.S=\left(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)=\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3=7-5=2$ R.H.S

Q2/ Correct the mistake: Shaker wrote the result of adding two numbers as follow:

$8.4\times10^{-3}+0.25\times10^{-2}=4.368\times10^{-3}$ .Determin Shaker's mistake and correct it.

Sol/

$8.4\times10^{-3}+0.25\times10^{-2}=8.4\times10^{-3}+2.5\times10^{-3}=(8.4+2.5)\times10^{-3}=10.9\times10^{-3}$

Q3/ Numerical sense: Does the number $\sqrt{125}$ locate between the two numbers 10.28 and 11.28?

الحل

5	125
5	25
5	5
	1
$5\sqrt{5}$	

$\sqrt{125}=5\sqrt{5}=5\times2.23=11.15$

Yes the number $\sqrt{125}$ is located between 10.28 and 11.28.

Write

Q4/ The result of adding by approximation to the nearest tenth $6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}=\cdots$

Sol/

$6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{6^3}+\sqrt{5^3}=\sqrt{216}+\sqrt{125}$

$=6\sqrt{6}+5\sqrt{5}=6\times2.44+5\times2.23$

$=14.64+11.15=25.79\approx25.8$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1
$6\sqrt{6}$	

5	125
5	25
5	5
$5\sqrt{5}$	1

مراجعة الفصل

تدريب (1) : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{5}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{5+\sqrt{10}+\sqrt{10}+2}{5-2}$$

$$=\frac{7+2\sqrt{10}}{3}=\frac{7+2(3.16)}{3}=\frac{7+6.32}{3}=\frac{13.32}{3}=4.44\approx 4.4$$

تدريب (2) : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

$$6.25\times10^3\div0.05\times10^6=(6.25\div0.05)\times10^{3-6}=125\times10^{-3}=0.125\times10^{12}\approx0.13\times10^{12}$$

مثال 1: بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

$$(-8)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{18}\right)=\sqrt[3]{-8}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}\right)=-2\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=-2\times\frac{1}{4}\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$

$$=\frac{-1}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{3}{2}\times1.41=\frac{4.23}{2}\approx2.11=2.1$$

مثال 2 : استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

$$0.016\times10^4+1.957\times10^3=0.16\times10^3+1.957\times10^3=(0.16+1.957)\times10^3=2.117\times10^3$$
$$\approx2.12\times10^3$$

أختبار الفصل

سؤال : بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية :

[1] $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\sqrt{5}\times\sqrt{5}=3+\sqrt{15}+\sqrt{15}+5$

$$=8+2\sqrt{15}$$

[2] $$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{2}-5\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{18}}{3}-\frac{\sqrt{16}-5\sqrt{2}}{6}=\frac{3-3\sqrt{2}}{3}-\frac{4-5\sqrt{2}}{6}$$

$$=\frac{6-6\sqrt{2}-4+5\sqrt{2}}{6}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

سؤال: استعمل ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب كل مما يلي مقرباً لأقرب عشر :

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{0}+(121)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{125}}-1+\sqrt{121}\times\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{5}-1+\frac{11}{3}$$
$$=0.2-1+3.66\approx 2.86\approx 2.9$$

الاختيار من متعدد

سؤال: أختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1 بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

[1] $(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})=\cdots\cdots$

a) $2+9\sqrt{7}$ b) $2+9\sqrt{2}$
c) $9+2\sqrt{14}$ d) $2+9\sqrt{14}$

الحل

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})=(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2$$
$$=2+2\sqrt{2}\times\sqrt{7}+7$$
$$=9+2\sqrt{14}$$

الجواب فرع : (c)

[2] $(\sqrt{18}-\sqrt{8})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}\right)=\cdots\cdots$

a) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$

الحل

$$(\sqrt{18}-\sqrt{8})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}\right)=(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})\left(\frac{-3}{5}\right)$$
$$=(\sqrt{2})\left(\frac{-3}{5}\right)=\frac{-3\sqrt{2}}{5}$$

الجواب فرع : (d)

2 بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

[3] $\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}}\div\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\cdots\cdots$

a) $\frac{-5}{2}$ b) $\frac{-2}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

الحل

$$\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}}\div\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\frac{6\times 5\sqrt{2}}{3(-2)}\div\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$
$$=\frac{10\sqrt{2}}{-2}\div 2\sqrt{2}=-5\sqrt{2}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{-5}{2}$$

الجواب فرع : (a)

[4] $\sqrt{8}(\sqrt{2}-\sqrt{3})-3\sqrt{6}=\cdots\cdots$

a) $5-4\sqrt{6}$ b) $5+4\sqrt{6}$
c) $4-5\sqrt{6}$ d) $4+5\sqrt{6}$

الحل

$$\sqrt{8}(\sqrt{2}-\sqrt{3})-3\sqrt{6}=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})-3\sqrt{6}$$
$$=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}-2\sqrt{2}\times\sqrt{3}-3\sqrt{6}$$
$$=4-2\sqrt{6}-3\sqrt{6}=4-5\sqrt{6}$$

الجواب فرع : (c)

[5] $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{32}\right)=\cdots\cdots$

a) $\frac{-5}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

الحل

$$(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{32}\right)$$
$$=\sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\times 4\sqrt{2}\right)$$
$$=-3\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=3\times\frac{1}{6}\sqrt{2}+3\times\sqrt{2}=$$
$$=\frac{-1}{2}\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\frac{-\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

الجواب فرع : (b)

[6] $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\cdots\cdots$

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ c) 1 d) -1

الحل

$$\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$
$$=\frac{1(\sqrt{5}+1)-\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-(1)^2}$$
$$=\frac{1\times\sqrt{5}+1\times 1-\sqrt{5}\times\sqrt{5}-\sqrt{5}\times 1}{5-1}$$
$$=\frac{\sqrt{5}+1-5-\sqrt{5}}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

الجواب فرع : (d)

[7] $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\cdots\cdots$

a) $5+6\sqrt{2}$ b) $5-6\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{6}-5$ d) $2\sqrt{6}+5$

الحل

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{6}+3}{2-3}=\frac{5-2\sqrt{6}}{-1}=-5+2\sqrt{6}$$

الجواب فرع : (c)

3 استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

[8] $\left(\frac{1}{3}\right)^2-3^{-2}-(5)^{\frac{3}{2}}\approx\cdots\cdots$

a) -18.11 b) 18.11 c) 11.18 d) -11.18

الحل

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2-3^{-2}-(5)^{\frac{3}{2}}\approx\frac{1}{9}-\frac{1}{3^2}-\sqrt{(5)^3}$$
$$\approx\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\sqrt{125}\approx-5\sqrt{5}\approx-5(2.236)$$
$$\approx-11.18$$

[9] $8^{-\frac{1}{3}}-(-7)^0+\frac{1}{6}\times 4^{\frac{1}{2}}\approx\cdots\cdots$

a) -0.16 b) -0.17 c) 0.16 d) 0.17

الحل

$$8^{-\frac{1}{3}}-(-7)^0+\frac{1}{6}\times 4^{\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}-1+\frac{1}{6}\times\sqrt{4}$$
$$\approx\frac{1}{\sqrt[3]{8}}-1+\frac{1}{6}\times 2\approx\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}$$
$$\approx 0.5-1+0.333\approx-0.167\approx-0.17$$

الجواب فرع : (b)	الجواب فرع : (d)

4 استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

[10] $(7.46 \times 10^{-2})^2 \approx \cdots\cdots$

a) 5.56×10^{-5} b) 5.57×10^{-4}

c) 5.56×10^{-4} d) 5.57×10^{-5}

الحل

$(7.46 \times 10^{-2})^2 = 7.46 \times 10^{-2} \times 7.46 \times 10^{-2}$

$= (7.46 \times 7.46) \times 10^{-4} = 55.65 \times 10^{-4}$

$= 5.565 \times 10^{-5} \approx 5.57 \times 10^{-5}$

الجواب فرع : (d)

Lesson [1 – 2] Mappings

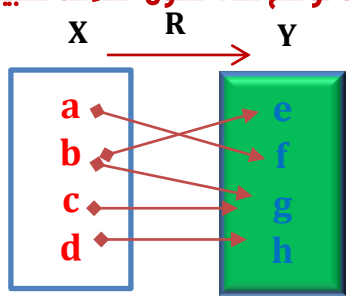
[1 – 2 – 1] Mapping and its representation in the coordinate plane

The mapping: Let R relation from the set X to the set Y and each element in set X has one from in Y then the relation R can be called the mapping from X to Y ,R:X→Y .

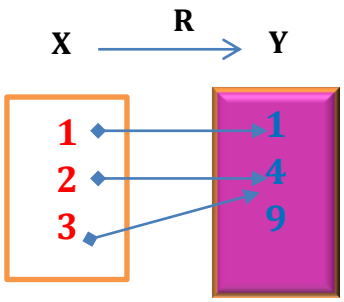
الزوج المرتب (ordered pair) : هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) اذ ينتمي المسقط الأول ((الإحداثي الأول)) الى المجموعة X والمسقط الثاني ((الإحداثي الثاني)) الى المجموعة Y من حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$

المدى (Rang) : يمثل المدى المسقط الثاني من الأزواج المرتبة (x, y) أي تمثل صور عناصر المجال ((النواتج))

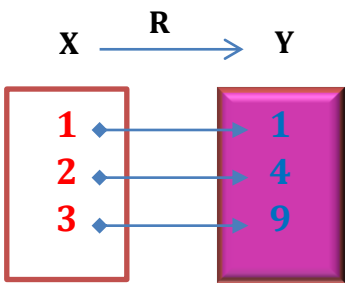
فيما يلي أمثلة توضح متى تكون العلاقة تطبيق :



R لا يمثل تطبيق لأن العنصر b في المجال ارتبط بعنصرين في المجال المقابل



R يمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y



R يمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y

هنا هذا السهم الذي يربط بين المجموعتين يسمى قاعدة الاقتران . ويكون الناتج .X قاعدة الاقتران عبارة عن معادلة ندخل فيها عناصر المجموعة

.. وهذى الناتج يسمى المدى.Y هو الذي يرتبط به السهم في المجموعة

Ex./ If $R : X \rightarrow Y$ represents a mapping of connection rule $y = \frac{1}{2}x$ from the set $X = \{4, 6, 8\}$to the set, $Y = \{2, 3, 4, 5\}$, and write the mapping in ordered pairs form ,then represent the mapping in an arrowy diagram and determine the domain and the range of the mapping.

Sol/

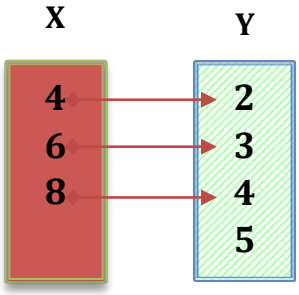
$y = \frac{1}{2}x \quad , \quad X = \{4, 6, 8\}$

$y = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$y = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$y = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

أولا" وضع قاعدة الاقتران ثانيا" التعويض بدل كل X الأرقام الموجودة في المجموعةX الناتج يمثل المدى والازواج المرتبة هي عبارة عن المدخلات في قاعدة الاقتران والمخرجات

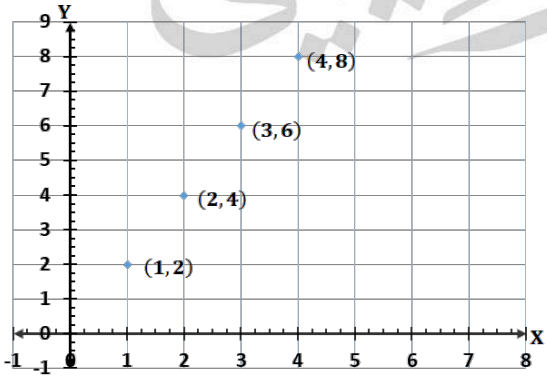


$R = \{(4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$ الأزواج المرتبة $\Rightarrow$ $X = \{4, 6, 8\}$ المجال $\Rightarrow$ $\{2, 3, 4\} =$ المدى

Ex./ The following table represents the relation between the weight (kg) and the price of fish (y = f(x)).

x = weight (kg)	y = price in thousands dinars
1	2
2	4
3	6
4	8

Sol/



The conection Rule $y = 2x$

$The\ Domain = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $The\ Range = \{2, 4, 6, 8\}$

[1 – 2 – 2]	The types of mappings

1 Surjective mapping | Not Surjective mapping

Not Surjective mapping	Surjective mapping
يكون التطبيق $f : X \to Y$ غير شامل *If the Range* N, Z, R, Q	يكون التطبيق $f : X \to Y$ شامل اذا كان If the range=the co-domain

2 Injective mappin | Injective mapping

Not Injective mapping	Injective mapping
يكون التطبيق $f: X \to Y$ غير متباين اذا كان $\forall\, x_1, x_2 \in X\ , x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) = f(x_2)$ ((النواتج متشابهة))	يكون التطبيق $f: X \to Y$ متباين If each element in X connects with only one element only in Y $\forall\, x_1, x_2 \in X\ , x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ ((النواتج مختلفة))

3 Bijective mapping

If the mapping is surjective and Injective at the same time

Ex./If $f : Z \to Z$ where $f(x) = 2x^2 - 3$ show the type of the mapping, where Z represents the set of the integers.

Sol./

$f(x) = 2x^2 - 3 \qquad , \quad X = Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\dots\}$

$f(0) = 2(0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$

$f(1) = 2(1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(2) = 2(2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$

$\dots, -2, -1, 0\ 1, 2, \dots$

$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\dots$

$The\ Range = \{-3, -1, 5, \dots\dots\dots\}$

التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل Z

التطبيق ليس متباينا لأن $f(1) = f(-1) = -1$ بينما $1 \neq -1$

أي ان عوضنا 1 والسالب واحد والناتج هو نفسه -1
وهذا يخالف شرط التطبيق المتباين

Composition of mappings

1	$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$	2	$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$f[g(x)]$ الدالة تقرأ f تركيب g بالنسبة لل x

$g[f(x)]$ الدالة تقرأ g تركيب f بالنسبة لل x

Ex./ If $f : N \to N$, $f(x) = 2x + 1$ $g: N \to N$, $g(x) = x^2$, Find the two mappings composition. Find i) $(fog)(3)$ ii) $(gof)(3)$, what you see? iii) if $(fog)(x) = 33$, find the value of x

Sol./

1) $(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f[(3)^2] = f(9) = 2(9) + 1 = 19$

2) $(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g[2(3) + 1] = g(7) = (7)^2 \quad \Rightarrow \quad (f \circ g)(3) \neq (g \circ f)(3)$

3) $(f \circ g)(x) = 33$

$f[g(x)] = 33 \quad \Rightarrow \quad f(x^2) = 33 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 1 = 33$

$2x^2 = 33 - 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 32$

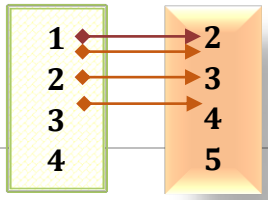
$x^2 = \frac{32}{2} = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \mp 4$

Make sure of your understanding

Q1/ Write a connection rule for the mapping and represent it in an arrowy diagram and write the domain and the range of it:

[1] $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$

Sol./



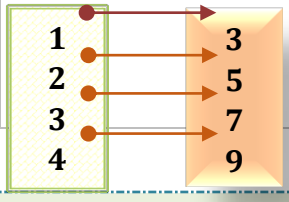
connection rule : $f(x) = x + 1$

the domain : $\{1, 2, 3, 4\}$

the range : $\{2, 3, 4, 5\}$

[2] $g = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$

Sol./



conection rule $f(x) = 2x + 1$

the domain : $\{1, 2, 3, 4\}$

the range : $\{3, 5, 7, 9\}$

Q2/ Write a connection rule for the following mappings and represent them in the coordinate plane and write their domain and range:

[1] $f = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\}$

Sol./

connection rule : $f(x) = 0$

the domain $= \{1, 2, 3, 4\}$

the range $= \{0\}$

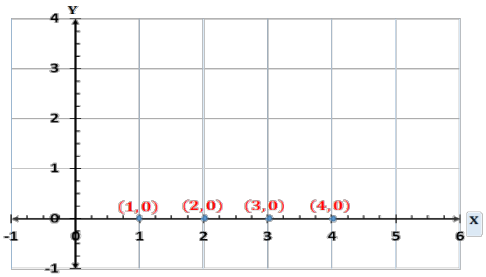
[2] $g = \{(0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

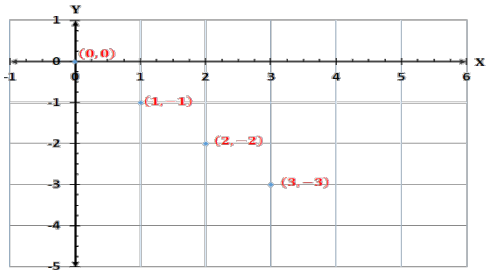
Sol./

connection rule : $f(x) = -x$

the domain : $\{0, 1, 2, 3\}$

the range : $\{0, -1, -2, -3\}$





Q3/ If the mapping $f : N \to N$, where $f(x) = 3x + 2$ Show if the mapping is surjective or not?

Sol./

$f(x) = 3x + 2 \quad , \quad X = N = \{1, 2, 3, \dots\dots\}$

$f(1) = 3(1) + 2 = 5$

$f(2) = 3(2) + 2 = 8$

$f(3) = 3(3) + 2 = 11$

$the\ domain = \{5, 8, 11, \dots\dots\dots\} \Longrightarrow$ The mapping is not surjective, since the domain $\neq$ the range

Q4/ Assume the two mappings $f : Z \to Z$, where $f(x) = 3x + 1$ and $g : Z \to Z : g(x) = 2x + 5$, find the value of x, if $(f \circ g)(x) = 28$.

Sol./

Since $(f \circ g)(x) = 28$

$\Longrightarrow f[g(x)] = 28$

$\Longrightarrow f[2x + 5] = 28$

$\Longrightarrow 3(2x + 5) + 1 = 28 \quad \Longrightarrow \quad 6x + 15 + 1 = 28$

$\Longrightarrow 6x + 16 = 28 \quad \Longrightarrow \quad 6x = 28 - 16$

$\Longrightarrow 6x = 12 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{12}{6} = 2$ So, the value of X=2

Q5/ If $f : N \to N$, where $f(x) = 5x + 2$, and $g: N \to N$ where $g(x) = x + 3$. Write the mapping (fog) by writing its ordered pairs.

Sol./

$f \circ g(x) = f[g(x)] \quad , \quad X = N = \{1, 2, 3, \dots\dots\dots\}$

$\Longrightarrow f \circ g(1) = f[g(1)] = f(1 + 3) = f(4) = 5(4) + 2 = 22$

$\Longrightarrow f \circ g(2) = f[g(2)] = f(2 + 3) = f(5) = 5(5) + 2 = 27$

$\Longrightarrow f \circ g(3) = f[g(3)] = f(3 + 3) = f(6) = 5(6) + 2 = 32$

$\Longrightarrow f \circ g = \{(1, 22), (2, 27), (3, 32), \dots\dots\dots\dots\}$ **Order pairs**

$The\ Range = \{22, 27, 32, \dots\dots\dots\}$

The mapping is not surjective, since the domain $\neq$ the range N

The mapping is not injective, since $f \circ g(1) \neq f \circ g(2) \Longrightarrow$ the mapping is not bijective

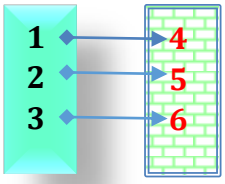
Solve the Exercises

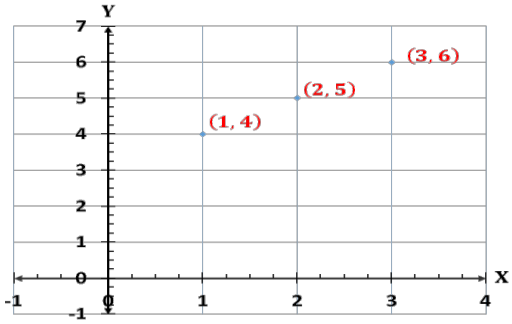
Q1/ If $A = \{1, 2, 3\}$ *and* $B = \{4, 5, 6\}$, *such that* $f : A \to B$ is defined as follow: $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$

Draw the arrowy diagram of the mapping and represent it in the coordinate plane.

Sol./

$the\ domain = \{1, 2, 3\}$
$the\ range = \{4, 5, 6\}$
The mapping is surjective,
since the domain = range
The mapping is injective since $f(1) \neq f(2)$
$\Longrightarrow$ the mapping is bijective.

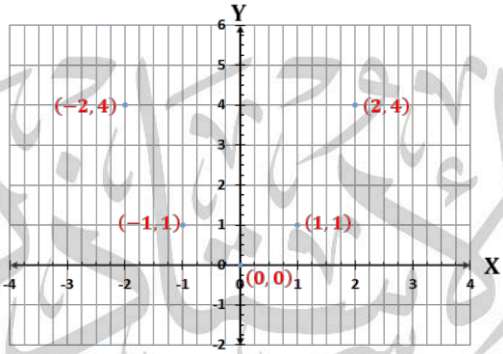




Q2/ If $f : A \to Z$, where $f(x) = x^2$ and the set $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Represent the mapping in the coordinate plane, and show if the mapping is injective or not?

Sol./

$f(x) = x^2 \quad , \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$f(-2) = (-2)^2 = 4$
$f(-1) = (-1)^2 = 1$
$f(0) = (0)^2 = 0$
$f(1) = (1)^2 = 1$
$f(2) = (2)^2 = 4$
$f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
The mapping is not injective, since $f(1) = f(-1)$, and $1 \neq 1$.



Q3/ Assume $f : N \to N$, and $g : N \to N$, $f(x) = x^2$, and $g(x) = x + 1$. It is required to find:

1) $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ 2) $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$

Sol./

1) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2] = x^2 + 1$
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x + 1] = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2) $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f[2 + 1] = f(3) = (3)^2 = 9$
$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g[(2)^2] = g(4) = 4 + 1 = 5$

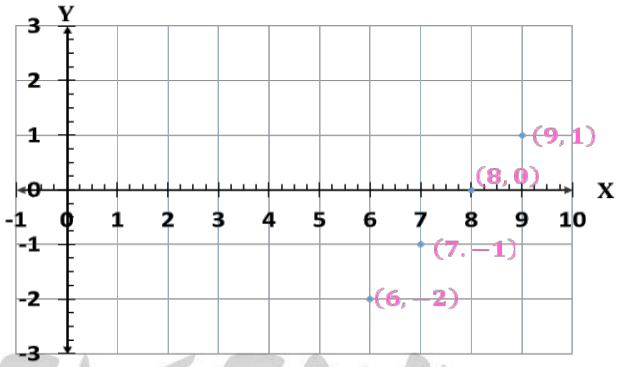
Solve the problems

Q1/ Temperatures: In a day of winter, the temperatures recorded as shown in the following relation

$R = \{(6,-2),(7,-1),(8,0),(9,1)\}$, where the first coordinate represents the time in hours , and the second coordinate represents the temperature in celsius degrees. Represent the relation in a table and represent it in the coordinate plane . Does the relation represent a mapping or not? Explen your answer.

Sol./

Time (X)	6	7	8	9
Temperature (Y)	-2	-1	0	1



The relation represent a mapping because every element in X has one element image in Y.

Q2/ The nearby graphic figure represents the mapping $f : N \longrightarrow N$ Write the coordinates of the ordered pairs which can be represented by the mapping points in the graphic. Write a connection rule of the mapping, is the mapping an injective or not?

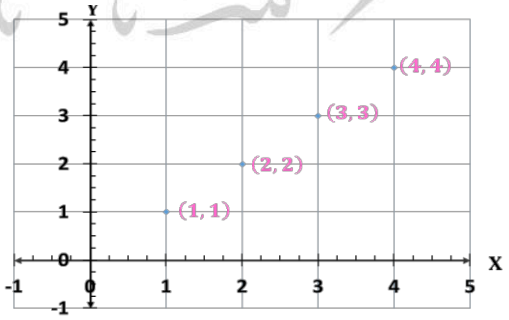
Sol./

Order pairs $f = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

connection rule : $f(x) = x$:

The mapping is injective, because $f(1) \neq f(2)$ *and* $1 \neq 2$

((النواتج مختلفة))



Q3/ The relation $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$ represents the mass of wa – w ter in human body, where W_r represents the mass of water and W_b represents the mass of human body. Hassan's mass is 150 kg, he follows a diet to reduce the mass for three months, he lost 6kg in the first month and 12kg in the second month and 12kg in the third month. Write all the ordered pairs for the relation between Hassan, s mass and the mass of water in his body. Does it represent a mapping or not ?

Sol./

$W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$, $W_b = \{150, 150-6=144, 144-12=132, 132-12=120\}$

$W_r(150) = 2\left(\frac{150}{3}\right) = 2(50) = 100$

$W_r(144) = 2\left(\frac{144}{3}\right) = 2(48) = 96$

$W_r(132) = 2\left(\frac{132}{3}\right) = 2(44) = 88$

$W_r(120) = 2\left(\frac{120}{3}\right) = 2(40) = 80$

$f = \{(150,100),(144,96),(132,88),(120,80)\}$ *Order pairs*

يمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل .

Think

Q1/ Challenge: If $A = \{1,2,3\}$ **and where** $f : A \longrightarrow A$ **and** $g : A \longrightarrow A$ **is a defined mapping, as follow:** $g = \{(3,1),(1,2),(2,3)\}$ $f = \{(1,3),(3,3),(2,3)\}$ **show does** $f \circ g = g \circ f$?

Sol./

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(2) = 3$
$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(3) = 3$
$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$
$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(3) = 1$
$g \circ f(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$
$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

Q2/ Correct the mistake: Yaseen saide that the relation $f : Z \to Z$, where $f(x) = x^3$ does not represent an injective mapping. Determine Yaseen's mistake and correct it.

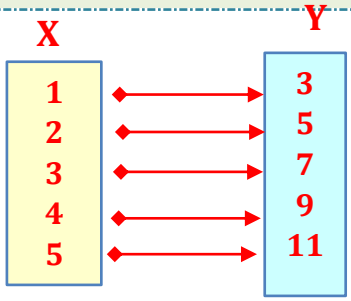
Sol./

$f(x) = x^3$, $X = Z = \{-2,-1,0,1,2\}$
$f(-2) = (-2)^3 = -8$, $f(-1) = (-1)^3 = -1$
$f(0) = (0)^3 = 0$, $f(1) = (1)^3 = 1$, $f(2) = (2)^3 = 8$

The mapping is represent an injective mapping because $f(-1) \neq f(1)$ *where* $-1 \neq 1$ ((النواتج مختلفة))

Q3/ Numerical sense: Determine if each of the following relations f:X→Y represents a mapping or not? Explain

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11



The relation represent a mapping because every element in X has one element image in Y.

Q4/ The value of x, if the mapping $f : N \to Z$, and where $f(x) = 4x - 3$, $(f \circ f)(x) = 33$.

Sol./

$f[f(x)] = 33$

$f(4x - 3) = 33$

$4(4x - 3) - 3 = 33$

$16x - 12 - 3 = 33 \quad \Rightarrow \quad 16x - 15 = 33 \quad \Rightarrow \quad 16x = 33 + 15 \quad \Rightarrow \quad 16x = 48 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{48}{16} = 3$

مـــراجعة الفصـــل

تدريب: اذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكان التطبيقان $f : A \to A$ و $g : A \to A$ معرفين كما يأتي :

$f = \{(1,2) , (2,3) , (3,1)\} , g = \{(1,1) , (2,2) , (3,3)$: فجد تركيب الدالتين $1)\ f \circ g \quad 2)\ g \circ f$

الحل

i) $f \circ g(x) = f[g(x)]$

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(2) = 3 \quad \to \quad f \circ g(2) = f[g(2)] = f(3) = 3$

$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$

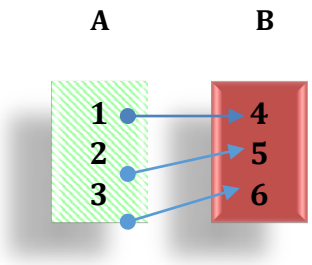
ii) $g \circ f(x) = g[f(x)]$

$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(3) = 1 \quad \to \quad g \circ f(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$

$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

سؤال: اذا كان التطبيق $R : A \to B$ معطى كما يأتي : $R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$ حيث $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$: مثل التطبيق بمخطط سهمي وحدد المجال والمدى للتطبيق .

الحل



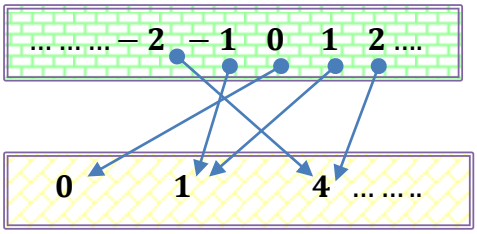
المجال $= \{1, 2, 3\}$

المدى $= \{4, 5\}$

أختـــبار الفصـــل

سؤال: اذا كانت $f : Z \to R$ حيث $f(x) = x^2$. ارسم مخططا سهميا للدالة وبين هل أن الدالة متباينة أو شاملة أو تقابل؟

الحل



$f(x) = x^2 \quad , \quad X = Z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

المدى $= \{4, 1, 0\}$. التطبيق غير شامل لأن المدى $\neq$ المجال القابل R

التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 \neq -1$ (النواتج متشابهة) . التطبيق ليس تقابل .

سؤال: اذا كانت الدالة $f : N \to N$ اذ أن $f(x) = 3x + 1$ و $g : N \to N$ اذ أن $g(x) = x^2$ جد :

$(g \circ f)(5)$, $(f \circ g)(5)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ g)(2)$

الحل

$g \circ f(5) = g[f(5)] = g[3(5) + 1] = g(16) = (16)^2 = 256$

$f \circ g(5) = f[g(5)] = f[(5)^2] = f(25) = 3(25) + 1 = 75 + 1 = 76$

$g \circ f(2) = g[f(2)] = g[3(2) + 1] = g(7) = (7)^2 = 49$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f[(2)^2] = f(4) == 3(4) + 1 = 12 + 1 = 13$

سؤال: اذا كانت الدالة $f : R \to R$ حيث $f(x) = 3x + 1$ والدالة $g : R \to R$ حيث $g(x) = 2x + 5$ هل أن $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ثم جد قيمة x اذا كانت $(f \circ g)(x) = 28$

الحل

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x + 1) = 2(3x + 1) - 5 = 6x + 2 - 5 = 6x - 3$

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x + 5) = 3(2x + 5) + 1 = 6x + 15 + 1 = 6x + 16$

$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

$(f \circ g)(x) = 28$

$f[g(x)] = 28$

$f(2x + 5) = 28 \implies 3(2x + 5) + 1 = 28 \implies 6x + 15 + 1 = 25$

$16x + 16 = 28 \implies 6x = 28 - 16 \implies 6x = 12 \implies x = \frac{12}{2} = 2$

الاختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

[1] اذا كان التطبيق $f : A \to B$ معرف كالآتي : $x \to x+1$ حيث $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4,68\}$ فأن مدى التطبيق هو :

a) $\{2,4,8\}$ b) $\{4,6,8\}$
c) $\{2,4,6\}$ d) $\{2,6,8\}$

الحل

$x \to x+1$, $A = \{1,3,5\}$
$1 \to 1+1 = 2$, $2 \to 3+1 = 4$
$5 \to 5+1 = 6$

المدى $= \{2,4,6\}$

الجواب فرع : (c)

[2] اذا كانت $A = \{1,2,-2,-3\}$ وكان $g : A \to Z$ فأن مدى التطبيق اذا كان $g(x) = 5x-3$ هو :

a) $\{2,9,13,18\}$ b) $\{2,7,-13,-18\}$
c) $\{9,13,18,21\}$ d) $\{7,13,15,18\}$

الحل

$g(x) = 5x-3$, $A = \{1,2,-2,-3\}$
$g(1) = 5(1)-3 = 5-3 = 2$
$g(2) = 5(2)-3 = 10-3 = 7$
$g(-2) = 5(-2)-3 = -10-3 = -13$
$g(-3) = 5(-3)-3 = -15-3 = -18$

المدى $= \{2,7,-13,-18\}$

الجواب فرع : (b)

[3] اذا كانت $f : Z \to R$ اذ $f(x) = 3x-2$ فأن العدد 10 هو صورة للعدد :

a) 5 b) 4 c) 2 d) 3

الحل

$f(4) = 3(4)-2 = 12-2 = 10$

الجواب فرع : (b)

[4] ليكن $f : A \to B$ اذ $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{4,6,8\}$ وأن $f = \{(2,4),(3,6),(4,8),(5,8)\}$ فأن f يمثل تطبيقا شاملا لأن :

a) المجال المقابل $\neq$ المدى b) $f(u) = f(s)$
c) A المدى هو المجال مجموعة d) المدى = المجال المقابل

الحل

الجواب فرع : (d)

[5] اذا كانت $f : N \to N$ اذ $f(x) = 2x-3$ و $g : N \to N$ اذ $g(x) = x+1$ فأن التطبيق $(g \circ f)(x)$ هو

a) $2x-2$ b) $2x-4$
c) $2x+2$ d) $2x+4$

الحل

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x-3) = 2x-3+1$
$= 2x-2$

الجواب فرع : (a)

[6] ليكن $f : \{2,3,5\} \to N$ اذ $f(x) = 3x-1$ و $g : N \to N$ اذ $g(x) = x+1$ فأن مدى $g \circ f$ هو :

a) $R_{g\circ f} = \{5,8,14\}$ b) $R_{g\circ f} = \{5,6.9\}$
c) $R_{g\circ f} = \{6,9,15\}$ d) $R_{g\circ f} = \{6,9,12\}$

الحل

$g \circ f(2) = g[f(2)] = g[3(2)-1] = g(5) = 5+1$
$= 6$
$g \circ f(3) = g[f(3)] = g[3(3)-1] = g(8) = 8+1$
$= 9$
$g \circ f(5) = g[f(5)] = g[3(5)-1] = g(14)$
$= 14+1 = 15$

المدى هو $R_{g\circ f} = \{6,9,15\}$

الجواب فرع : (c)

[7] اذا كان التطبيق $f : Q \to Q$ اذ $f(x) = 4x + 1$ والتطبيق $g : Q \to Q$ اذ $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ جد قيمة x اذا كانت $(f \circ g)(x) = 45$ فأن قيمة x هي :

a) ∓ 5 b) ± 6 c) ± 7 d) ± 8

الحل

$$(f \circ g)(x) = 45 \quad \Rightarrow \quad f[g(x)] = 45$$

$$f\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) = 45$$

$$4\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) + 1 = 45$$

$$\frac{4}{3}x^2 - 4 + 1 = 45 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}x^2 - 3 = 45$$

$$\frac{4}{3}x^2 = 45 + 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}x^2 = 48$$

$$4x^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{144}{4}$$

$$x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 6$$

الجواب فرع : (b)

Lesson [1-3] The sequances

The Sequance: The sequence $f : N \longrightarrow R$ is a function represented by a set of the ordered pairs {(1,f(1)) , (2,f(2)) , (3,f(3)) , … ,(n,f(n)), …} ,where the first progection represent the natural numbers set (infinite sequence) and we can refer to it by $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *and* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ second progection represent the natural numbers set (finite sequence) and we can refer to it by and $\{f(n)\}_{n=1}^{m}$ *and* $\{u_n\}_{n=1}^{m}$.

هي دالة مجالها N أو مجموعة جزئية مرتبة منتهية من N أي أن : $f : N \longrightarrow R$ وتكتب على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة حيث المساقط الأولى تمثل عناصر المجال N والمساقط الثانية تمثل عناصر المجال المقابل (الصور) كما في الشكل :

$$\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), \dots\dots\dots\dots, (n, f(n), \dots\dots)\}$$

فاذا كانت المتتابعة منتهية يرمز لها بالرمز $\{u_n\}_{n=1}^{m}$ أو $\{f(n)\}_{n=1}^{m}$ أما اذا كانت المتتابعة غير منتهية يرمز لها بالرمز $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ أو $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

ملاحظـــة : غالبا ما نكتفي عند كتابة المتتابعة بذكر المساقط الثانية فقط (الصور) .

$$\{f(1), f(2), f(3), \dots\dots\dots\dots, f(n), \dots\dots\}$$

ملاحظـــة : يسمى u_n بالحد العام للمتتابعة $u_n = f(n)$ وتكتب المتتابعة بالصورة :

$$\{u_1, u_2, u_3, \dots\dots\dots\dots, u_i, \dots\dots\}$$

Ex./ Arrange a table to connect between the number of days and the number of paintings. Write the ordered pairs set from the table. Does the table represent a pattern? Does it represent a sequence?

عدد اللوحات	1	2	3	4	5
عدد الأيام	3	6	9	12	15

Sol./

Order pairs : $\{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12),(5,15)\}$

the table represent a pattern and the relation represents a sequence.

نعم يمثل نمطا والعلاقة تمثل ((ثلاثة أمثال)) والعلاقة تمثل متتابعة حدها العام هو

$u_n = 3n \quad , \quad n \in \{1,2,3,4,5\}$

$\{u_n\} = 3n = \{3,6,9,12,15\} \quad \Leftarrow$ تكتب بالشكل الاتي:

Ex./ Write the first five ordered pairs of the sequence { un } and represent it in the coordinate plane:

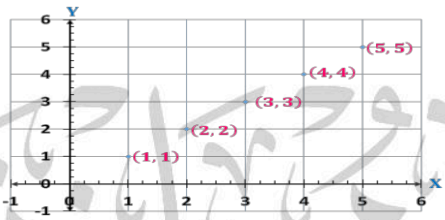
[1] $u_n = n$

Sol./

$u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = 2 \quad , \quad u_3 = 3$

$u_4 = 4 \quad , \quad u_5 = 5$

$Order\ pairs\ \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

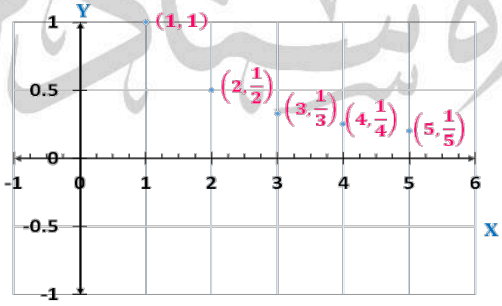


[2] $u_n = \frac{1}{n}$

Sol./

$u_1 = \frac{1}{1} = 1, u_2 = \frac{1}{2}, \ u_3 = \frac{1}{3}$

$u_4 = \frac{1}{4} \quad , \quad u_5 = \frac{1}{5}$



$Order\ pairs\ \left\{(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),\left(4,\frac{1}{4}\right),\left(5,\frac{1}{5}\right)\right\}$

Ex./ Write the first five terms for the following sequances:

[1] $u_n = \{2n-1\}$

Sol./

$u_1 = 2(1) - 1 = 1 \quad ,$

$u_2 = 2(2) - 1 = 3$

$u_3 = 2(3) - 1 = 5 \quad ,$

$u_4 = 2(4) - 1 = 7$

$u_5 = 2(5) - 1 = 9$

$The\ sequance\ is\ \langle 1,3,5,7,9\rangle$

[2] $\{u_n\} = (-1)^n$

Sol./

$u_1 = (-1)^1 = -1 \quad , \quad u_2 = (-1)^2 = 1$

$u_3 = (-1)^3 = -1 \quad , \quad u_4 = (-1)^4 = 1$

$u_5 = (-1)^5 = -1$

$The\ sequance\ is\ \langle 1,1,-1,1,-1\rangle\ \{,1,-1,1,-1\}$

[3] $\{u_n\} = \frac{n}{3}$ Sol./ $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{3} = 1$ $u_4 = \frac{4}{3}$, $u_5 = \frac{5}{3}$ *The sequance is* $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \rangle$	[4] $\{u_n\} = n^2$ Sol./ $u_1 = (1)^2 = 1$, $u_2 = (2)^2 = 4$ $u_3 = (3)^2 = 9$, $u_4 = (4)^2 = 16$ $u_5 = (5)^2 = 25$ *The sequance is* $\langle 1, 4, 9, 16, 25 \rangle$
[5] $\{u_n\} = n^3$ Sol./ $u_1 = (1)^3 = 1$, $u_2 = (2)^3 = 8$, $u_3 = (3)^3 = 27$, $u_4 = (4)^3 = 64$, $u_5 = (5)^3 = 125$ *The sequance is* $\langle 1, 8, 27, 64, 125 \rangle$	

Arithmetic Sequence

Arithmetic sequence: is the sequence in which the difference between each two consecutive terms represents a constant number, and it is called the base of the sequence (the common difference of sequence), its symbol is $d = u_{n+1} - u_n$. We can write a sequence by knowing its first term $a = u_1$ and the base d The general term law of the arithmetic sequence is

$$u_n = a + (n-1)d$$

, where n ∈ N. and in general we can defined the kind of the sequence as following :

i) Increasing sequence in which d > 0, example {1, 3, 5, 7, 9, ...},

ii) Decreasing sequence in which d < 0 , example {4, 2, 0, -2, -4, ...}

iii) Constant sequence in which d = 0 , example {5, 5, 5, 5, 5,.. }.

المتتابعة الحسابية : هي المتتابعة التي يكون فيا الفرق بين كل حدين متتالين عددا ثابتا ويسمى أساس المتتابعة ويرمز بالرمز $d = u_{n+1} - u_n$ أي أن ((الأساس d = الحد الثاني – الحد الأول)) ويمكن كتابة المتتابعة بمعرفة حدها الأول $a = u_1$ وأساسها d . حيث : n تمثل عدد حدود المتتابعة .

قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية

ملاحظة

لإيجاد المتتابعة الحسابية اذا علم حدها الأول a وأساسها d نستخدم :

$$a = u_1 \overset{+d}{\Rightarrow} u_2 \overset{+d}{\Rightarrow} u_3 \overset{+d}{\Rightarrow} \cdots\cdots \overset{+d}{\Rightarrow} u_n$$

Ex./ Write the first five terms for each of the following arithmetic sequences:

[1] An arithmetic sequence in which the first term is 3 and its common difference is 6.

Sol./

$a = u_1 = 3 \ , \quad d = 6$

$u_2 = u_1 + d = 3 + 6 = 9 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = 9 + 6 = 15$

$u_4 = u_3 + d = 15 + 6 = 21 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = 21 + 6 = 27$

$The\ sequance\ is \langle 3, 9, 15, 21, 27 \rangle$

[2] An arithmetic sequence in which the first term is 1 and its common difference is -3.

Sol./

$a = u_1 = 1 \ , \quad d = -3$

$u_2 = u_1 + d = 1 - 3 = -2 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = -2 - 3 = -5$

$u_4 = u_3 + d = -5 - 3 = -8 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = -8 - 3 = -11$

$The\ sequance\ is \langle 1, -2, -5, -8, -11 \rangle$

[3] An arithmetic sequence in which the seventh term is 36 and its common difference is 4

Sol./

$u_7 = 36 \ , \ n = 7 \ , \ d = 4 \ , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d \implies 36 = a + (7-1)(4) \implies 36 = a + 24$

$a = 36 - 24 = 12 \implies a = 12$

The sequence $is \langle 12, 16, 20, 24, 28 \rangle$

Ex./ An arithmetic sequence in which the third term is 8 and d = -3. Find the terms between u7 and u11 .

الحل

$u_3 = 8 \ , \ n = 3 \ , \quad d = -3 \ , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$8 = a + (3-1)(-3) \implies 8 = a - 6 \implies a = 8 + 6 = 14$

$u_8 = 14 + (8-1)(-3) = 14 - 21 = -7$

$u_9 = 14 + (9-1)(-3) = 14 - 24 = -10$

$u_{10} = 14 + (10-1)(-3) = 14 - 27 = -13$

The sequence $is \langle -7, -10, -13 \rangle$

المتتابعة الحسابية ثلاثة أنواع هي :

1. تكون المتتابعة متزايدة اذا كانت : $d > 0$ (موجبة)
2. تكون المتتابعة متناقصة اذا كانت : $d < 0$ (سالبة)
3. تكون المتتابعة ثابتة اذا كانت : $d = 0$

Ex./ Write the twentieth term of the arithmetic sequence $\langle 6, 1, -4, -9, \dots \rangle$, and determine if is a decreasing or increasing .

Sol./

$a = 6$, $d = 1 - 6 = -5$, $u_{20} = ?$ $n = 20$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_{20} = 6 + (20-1)(-5) = 6 + (19)(-5) = 6 - 95 = -89$

The sequence is decreasing, because $d < 0$

Make sure of your understanding

Q1/ Write the first four ordered pairs for the sequence which its general term is given:

[1] $u_n = 3n$ Sol./ $u_1 = 3(1) = 3$, $u_2 = 3(2) = 6$ $u_3 = 3(3) = 9$, $u_4 = 3(4) = 12$ الأزواج المرتبة : $\{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12)\}$	[2] $u_n = n - 4$ Sol./ $u_1 = 1 - 4 = -3$, $u_2 = 2 - 4 = -2$ $u_3 = 3 - 4 = -1$, $u_4 = 4 - 4 = 0$ الأزواج المرتبة : $\{(1,-3),(2,-2),(3,-1),(4,0)\}$
[3] $u_n = n^2$ Sol./ $u_1 = (1)^2 = 1$, $u_2 = (2)^2 = 4$ $u_3 = (3)^2 = 9$, $u_4 = (4)^2 = 16$ الأزواج المرتبة : $\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$	[4] $u_n = \frac{1}{2n}$ Sol./ $u_1 = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$ $u_3 = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$, $u_4 = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}$ الأزواج المرتبة : $\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(2,\frac{1}{4}\right),\left(3,\frac{1}{6}\right),\left(4,\frac{1}{8}\right)\right\}$
[5] $u_n = 3n - 1$ Sol./ $u_1 = 3(1) - 1 = 2$, $u_2 = 3(2) - 1 = 5$ $u_3 = 3(3) - 1 = 8$, $u_4 = 3(4) - 1 = 11$ الأزواج المرتبة : $\{(1,2),(2,5),(3,8),(4,11)\}$	

Q2/ Write the first five terms of each of the following sequences:

[1] An arithmetic sequence in which the first term is 1 and its common difference is 5.

Sol./

$a = u_1 = 1$, $d = 5$

$u_2 = u_1 + d = 1 + 5 = 6$, $u_3 = u_2 + d = 6 + 5 = 11$

$u_4 = u_3 + d = 11 + 5 = 16$, $u_5 = u_4 + d = 16 + 5 = 21$

The sequence $is \langle 1, 6, 11, 16, 21 \rangle$

[2] An arithmetic sequence in which the first term is -5 and its common difference is 2.

Sol./

$a = u_1 = -5 \quad , \quad d = 2$

$u_2 = u_1 + d = -5 + 2 = -3 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = -3 + 2 = -1$

$u_4 = u_3 + d = -1 + 2 = 1 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = 1 + 2 = 3$

The sequence $is \langle -5, -3, -1, 1, 3 \rangle$

[3] An arithmetic sequence in which the first term is -3 and its common difference is -4.

Sol./

$a = u_1 = -3 \quad , \quad d = -4$

$u_2 = u_1 + d = -3 - 4 = -7 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = -7 - 4 = -11$

$u_4 = u_3 + d = -11 - 4 = -15 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = -15 - 4 = -19$

The sequence $is \langle -3, -7, -11, -15, -19 \rangle$

Q3/ Find the terms between u8 and u12 for an arithmetic sequence in which the third term is (9) and d= -2.

Sol./

$u_3 = 9 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad d = -2 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d \quad \Rightarrow \quad 9 = a + (3-1)(-2)$

$9 = a - 4 \quad \Rightarrow \quad a = 9 + 4 = 13$

$u_9 = 13 + (9-1)(-2) = 13 + (8)(-2) = 13 - 16 = -3$

$u_{10} = 13 + (10-1)(-2) = 13 + (9)(-2) = 13 - 18 = -5$

$u_{11} = 13 + (11-1)(-2) = 13 + (10)(-2) = 13 - 20 = -7$

The sequence $is \langle -3, -5, -7 \rangle$

Q4/ Find the terms between u10 and u6 for an arithmetic sequence in which the second term is -11 and d = -3.

Sol./

$u_6 = -11 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad d = -3 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$-11 = a + (6-1)(-3) \quad \Rightarrow \quad -11 = a - 15 \quad \Rightarrow \quad a = -11 + 15 = 4$

$u_7 = 4 + (7-1)(-3) = 4 + (6)(-3) = 4 - 18 = -14$

$u_8 = 4 + (8-1)(-3) = 4 + (7)(-3) = 4 - 21 = -17$

$u_9 = 4 + (9-1)(-3) = 4 + (8)(-3) = 4 - 24 = -20$

The sequence $is \langle -14, -17, -20 \rangle$.

Q5/ Write 23rd term for the arithmetic sequence $\langle 3, -1, -5, -9, \dots \rangle$.

Sol./

$u_{23} = ?$, $n = 23$, $a = 3$, $d = -1 - 3 = -4$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_{23} = 3 + (23-1)(-4) = 3 + (22)(-4) = 3 - 88 = -85 \quad \Rightarrow \quad u_{23} = -85$

Q6/ Write the first five terms for each of the following sequences:

[1] $\{u_n\} = 4n$

Sol.

$u_1 = 4(1) = 4$, $u_2 = 4(2) = 8$, $u_3 = 4(3) = 12$

$u_4 = 4(4) = 16$, $u_5 = 4(5) = 20 \quad \Rightarrow$

The sequance is $\langle 4, 8, 12, 16, , 20 \rangle$

[2] $\{u_n\} = 2n - 5$

Sol./

$u_1 = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$, $u_2 = 2(2) - 5 = 4 - 5 = -1$

$u_3 = 2(3) - 5 = 6 - 5 = 1$, $u_4 = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3$

$u_5 = 2(5) - 5 = 10 - 5 = 5$

The sequance is $\langle -3, -1, 1, 3, 5 \rangle$

[3] $\{u_n\} = \dfrac{1}{n+1}$

Sol./

$u_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

$u_4 = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5}$, $u_5 = \dfrac{1}{5+1} = \dfrac{1}{6}$

The sequance $\left\langle \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6} \right\rangle$

[4] $\{u_n\} = 9$

Sol./

$u_1 = 9$, $u_2 = 9$, $u_3 = 9$, $u_4 = 9$, $u_5 = 9$

The sequance is $\langle 9, 9, 9, 9, 9 \rangle$

Solve the Exercises

Q1/ Write the first four ordered pairs for the sequence which its general term is given:

[1] $u_n = 10 - 4n$

Sol./

$u_1 = 10 - 4(1) = 10 - 4 = 6$, $u_2 = 10 - 4(2) = 10 - 8 = 2$

$u_3 = 10 - 4(3) = 10 - 12 = -2$, $u_4 = 10 - 4(4) = 10 - 16 = -6$

الأزواج المرتبة : $\{(1,6),(2,2),(3,-2),(4,-6)\}$

[2] $u_n = \dfrac{1}{3n+1}$

Sol./

$u_1 = \dfrac{1}{3(1)+1} = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$, $u_2 = \dfrac{1}{3(2)+1} = \dfrac{1}{6+1} = \dfrac{1}{7}$

$u_3 = \dfrac{1}{3(3)+1} = \dfrac{1}{9+1} = \dfrac{1}{10}$, $u_4 = \dfrac{1}{3(4)+1} = \dfrac{1}{12+1} = \dfrac{1}{13}$

الأزواج المرتبة : $\left\{\left(1,\frac{1}{4}\right),\left(2,\frac{1}{7}\right),\left(3,\frac{1}{10}\right),\left(4,\frac{1}{13}\right)\right\}$

Q2/An arithmetic sequence in which the seventh term is $\left(\frac{1}{24}\right)$ and the common difference is $\left(\frac{1}{3}\right)$

Sol./

$u_7 = \dfrac{1}{24}$, $n = 7$, $d = \dfrac{1}{3}$, $a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$\dfrac{1}{24} = a + (7-1)\left(\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{24} = a + 6 \times \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{24} = a + 2$

$a = \dfrac{1}{24} - 2 = \dfrac{1-48}{24} = \dfrac{-47}{24}$

The sequance is $\left\{\dfrac{-47}{24},\dfrac{-39}{24},\dfrac{-31}{24},\dfrac{-23}{24},\dfrac{-15}{24}\right\}$

Q3/ Write terms for the following sequences:

[1] Find the terms between u10 and u13 for an arithmetic sequence in which the seventh term is $\left(\frac{13}{2}\right)$ and d = 1 .

Sol./

$u_7 = \dfrac{13}{2}$, $n = 7$, $d = 1$, $a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$\dfrac{13}{2} = a + (7-1)(1) \Rightarrow \dfrac{13}{2} = a + 6$

$a = \dfrac{13}{2} - 6 = \dfrac{13-12}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$u_{11} = \frac{1}{2} + (11-1)(1) = \frac{1}{2} + 10 = \frac{1+20}{2} = \frac{21}{2}$$
$$u_{12} = \frac{1}{2} + (12-1)(1) = \frac{1}{2} + 11 = \frac{1+22}{2} = \frac{23}{2}$$

المتتابعة : $\left\{\frac{21}{2}, \frac{23}{2}\right\}$

[2] Find the terms between u20 and u23 for an arithmetic sequence in which the second term is (0) and d = -1

Sol./

$u_2 = 0 \quad , \quad n = 2 \quad , \quad d = -1 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$0 = a + (2-1)(-1) \quad \Rightarrow \quad 0 = a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$u_{21} = 1 + (21-1)(-1) = 1 + (20)(-1) = 1 - 20 = -19$

$u_{22} = 1 + (22-1)(-1) = 1 + (21)(-1) = 1 - 21 = -20 \quad \Rightarrow$

المتتابعة : $\{-19, -20\}$

Q4/ Determine the type of sequences (increasing, decreasing, constant) for each of the following:

[1] $\{u_n\} = \{3 - 2n\}$

Sol./

$u_1 = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1 \quad , \quad u_2 = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$

$d = u_2 - u_1 = -1 - 1 = -2$

the sequence is decreasing since $d < 0$:

[2] $\{u_n\} = \{n^3 - 1\}$

Sol./

$u_1 = (1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad , \quad u_2 = (2)^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

$d = u_2 - u_1 = 7 - 0 = 7$

the sequence is decreasing since $d > 0$.

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: رياضة الجري : في احدى مسابقات الجري سجلت أوقات الفائز الأول وفقا للجدول الآتي :

المسافة بالمتر	1	2	3	4	5
الوقت بالدقيقة والثانية	3.12	6.32	9.52	12.72	15.92

الحل

الأزواج المرتبة $\{(1,3.12),(2,6.32),(3,9.52),(4,12.72),(5,15.92)\}$

نعم يمثل نمطا لأن كل مسافة ناتجة من مقدار ثابت .

العلاقة تمثل متتابعة حسابية حدها الأول 3.12 وأساسها $d = 6.32 - 3.12 = 3.20$

المتتابعة هي : $\{3.12, 6.32, 9.52, 12.72, 15.92\}$

سؤال: رياضة القفز بالزانة : يبين الجدول التالي محاولات أحد أبطال العالم في رياضة القفز بالزانة.

الارتفاع بالمتر	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10

اكتب حدود المتتابعة وأساسها ؟

الحل

المتتابعة هي : $\{5.90,5.95,6.00,6.05,6.10\}$

أساس المتتابعة : $d = 5.90 - 5.95 = -0.5$

سؤال: زراعة : اشترى حسان مزرعة الأبقار فيها 20 بقرة وبدأت تزداد كل سنة نتيجة الولادات بمعدل ثابت حتى أصبح عدده الضعف بعد مضي ست سنوات مثل المسألة بجدول واكتب حدود المتتابعة.

الحل

$a = 20 \quad , \quad u_6 = 2a = 2(20) = 40 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad d = ?$

$u_n = a + (n-1)d \quad \Rightarrow \quad 40 = 20 + (6-1)d \quad \Rightarrow \quad 40 = 20 + 5d$

$5d = 40 - 20 \quad \Rightarrow \quad 5d = 20 \quad , \quad d = \frac{20}{5} = 4$

$u_1 = 20$

$u_2 = u_1 + d = 20 + 4 = 24 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = 24 + 4 = 28$

$u_4 = u_3 + d = 28 + 4 = 32 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = 32 + 4 = 36$

$u_6 = u_5 + d = 36 + 4 = 40$

السنة	1	2	3	4	5	6
عدد الأبقار	20	24	28	32	36	40

المتتابعة هي $\{20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

Think

Q1/ Challenge: Find the value of x which makes the first three terms of the arithmetic sequences as follow:

$$\{2x\,,x+1\,,3x+11,\dots\dots\dots.\}$$

الحل

$$d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$$
$$(x+1)-(2x) = (3x+11)-(x+1)$$
$$x+1-2x = 3x+11-x-1$$
$$-x+1 = 2x+10$$
$$2x+x = 1-10 \quad \Rightarrow \quad 3x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-9}{3} = -3$$

Q2/ Correct the mistake: Rabiha said that the sequence which general term is $u_n = 8-2n$, considered an increasing sequence because $d > 0$, discover the mistake of Rabiha and then correct it.

الحل

$$u_1 = 8-2(1) = 8-2 = 6 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 8-2(2) = 8-4 = 4$$
$$d = u_2 - u_1 = 4-6 = -2$$
$$\textit{The sequance is decreasing, because } d < 0$$

Q3/ Numerical sense: What is the eleventh term for a sequence in which the third term is (4) and the common difference is $-\frac{1}{2}$?

الحل

$$u_{11} = ? \quad n = 11 \quad , \quad u_3 = 4 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad d = -\frac{1}{2} \quad , \quad a = ?$$
$$u_n = a + (n-1)d$$
$$4 = a + (3-1)\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 4 = a + (2)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$4 = a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 4+1 = 5$$
$$u_{11} = 5 + (11-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 + (10)\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 - 5 = 0$$

Q4/ Write the term 200 in the arithmetic sequence which its fifth term is -4 and the common difference is 12.

الحل

$$u_{200} = ? \quad , \quad n = 200 \quad , \quad u_5 = -4 \quad , \quad n = 5 \quad , \quad d = 12 \quad , \quad a = ?$$
$$u_n = a + (n-1)d$$
$$u_5 = a + (5-1)(12) \quad \Rightarrow \quad -4 = a + (4)(12)$$
$$-4 = a + 48 \quad \Rightarrow \quad a = -4 - 48 = -52$$

$$u_{200} = -52 + (200-1)(12) = -52 + (199)(12) = -52 + 2388 = 2336$$

مراجعة الفصل

مثال 1 : أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$

[1] $u_n = \frac{1}{n}$

الحل

$u_1 = \frac{1}{1} = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$, $u_4 = \frac{1}{4}$, $u_5 = \frac{1}{5}$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$$

[2] $u_n = \frac{2n-1}{n}$

الحل

$u_1 = \frac{2(1)-1}{1} = 1$, $u_2 = \frac{2(2)-1}{2} = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{2(3)-1}{3} = \frac{5}{3}$, $u_4 = \frac{2(4)-1}{4} = \frac{7}{4}$

$u_5 = \frac{2(5)-1}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow \left\{\frac{2n-1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}\right\}$

تدريب 1 : أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

1) $\{u_n\} = 3n - 2$ **الحل :** $u_1 = 3(1) - 2 = 1$, $u_2 = 3(2) - 2 = 4$ $u_3 = 3(3) - 2 = 7$, $u_4 = 3(4) - 2 = 10$ $u_5 = 3(5) - 2 = 13$ **المتتابعة هي :** $\{1, 4, 7, 10, 13\}$	2) $\{u_n\} = (-2)^n$ **الحل** $u_1 = (-2)^1 = -2$, $u_2 = (-2)^2 = 4$ $u_3 = (-2)^3 = -8$, $u_4 = (-2)^4 = 16$ $u_5 = (-2)^5 = -32$ **المتتابعة هي :** $\{-2, 4, -8, 16, -32\}$

مثال 2 : أكتب الحدود الخمسة أولى لمتتابعة حسابية حدها السابع 6 وأساسها 3 ؟

الحل

$u_7 = 6$, $n = 7$, $d = 3$, $a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$6 = a + (7-1)(3)$

$6 = a + 18 \Rightarrow a = 6 - 18 = -12$

المتتابعة : $\{-12, -9, -6, -3, 0\}$

تدريب 2 : اكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية : $\{12, 6, 0, -6, -12, \cdots\cdots\}$

الحل

$u_{20} = ?\ ,n = 20\ ,a = 12\ ,d = 6 - 12 = -6$

$$u_n = a + (n-1)d$$
$$u_{20} = 12 + (20-1)(-6) = 12 + (19)(-6)$$
$$= 12 - 114 = -102$$

مراجعة الفصل

سؤال: جد الحدود بين U_3 و u_8 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{-3}{2}$ و $d = 2$

الحل

$u_2 = \frac{-3}{2}\ ,\ n = 2\ ,\ d = 2\ \ a = ?$

$$u_n = a + (n-1)d$$
$$u_2 = a + (2-1)(2) \Rightarrow \frac{-3}{2} = a + 2 \Rightarrow a = \frac{-3}{2} - 2 = \frac{-3-4}{2} = \frac{-7}{2}$$
$$u_4 = \frac{-7}{2} + (4-1)(2) = \frac{-7}{2} + 6 = \frac{-7+12}{2} = \frac{5}{2}$$
$$u_5 = \frac{-7}{2} + (5-1)(2) = \frac{-7}{2} + 8 = \frac{-7+16}{2} = \frac{9}{2}$$
$$u_6 = \frac{-7}{2} + (6-1)(2) = \frac{-7}{2} + 10 = \frac{-7+20}{2} = \frac{13}{2}$$
$$u_7 = \frac{-7}{2} + (7-1)(2) = \frac{-7}{2} + 12 = \frac{-7+24}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow \left\{\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right\}$$: المتتابعة

سؤال: جد الحدود بين U_4 و u_9 لمتتابعة حسابية حدها الثالث 6 و $d = -\frac{5}{2}$

الحل

$u_3 = 6\ \ ,\ \ n = 3\ \ ,\ \ d = -\frac{5}{2}\ \ ,\ \ a = ?$

$$u_n = a + (n-1)d$$
$$u_3 = a + (3-1)\left(-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow 6 = a + (2)\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$6 = a - 5 \Rightarrow a = 6 + 5 = 11$$
$$u_5 = 11 + (5-1)\left(-\frac{5}{2}\right) = 11 + (4)\left(-\frac{5}{2}\right) = 11 - 10 = 1$$
$$u_6 = 11 + (6-1)\left(-\frac{5}{2}\right) = 11 + (5)\left(-\frac{5}{2}\right) = 11 - \frac{25}{2} = \frac{22-25}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$u_7 = 11 + (7-1)\left(-\frac{5}{2}\right) = 11 + (6)\left(-\frac{5}{2}\right) = 11 - 15 = -4$$
$$u_8 = 11 + (8-1)\left(-\frac{5}{2}\right) = 11 + (7)\left(-\frac{5}{2}\right) = 11 - \frac{35}{2} = \frac{22-35}{2} = -\frac{13}{2}$$

المتتابعة $\left\{1, -\frac{3}{2}, -4, -\frac{13}{2}\right\}$

سؤال: حدد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي :

[1] $u_n = 9 - 3n$

الحل

$u_1 = 9 - 3(1) = 9 - 3 = 6$, $u_2 = 9 - 3(2) = 9 - 6 = 3$

$d = u_2 - u_1 = 3 - 6 = -3 \Rightarrow d < 0$ المتتابعة متناقصة لأن

[2] $u_n = n^2 - 2$

الحل

$u_1 = (1)^2 - 2 = -1$, , $u_2 = (2)^2 - 2 = 2$

$= u_2 - u_1 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

$d > 0$ المتتابعة متزايدة لأن

[3] $u_n = \frac{1}{3n+1}$

الحل

$u_1 = \frac{1}{3(1)+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{3(2)+1} = \frac{1}{6+1} = \frac{1}{7}$

$d = u_2 - u_1 = \frac{1}{7} - \frac{1}{4} = \frac{4-7}{28} = -\frac{3}{28} \Rightarrow d < 0$ المتتابعة متناقصة لأن

سؤال: اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

[1] $\left\{\frac{n}{n+2}\right\} = \cdots\cdots$

الحل

$u_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$

$u_4 = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $u_5 = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7} \Rightarrow \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}\right\}$: المتتابعة

[2] $\{4\sqrt{2}\} = \cdots\cdots$

الحل

$u_1 = 4\sqrt{2}$, $u_2 = 4\sqrt{2}$, $u_3 = 4\sqrt{2}$, $u_4 = 4\sqrt{2}$, $u_5 = 4\sqrt{2}$

المتتابعة: $\{4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$

[3] $\left\{\frac{n}{n+5}\right\} = \cdots\cdots$

الحل

$u_1 = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$, $u_2 = \frac{2}{2+5} = \frac{2}{7}$, $u_3 = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$, $u_4 = \frac{4}{4+5} = \frac{4}{9}$, $u_5 = \frac{5}{5+5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

المتتابعة : $\left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}\right\}$

الأختيار من متعدد

سؤال: أختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية :

[1] $\{u_n\} = 5n - 2$

a) $\{2, 6, 12, 16, 20\}$ b) $\{3, 8, 13, 18, 23.\}$

c) $\{4, 8, 12, 18, 22\}$ d) $\{5, 10, 16, 20, 2\}$

الحل

$u_1 = 5(1) - 2 = 3$, $u_2 = 5(2) - 2 = 8$

$u_3 = 5(3) - 2 = 13$, $u_4 = 5(4) - 2 = 18$

$u_5 = 5(5) - 2 = 23$

المتتابعة هي : $\{3, 8, 13, 18, 23.\}$

الجواب فرع : (b)

[2] $\{u_n\} = \frac{n}{2} + 1$

a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right\}$ b) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right\}$

c) $\left\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$ d) $\left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$

الحل

$u_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$

$u_3 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$, $u_4 = \frac{4}{2} + 1 = 2 + 1 = 3$

$u_5 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$

المتتابعة هي : $\left\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$

الجواب فرع : (c)

[3] $\{u_n\} = \frac{-1}{2+n}$

a) $\left\{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}\right\}$ b) $\left\{\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{7}\right\}$ c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$ d) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$

الحل

$u_1 = \frac{-1}{2+1} = \frac{-1}{3}$, $u_2 = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$

$u_3 = \frac{-1}{2+3} = \frac{-1}{5}$, $u_4 = \frac{-1}{2+4} = \frac{-1}{6}$

$u_5 = \frac{-1}{2+5} = \frac{-1}{7}$

المتتابعة هي : $\left\{\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{7}\right\}$

الجواب فرع : (b)

سؤال: اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الأتية :

[5] متتابعة حسابية الحد الثالث فيها (-8) وأساسها 2

a) $\{-14, -12, -10, -8, -6\}$ b) $\{-12, -10, -8, -6, -4\}$

c) $\{-10, -8, -6, -4, -2\}$ d) $\{-8, -6, -4, -2, 0\}$

الحل :

$u_3 = -8 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad d = 2 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_3 = a + (3-1)(2) \Rightarrow -8 = a + (2)(2)$

$-8 = a + 4 \Rightarrow a = -8 - 4 = -12$

المتتابعة هي : $\{-12, -10, -8, -6, -4\}$

الجواب فرع : (b)

[4] متتابعة حسابية الحد الثاني فيها 3 وأساسها 3

a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$ b) $\{2, 5, 8, 11, 14\}$

c) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ d) $\{1, 4, 7, 10, 13\}$

الحل :

$u_2 = 3 \quad , \quad n = 2 \quad , \quad d = 3 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_2 = a + (2-1)(3) \Rightarrow$

$3 = a + (1)(3)$

$3 = a + 3 \Rightarrow a = 3 - 3 = 0$

المتتابعة هي : $\{0, 3, 6, 9, 12\}$

الجواب فرع : (a)

[7] جد الحدود بين u_2 و u_6 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{9}{5}$ واساسها 2

a) $\left\{\frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{29}{2}\right\}$ b) $\left\{\frac{19}{2}, \frac{29}{2}, \frac{39}{2}\right\}$

c) $\left\{\frac{9}{5}, \frac{19}{5}, \frac{29}{5}\right\}$ d) $\left\{\frac{19}{5}, \frac{29}{5}, \frac{39}{5}\right\}$

الحل :

$u_n = a + (n-1)d$

$u_2 = \frac{9}{5} \quad , \quad n = 2 \quad , \quad a = ? \quad , \quad d = 2$

$u_2 = a + (2-1)(2)$

$\frac{9}{5} = a + 2$

$a = \frac{9}{5} - 2 = \frac{9-10}{5} = \frac{-1}{5}$

$u_3 = \frac{-1}{5} + (3-1)(2) = \frac{-1}{5} + 4 = \frac{-1+20}{5} = \frac{19}{5}$

$u_4 = \frac{-1}{5} + (4-1)(2) = \frac{-1}{5} + 6 = \frac{-1+30}{5} = \frac{29}{5}$

$u_5 = \frac{-1}{5} + (5-1)(2) = \frac{-1}{5} + 8 = \frac{-1+40}{5} = \frac{39}{5}$

المتتابعة هي: $\left\{\frac{19}{5}, \frac{29}{5}, \frac{39}{5}\right\}$

الجواب فرع : (d)

[6] جد الحد التاسع والحد الخامس عشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الثاني 2 وأساسها 2

a) $u_9 = 12 , u_{15} = 20$

b) $u_9 = 14 , u_{15} = 24$

c) $u_9 = 16 , u_{15} = 28$

d) $u_9 = 18, u_{15} = 32$

الحل :

$u_2 = 2 \quad , \quad n = 2 \quad , \quad d = 2 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_2 = a + (2-1)(2) \Rightarrow 2$

$= a + (1)(2)$

$2 = a + 2 \Rightarrow a = 2 - 2 = 0$

$u_9 = 0 + (9-1)(2) = (8)(2)$

$= 16$

$u_{15} = 0 + (15-1)(2)$

$= (14)(2) = 28$

الجواب فرع : (c)

Lesson [1-4] Compound Inequalities

(1) Compound inequalities which contain “and”

The compound inequalities which contain the connecting tool “and” and how to find their solution set and how to represent them in the line of the real numbers. As the compound inequality contains the connecting tool “and” and it consists of two inequalities, so it will be true only when the two inequalities are true.
According to that, its solution set will be a set of intersection for solution of the two inequalities. We can do that by two methods, the first is graphically by representing the solution of the two inequalities in the line of numbers and then determine the intersection area. The second method is algebraically by finding the solution set for each inequality, then take their intersection set$(S = S_1 \cap S_2)$.

ملاحظـــة : تحتوي المتباينة على الرمز $\geq , \leq , > , <$

طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و)

1) التخلص من الكسور والأقواس أن وجدت .
2) وضع المتغير في الوسط .
3) اذا كان هناك عدد مع المتغير تفصل بينهما عملية الجمع أو الطرح فنقوم بنقل العدد الى طرفي المتباينة مع تغير الإشارة .
4) اذا كان المتغير يحتوي على معامل فنقوم بقسمة اطراف المتباينة على معامل المتغير .
5) نجد مجموعة حل المتباينة المركبة وذلك بطريقتين :

الطريقة الأولى (بيانيا)

- تتم تجزئة المتباينة الى جزئين ونحل كل جزء على حدة ونستخرج مجموعة الحل ومجموعة حل الجزء الاخر
- نجد تقاطع مجموعة الحلين على خط الأعداد حيث أن التقاطع يمثل مجموعة حل المتباينة المركبة.

الطريقة الثانية (جبريا)

- هو أن الجزء الأول من المتباينة يرمز له S_1 والجزء الثاني يرمز لهS_2 ومنها نجد $S = S_1 \cap S_2$

■ عند ضرب أو قسمة اطراف المتباينة المركبة على عدد سالب فأن الترتيب يتغير (تقلب رموز المتباينة) .
■ اذا كانت المتباينة المركبة تحتوي على رمز $\leq$ أو $\geq$ فأن التمثيل على خط الأعداد يكون بفجوة ممتلئة بالصورة ( ) أي أن العدد داخل ضمن الفترة . أما اذا كانت المتباينة المركبة تحتوي على الرمز $>$ أو $<$ فأن التمثيل على خط الأعداد يكون بفجوة فارغة بالصورة ( ) أي أن العدد غير داخل ضمن الفترة

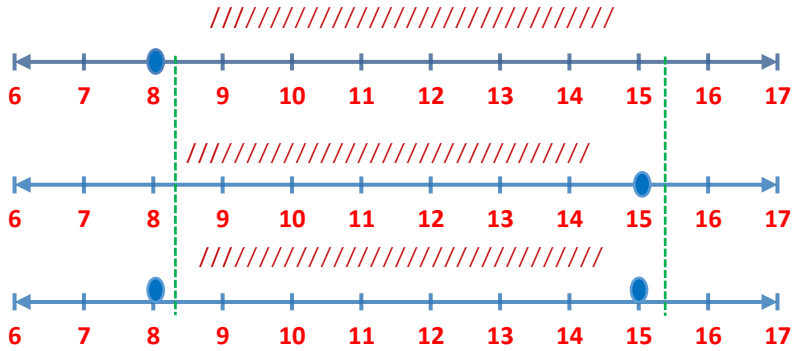
Ex./1) Write the compound inequality which represents the small and big celsius temperatures in Baghdad, then find its solution. The temperature (minimum) is not less than $8°C$ ($8 \le x$), while the temperature (maximum) is not greater than $15°C$ ($x \le 15$). The temperature is not less than $8°C$ and not greater than $15°C$ ($8 \le x$ and $x \le 15$). It can be solved in any of the two methods:

Sol./

درجة الحرارة (الصغرى) لا تقل عن 8° : $(x \ge 8^\circ)$, درجة الحرارة (الكبرى) لا تزيد عن 15° : $(x \le 15^\circ)$

The first method : graphically

$x \ge 8$
$x \le 15$
$8 \le x \le 15$



The second method: Algebraically :

$8 \le x \le 15 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 8$ و $x \le 15$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \ge 8\} \cap \{x : x \le 15\}$

Ex./2) Solve the compound inequality which contains (and) $-3 \le 3x + 2 < 9$ algebraically, then represent the solution on the straight line of numbers.

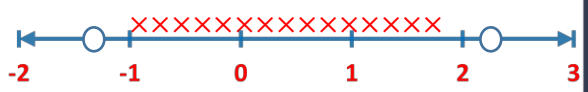
Sol./

$-3 \le 3x + 2 < 9 \quad \Rightarrow \quad -3 - 2 \le 3x < 9 - 2$

$-5 \le 3x < 7 \ \} \div 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-5}{3} \le \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$

$\frac{-5}{3} \le x < \frac{7}{3} \quad \Rightarrow$

$S = \left\{ x : \frac{-5}{3} \le x < \frac{7}{3} \right\}$



(2) Compound inequalities which contain "or"

Accordingly its solution set is a set of the two qualities solution union. It can be found in two methods, first graphically by representing the two inequalities solution in the line of numbers, then determining union area. Second method, algebraically by finding the solution set for each inequality, then taking their union set ($S = S_1 \cup S_2$).

Ex./3) Solve the compound inequality $x + 3 \le -2$ or $x + 3 > 2$ graphically and algebraically.

Sol./

First method: graphically:

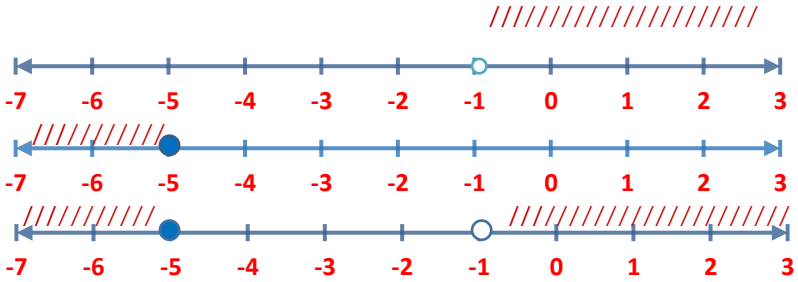
$x + 3 > 2 \Rightarrow \quad x > 2 - 3$

$x > -1$

$x + 3 \le -2 \Rightarrow x \le -2 - 3$

$x \le -5$

$x \le -5$ أو $x > -1$



Second method: algebraically

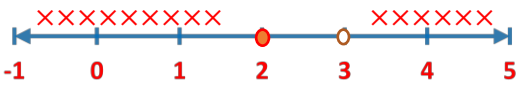
$x + 3 \le -2$ أو $x + 3 > 2$

$x \le -2 - 3$ أو $x > 2 - 3$

$x \le -5$ أو $x > -1 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > -1\} \cup \{x : x \le -5\}$

Ex./4) Solve the compound inequality which contains (or) algraphically and represent the solution on the line of numbers.

1) $y - 3 \le -1$ أو $y + 3 > 6$



SOL :

$y \le -1 + 3$ أو $y > 6 - 3 \quad \Rightarrow \quad y \le 2$ أو $y > 3$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \le 2\} \cup \{y : y > 3\}$

2) $\frac{2v + 1}{3} > \frac{5}{3}$ أو $\frac{2v + 1}{3} < \frac{1}{3}$ $\} \times 3$

SOL:

$\frac{2v + 1}{3} \times 3 > \frac{5}{3} \times 3$ أو $\frac{2v + 1}{3} \times 3 < \frac{1}{3} \times 3$

$2v + 1 > 5$ أو $2v + 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2v > 5 - 1$ أو $2v < 1 - 1$

$2v > 5 - 1$ أو $2v < 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad 2v > 4$ أو $2v < 0$

$\frac{2v}{2} > \frac{4}{2}$ أو $\frac{2v}{2} < \frac{0}{2}$

$v > 2$ أو $v < 0$

$S = S_1 \cup S_2 = \{v : v > 2\} \cup \{v : v < 0\}$

Triangular Inequality

One of the subjects which connects algebra to geometry is the triangular inequality "in each triangle, the sum of two sides length is greater than the length of the third side" , it is used in the geometrical constructions and designs. If the lengths side of a triangle is (A , B , C), then the following three inequalities should be true :

$$A + B > C \quad , \quad A + C > B \quad , \quad B + C > A$$

Ex./1) Can the three sides of a triangle with length 13cm ,10cm and 2cm compose a triangle ?

Sol./

No, they can't because:

$2 + 10 \ngtr 13 \quad \Rightarrow \quad 12 \ngtr 13$ 12 أصغر من 13

$2 + 13 > 10 \quad \Rightarrow \quad 15 > 10$ its true

$10 + 13 > 2 \quad \Rightarrow \quad 23 > 2$ its true

لا يمكن أن يشكل مثلثا .

Ex./2) Write a compound inequality which shows the length of the third side in a triangle which has two sides with length 8cm and 10cm.

Sol./

Suppose that the length of the third side is x, then:

$10 + 8 > x \quad \Rightarrow \quad 18 > x$ $\Rightarrow$ The third side is less than 18

$10 + x > 8 \quad \Rightarrow \quad x > 8 - 10 \quad \Rightarrow \quad x > -2$ $\Rightarrow$ Doesn't give any useful data

$8 + x > 10 \quad \Rightarrow \quad x > 10 - 8 \quad \Rightarrow \quad x > 2$ $\Rightarrow$ The third side is greater than 2

So the length of this side must be less than18 and greater than 2 and by the compound inequality, we see that the range of the third side length is $2 < x < 18$ *or can writtne by* $18 > x > 2$

Make sure of your understanding

Q1/ Solve the compound inequalities which include (and) graphically:

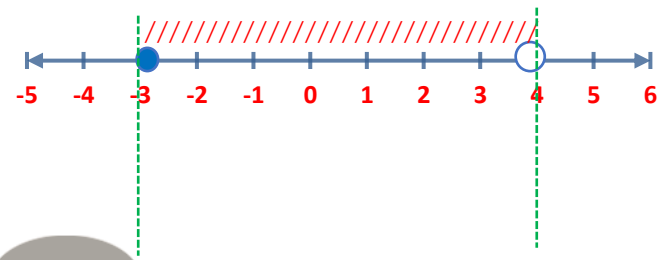
1) $-4 \le y - 1 < 3$

$-4 + 1 \le y < 3 + 1 \quad \Rightarrow \quad -3 \le y < 4$

$y < 4$

$y \ge -4$

$-3 \le y < 4$



2) $-4 \le Z + 2 \le 8$

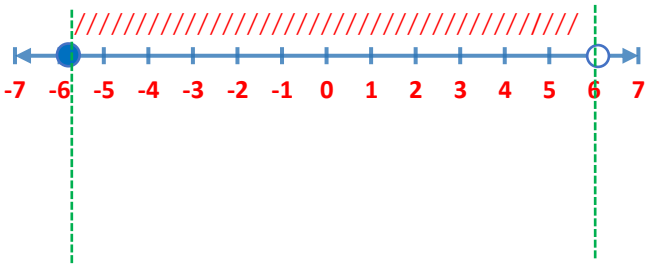
الحل :

$-4 - 2 \le Z < 8 - 2 \implies -6 \le Z < 6$

$Z < 6$

$Z \ge -6$

$-6 \le Z < 6$



Q2/ Solve the compound inequalities which include (and) algebraically, then represent the solution set on the line of numbers:

1) $x + 6 \ge 12$ و $x + 6 < 15$

SOL./

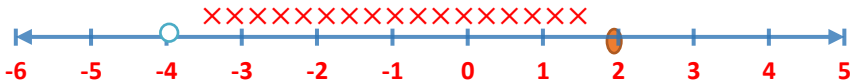
$x \ge 12 - 6$ و $x < 15 - 6 \implies x \ge 6$ و $x < 9$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \ge 6\} \cap \{x: x < 9\} = \{x : 6 \le x < 9\}$

2) $-9 < 2x - 1 \le 3$

SOL : $-9 + 1 < 2x \le 3 + 1 \implies -8 < 2x < 4 \quad \} \div 2$

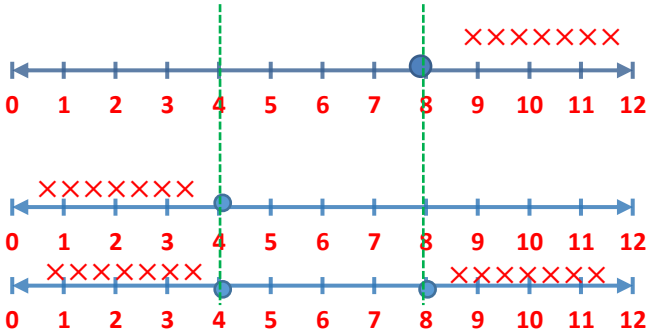
$\frac{-8}{2} < \frac{2x}{2} \le \frac{4}{2} \implies -4 < x \le 2 \implies S = \{x : -4 < x \le 2\}$



Q3/ Solve the compound inequalities which includes (or) graphically:

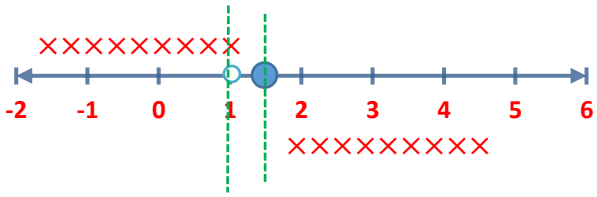
3) $8y \ge 64$ أو $8y \le 32 \quad \} \div 8$

الحل :



4) $\frac{2Z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2Z}{3} \geq \frac{8}{9}$

الحل :



$\frac{2Z}{3} < \frac{2}{3} \} \times 3 \Rightarrow 2Z < 2 \} \div 2 \Rightarrow$
$Z < 1$

$\frac{2Z}{3} \geq \frac{8}{9} \} \times 9 \Rightarrow 6Z \geq 8 \} \div 6 \Rightarrow$
$Z \geq \frac{8}{6}$

$Z \geq \frac{4}{3} \Rightarrow Z < 1$ Or $Z \geq \frac{4}{3}$

5) $3n - 7 > -5$ أو $3n - 7 \leq -9$

الحل :

$3n > -5 + 7$ أو $3n \leq -9 + 7$

$3n > 2$ أو $3n \leq -2 \Rightarrow \frac{3n}{3} > \frac{2}{3}$ أو $\frac{3n}{3} \leq \frac{-2}{3}$

$n > \frac{2}{3}$ أو $n \leq \frac{-2}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{n : n > \frac{2}{3}\right\} \cup \left\{n : n \leq \frac{-2}{3}\right\}$

6) $x + 15 \geq 30$ أو $x + 15 < 22$

الحل :

$x \geq 30 - 15$ أو $x < 22 - 15$

$x \geq 15$ أو $x < 7$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 15\} \cup \{x : x < 7\}$

Q4/ Can the three sides, which shown below, compose a triangle?

1) 1 cm , 2cm , $\sqrt{3}$ cm

الحل

$1 + 2 > \sqrt{3} \Rightarrow 3 > \sqrt{3}$ صحيحة

$1 + \sqrt{3} > 2 \Rightarrow 1 + 1.7 > 2 \Rightarrow 2.7 > 2$ صحيحة

$2 + \sqrt{3} > 1 \Rightarrow 2 + 1.7 > 1 \Rightarrow 3.7 > 1$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

2) 5cm , 4cm , 9cm

الحل

لم تحقق شرط المثلث

$5+4 \not> 9 \Rightarrow 9 \not> 9$ خطأ لأن 9 ليس أكبر من 9

$5+9>4 \Rightarrow 14>4$ صحيحة

$4+9>5 \Rightarrow 13>5$ صحيحة $\Rightarrow$ لا يمكن رسم مثلثاً

3) 1cm , $\sqrt{2}$cm , $\sqrt{2}$cm

الحل

$1+\sqrt{2}>\sqrt{2}$ صحيحة لأن $\sqrt{2}=1.4$

$\sqrt{2}+\sqrt{2}>1$ صحيحة

$\sqrt{2}+1>\sqrt{2}$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

4) 3cm , 4cm , $\sqrt{3}$cm

الحل

$3+4>\sqrt{3} \Rightarrow 7>\sqrt{3}$ صحيحة لأن $\sqrt{3}=1.7$

$3+\sqrt{3}>4 \Rightarrow 3+1.7>4 \Rightarrow 4.7>4$ صحيحة

$4+\sqrt{3}>3 \Rightarrow 4+1.7>3 \Rightarrow 5.7>3$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

Solve the Exercises

Q1/ Solve the compound inequalities which include (and) graphically

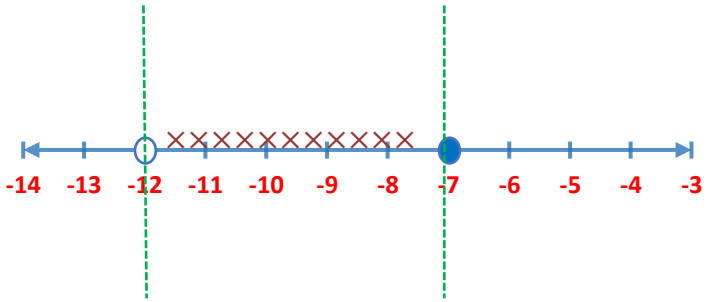
1) $x>-12$ و $x\le -7$

الحل :

$x>-12$

$x\le -7$

$x>-12$ و $x\le -7$



2) $2 \le y + 4 < 6$

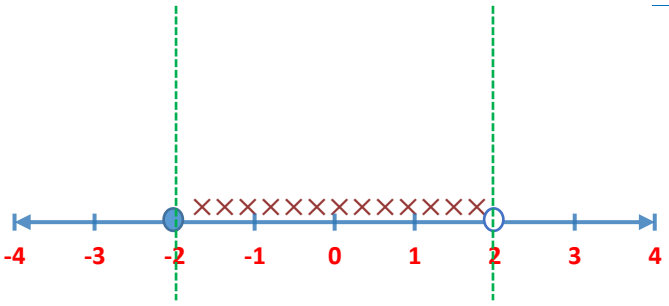
الحل :

$2 - 4 \le y < 6 - 4 \Rightarrow -2 \le y < 2$

$y \ge -2$

$y < 2$

$-2 \le y < 2$



Q2/ Solve the compound inequalities which include (and) algebraically, then represent the solution set on the line of numbers:

1) $14 \le 3x + 7$ و $3x + 7 < 26$

الحل

$14 - 7 \le 3x$ و $3x < 26 - 7$

$7 \le 3x$ و $3x < 19 \} \div 3$

$\frac{7}{3} \le \frac{3x}{3}$ و $\frac{3x}{3} < \frac{19}{3}$

$\frac{7}{3} \le x$ و $x < \frac{19}{3} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \left\{x : \frac{7}{3} \le x\right\} \cap \left\{x : x < \frac{19}{3}\right\}$

2) $\frac{1}{25} \le \frac{Z+3}{5} \le \frac{1}{15} \} \times 75$

الحل

$\frac{1}{15} \times 75 \ge \frac{Z+3}{5} \times 75 \ge \frac{1}{25} \times 75$

$5 \ge 15(Z+3) \ge 3 \Rightarrow 5 \ge 15Z + 45 \ge 3 \Rightarrow 5 - 45 \ge 15Z \ge 3 - 45$

$-40 \ge 15Z \ge -42 \} \div 15 \Rightarrow \frac{-40}{15} \ge \frac{15Z}{15} \ge \frac{-42}{15}$

$\frac{-8}{3} \ge Z \ge \frac{-14}{5} \Rightarrow S = \left\{Z : \frac{-8}{3} \ge Z \ge \frac{-14}{5}\right\}$

5	15 , 5 , 25
5	3 , 1 , 5
3	3 , 1 , 1
75	1 , 1 , 1

Q3/ Solve the compound inequalities which includes (or) graphically:

1) $Z - 2 < -7$ أو $Z - 2 > 4$

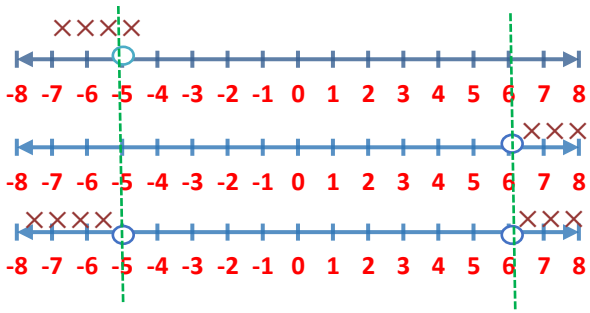
الحل :

$Z < -7 + 2$ أو $Z > 4 + 2 \Rightarrow Z < -5$ أو $Z > 6$

$Z < -5$

$Z > 6$

$Z < -5$ أو $Z > 6$



2) $x - 6 \le -1$ أو $x - 6 > 4$

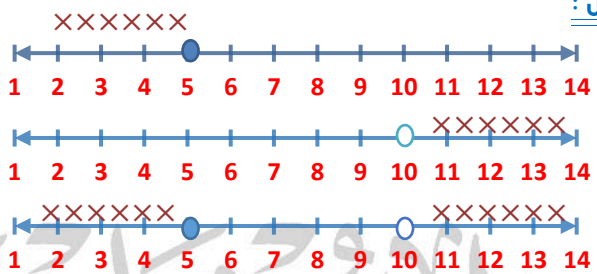
الحل :

$x \le -1 + 6$ أو $x > 4 + 6 \Rightarrow x \le 5$ أو $x > 10$

$x \le 5$

$x > 10$

$x \le 5$ أو $x > 10$



Q4/ Solve the compound inequalities which include (or) algebraically, then represent the solution set on the line of numbers:

1) $x + 8 < 22$ أو $x + 10 \ge 30$

الحل

$x < 22 - 8$ أو $x \ge 30 - 10$

$x < 14$ أو $x \ge 20$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x < 14\} \cup \{x : x \ge 20\}$

2) $y < -1$ أو $y + 3 > 2$

الحل

$y < -1$ أو $y > 2 - 3$

$y < -1$ أو $y > -1$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < -1\} \cup \{y : y > -1\}$

3) $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{2}$ أو $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$

الحل

$\frac{y}{2} < \frac{7}{2}$ أو $\frac{y}{2} > \frac{15}{2}$ $\}\times 2$

$y < 7$ أو $y > 15$

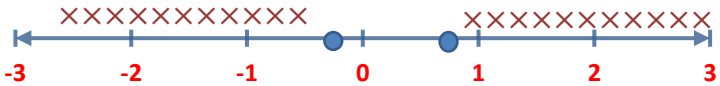
$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < 7\}$
$\cup \{y : y > 15\}$

4) $5x \le -1$ أو $5x \ge 4$ $\}\div 5$

الحل

$x \le \frac{-1}{5}$ أو $x \ge \frac{4}{5}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \le \frac{-1}{5}\right\}$
$\cup \left\{x : x \ge \frac{4}{5}\right\}$



Q5/ Write the compound inequality which shows the length of the third side in the triangle which has two known-length sides:

1) 3cm , 10cm

Sol./

Let the third length is X

$3 , 10 , x$ اطوال اضلاع المثلث

$3 + 10 > x \Rightarrow 13 > x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$10 + x > 3 \Rightarrow x > 3 - 10 \Rightarrow x > -7$ لا يعطي معلومات مفيدة

$3 + x > 10 \Rightarrow x > 10 - 3 \Rightarrow x > 7$ الضلع الثالث اكبر من 7

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 13$

2) 6cm , 4cm

Sol./

Let the third length is X

$6 , 4 , x$ اطوال اضلاع المثلث

$6 + 4 > x \Rightarrow 10 > x$ الضلع الثالث أصغر من 10

$6 + x > 4 \Rightarrow x > 4 - 6 \Rightarrow x > -2$ لا يعطي معلومات مفيدة

$4 + x > 6 \quad \Rightarrow \quad x > 6 - 4 \quad \Rightarrow \quad x > 2$ الضلع الثالث اكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 10$

3) 1cm , 3cm

Sol./

Let the third length is X

اطوال اضلاع المثلث $1 , 3 , x$

$1 + 3 > x \quad \Rightarrow \quad 4 > x$ الضلع الثالث أصغر من 4

$3 + x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > 1 - 3 \quad \Rightarrow \quad x > -2$ لا يعطي معلومات مفيدة

$1 + x > 3 \quad \Rightarrow \quad x > 3 - 1 \quad \Rightarrow \quad x > 2$ الضلع الثالث اكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 4$

Solve the problems

Q1/ Sound: Human's ear can hear sound which its frequency is not less than 20 Hz and not more than 20000 Hz. Write a compound inequality represents the frequencies which human's ear can not hear them, then represent on line of numbers.

الحل

نفرض التردد x

الترددات التي تسمعها أذن الأنسان هي أكبر أو يساوي 20 وأصغر أو يساوي 20000 تكتب $20 \le x \le 20000$

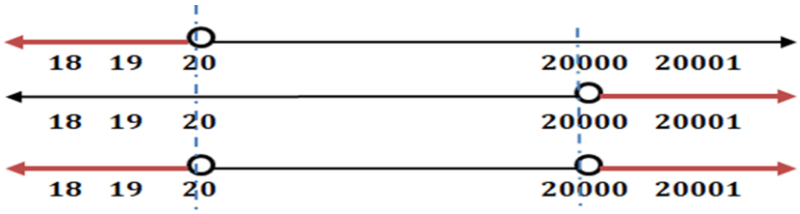
الترددات التي لا تسمعها أذن الأنسان هي أصغر من 20 واكبر من 20000 وتكتب :

$x < 20$ أو $x > 20000$

$x < 20$

$x > 20000$

$x < 20$ أو $x > 20000$



سؤال: أطار السيارات :ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لا يقل عن 28 pascal (kg/ing^2) ولا يزيد على 36 pascal . اكتب المتباينة المركبة تمثل الضغط ومثلها بيانيا؟

الحل

نفرض الضغط x

$28 \le x$

≤ 36 المتباينة المركبة

$x \ge 28$

$x \le 36$

$28 \le x \le 36$

Q2/ Cars tyre: The ideal air pressure which is recommended for tyres of saloon cars is not less than 28 pascal (kg/ ing2) and not more than 36 pascal. Write a compound inequality which represents the pressure, then represent on line of numbers.

Cars tyre: The ideal air pressure which is recommend

Note: Pascal is unit for measuring the pressure of air which is Kg ling2

الحل

نفرض سرعة القطار x

$300 \le x \le 550$ المتباينة

$x \ge 300$

$x \le 550$

$300 \le x \le 550$

Think

Q1/ Challenge: Write a compound inequality shows the range of the third side length in each triangle:

i) 7cm , 12cm , xcm

الحل

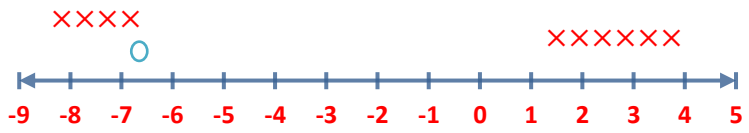
$7 + 12 > x \Rightarrow 19 > x$ الضلع الثالث أصغر من 19

$12 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 12 \Rightarrow x > -5$ لا تعطي معلومات مفيدة

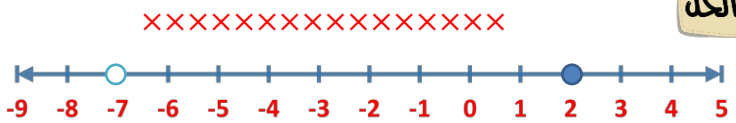
$7 + x > 12 \Rightarrow x > 12 - 7 \Rightarrow x > 5$ الضلع الثالث اكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5 < x < 19$

سؤال: أصحح الخطأ : قالت سوسن أن المتباينة المركبة $x + 3 \leq 5$ و $-4 < x + 3$ تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد الآتية : بين خطأ سوسن وصححه



الحل



$-4 - 3 < x$ و $x \leq 5 - 3$

$-7 < x$ و $x \leq 2$

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x > -7\} \cap \{x : x \leq 2\} = \{x : -7 < x \leq 2\}$$

سؤال: حس عددي : اذكر ما اذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا ؟ وضح اجابتك .

1) $3.2cm$, $5.2cm$, $6.2cm$

الحل

$3.2 + 5.2 > 6.2 \Rightarrow 8.4 > 6.2$ صحيحة

$3.2 + 6.2 > 5.2 \Rightarrow 9.4 > 5.2$ صحيحة

$5.2 + 6.2 > 3.2 \Rightarrow 11.4 > 3.2$ صحيحة $\Rightarrow$ الأطوال الثلاثة تمثل مثلث

2) $1cm$, $1cm$, $\sqrt{2}\,cm$

الحل

$1 + 1 > \sqrt{2} \Rightarrow 2 > \sqrt{2}$ صحيحة لأن $\sqrt{2} = 1.4$

$1 + \sqrt{2} > 1 \Rightarrow 1 + 1.4 > 1 \Rightarrow 2.4 > 1$ صحيحة

$\sqrt{2} + 1 > 1 \Rightarrow 1.4 + 1 > 1 \Rightarrow 2.4 > 1$ صحيحة $\Rightarrow$ الأطوال الثلاثة تمثل مثلث

سؤال: أكتب : متباينة مركبة تمثل درجة الحرارة الصغرى $18°$ ودرجة الحرارة العظمى $27°$

الحل

نفرض درجة الحرارة x

$$x > 18° \quad و \quad x < 27° \Rightarrow S = \{x : 18° < x < 27°\}$$

مراجعة الفصل

تدريب1: حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد :

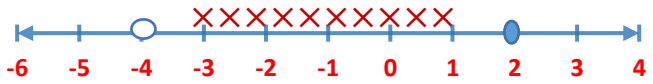
$-9 < 2x - 1 \leq 3$

الحل

$-9 + 1 < 2x \leq 3 + 1 \quad \Rightarrow \quad -8 < 2x$

$\leq 4 \ \} \div 2$

$-4 < x \leq 2 \ \Rightarrow \ S = \{x : \ -4 < x \leq 2\}$



تدريب2: حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد

$2y - 6 > -3$ أو $2y - 6 \leq -7$

الحل

$2y > -3 + 6$ أو $2y \leq -7 + 6$

$2y > 3$ أو $2y \leq -1 \ \} \div 2$

$y > \frac{3}{2}$ أو $y \leq \frac{-1}{2}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y > \frac{3}{2}\right\}$

$\cup \left\{y : y \leq \frac{-1}{2}\right\}$

مثال 1: حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد :

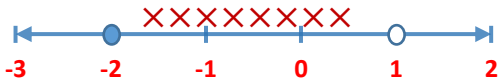
$2x - 2 \geq -6$ و $2x - 2 < 0$

الحل

$2x \geq -6 + 2$ و $2x < 0 + 2 \ \Rightarrow \ 2x \geq -4$ و $2x \leq 2 \ \} \div 2$

$x \geq -2$ و $x < 1$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : \ x \geq -2\} \cap \{x : x < 1\}$



مثال 2: حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد :

$x + 1 > 3$ أو $x + 1 < -4$

الحل

$x > 3 - 1$ أو $x \leq -4 - 1$

$x > 2$ أو $x \leq -5$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2\} \cup \{x : x \leq -5\}$

أختبار الفصل

سؤال : حل المتباينات المركبة ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

1) $x + 6 \geq 12$ و $x + 6 < 20$

الحل

$x \geq 12 - 6$ و $x < 20 - 6$

$x \geq 6$ و $x < 14$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 6\} \cap \{x : x < 14\}$

2) $\frac{1}{16} < \frac{Z+2}{2} \leq \frac{1}{8}$ $\} \times 16$

الحل

$1 < 8(Z+2) \leq 2 \Rightarrow 1 < 8Z + 16 \leq 2$

$1 - 16 < 8Z \leq 2 - 16 \Rightarrow -15 < 8Z \leq -14$

$\frac{-15}{8} < \frac{8Z}{8} \leq \frac{-14}{8} \Rightarrow \frac{-15}{8} < Z \leq \frac{-7}{4} \Rightarrow S = \left\{Z : \frac{-15}{8} < Z \leq \frac{-7}{4}\right\}$

3) $x - 3 \leq -5$ أو $x - 3 > 5$

الحل

$x \leq -5 + 3$ أو $x > 5 + 3$

$x \leq -2$ أو $x > 8$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \leq -2\} \cup \{x : x > 8\}$

4) $7t - 5 > -1$ أو $7t - 5 \leq -14$

الحل

$7t > -1 + 5$ أو $7t \leq -14 + 5$

$7t > 4$ أو $7t \leq -9$ $\} \div 7$

$t > \frac{4}{7}$ أو $t \leq \frac{-9}{7} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{t : t > \frac{4}{7}\right\} \cup \left\{t : t \leq \frac{-9}{7}\right\}$

5) $y \le 0$ أو $y + 7 \ge 16$

الحل

$y \le 0$ أو $y \ge 16 - 7$

$y \le 0$ أو $y \ge 9 \quad \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \le 0\} \cup \{y : y \ge 9\}$

6) $\frac{y}{3} < 1\frac{1}{3}$ أو $\frac{y}{3} > 9\frac{1}{3}$

الحل

$\frac{y}{3} < \frac{4}{3}$ أو $\frac{y}{3} > \frac{28}{3}$ $\Big] \times 3$

$y < 4$ أو $y > 28$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < 4\}$
$\cup \{y : y > 28\}$

سؤال: اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث اذا كان طولا ضلعي مثلث معلومين

1) 4cm , 9cm

الحل

نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث $4, 9, x$

$4 + 9 > x \quad \Rightarrow \quad 13 > x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$9 + x > 4 \quad \Rightarrow \quad x > 4 - 9 \quad \Rightarrow \quad x > -5$ لا يعطي معلومات مفيدة

$4 + x > 9 \quad \Rightarrow \quad x > 9 - 4 \quad \Rightarrow \quad x > 5$ الضلع الثالث اكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5 < x < 13$

2) 5cm , 12cm

الحل

نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث $5, 12, x$

$5 + 12 > x \quad \Rightarrow \quad 17 > x$ الضلع الثالث أصغر من 17

$12 + x > 5 \quad \Rightarrow \quad x > 5 - 12 \quad \Rightarrow \quad x > -7$ لا يعطي معلومات مفيدة

$5 + x > 12 \quad \Rightarrow \quad x > 12 - 5 \quad \Rightarrow \quad x > 7$ الضلع الثالث اكبر من 7

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 17$

3) 7cm , 15cm

الحل

نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث $7, 15, x$

$7 + 15 > x \Rightarrow 22 > x$ الضلع الثالث أصغر من 22

$15 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 15 \Rightarrow x > -8$ لا يعطي معلومات مفيدة

$7 + x > 15 \Rightarrow x > 15 - 57 \Rightarrow x > 8$ الضلع الثالث اكبر من 8

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $8 < x < 22$

الاختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا :

[1] $-10 < x$ و $x \le -2$

a) $\{x: -10 \le x\} \cap \{x: x \le -2\}$
b) $\{x: -10 < x\} \cap \{x: x \le -2\}$
c) $\{x: -10 \le x\} \cup \{x: x \le -2\}$
d) $\{x: -10 < x\} \cup \{x: x \le -2\}$

الحل :

$S = S_1 \cap S_2 = \{x: -10 < x\} \cap \{x: x \le -2\}$

الجواب فرع : (b)

[2] $0 \le y - 3$ و $y - 3 < 12$

a) $\{y: 3 < y < 15\}$ b) $\{y: -3 \le y \le 15\}$
c) $\{y: 3 \le y < 15\}$ d) $\{y: -3 < y < 15\}$

الحل :

$0 + 3 \le y$ و $y < 12 + 3 \Rightarrow 3 \le y$ و $y < 15$

$S = S_1 \cap S_2 = \{y : 3 \le y\} \cap \{y : y < 15\}$
$= \{y : 3 \le y < 15\}$

الجواب : (c)

[3] $16 < 3Z + 9$ و $3Z + 9 < 30$

a) $\left\{Z : \frac{3}{7} \le Z < 7\right\}$ b) $\left\{Z : \frac{7}{3} < Z \le 7\right\}$
c) $\left\{Z : \frac{3}{7} < Z < 7\right\}$ d) $\left\{Z : \frac{7}{3} < Z < 7\right\}$

الحل :

$16 - 9 < 3Z$ و $3Z < 30 - 9$

$7 < 3Z$ و $3Z < 21$

$\frac{7}{3} < \frac{3Z}{3}$ و $\frac{3Z}{3} < \frac{21}{3} \Rightarrow \frac{7}{3} < Z$ و $Z < 7$

$S = S_1 \cap S_2 = \left\{Z : \frac{7}{3} < Z\right\} \cap \{Z : Z < 7\}$
$= \left\{Z : \frac{7}{3} < Z < 7\right\}$

الجواب فرع : (d)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريا

[4] $2t - 4 > -8$ أو $2t - 4 \le -12$

a) $\{t : t > -2\} \cap \{t : t \le -4\}$
b) $\{t : t > -2\} \cup \{t : t \le -4\}$
c) $\{t : t < -2\} \cap \{t : t \ge -4\}$
d) $\{t : t < -2\} \cup \{t : t \ge -4\}$

الحل :

$2t > -8 + 4$ أو $2t \le -12 + 4$

$2t > -4$ أو $2t \le -8 \ \} \div 2$

$t > -2$ أو $t \le -4$

$S = S_1 \cup S_2 = \{t : t > -2\} \cup \{t : t \le -4\}$

الجواب فرع : (a)

[5] $\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3}$

a) $\{y : y < 4\} \cap \{y : y > 2\}$
b) $\{y : y > -4\} \cup \{y : y < 2\}$
c) $\{y : y < -4\} \cap \{y : y > -2\}$
d) $\{y : y < -4\} \cup \{y : y > 2\}$

الحل :

$\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3} \ \} \times 3$

$y + 5 < 1$ أو $y + 5 > 7$

$y < 1 - 5$ أو $y > 7 - 5$

$y < -4$ أو $y > 2$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y < -4\} \cup \{y : y > 2\}$

الجواب فرع : (d)

اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث اذا كان طولا الضلعين الاخرين للمثلث معلومين:

[7] 8cm , 2cm

a) $6 \le x < 10$ b) $6 \le x \le 10$
c) $6 < x < 10$ d) $6 < x \le 10$

الحل : فرض طول الضلع الثالث x

اطوال اضلاع المثلث 5, 12 , x

الضلع الثالث أصغر من 10 $8 + 2 > x \Rightarrow 10 > x$

$8 + x > 2 \Rightarrow x > 2 - 8 \Rightarrow x > -6$

$2 + x > 8 \Rightarrow x > 8 - 2 \Rightarrow x > 6$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي $6 < x < 10$

الجواب فرع : (c)

[6] 5cm , 12cm

a) $7 < Z < 17$ b) $7 \le Z < 17$
c) $7 \le Z \le 17$ d) $7 < Z \le 17$

الحل : فرض طول الضلع الثالث Z

اطوال اضلاع المثلث 5, 12 , Z

الضلع الثالث أصغر من 17 $5 + 12 > Z \Rightarrow 17 > Z$

$12 + Z > 5 \Rightarrow Z > 5 - 12 \Rightarrow Z > -7$

$5 + Z > 12 \Rightarrow Z > 12 - 5 \Rightarrow Z > 7$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي:

$7 < Z < 17$

الجواب فرع : (a)

اكتب متباينات التي تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

[8]

a) $-4 < x < 3$ b) $-4 \le x < 3$
c) $-4 \le x \le 3$ d) $-4 < x \le 3$

الجواب فرع : (a)

[9]

a) $y \le -3$ أو $y > 5$ b) $y \le -3$ أو $y \ge 5$
c) $y < -4$ أو $y \ge 5$ d) $y < -3$ أو $y > 5$

الجواب فرع : (c)

Lesson[1-5] Absolute Value Inequalities

Absolute value Inequalities | g (x) | ≤ a , | g (x) | < a , where X ∈ R

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و) . بصورة عامة :

$$|g(x)| \le a \quad \Rightarrow \quad -a \le g(x) \le a \quad , \quad a > 0$$
$$|g(x)| < a \quad \Rightarrow \quad -a < g(x) < a \quad , \quad a > 0$$

Ex./ Write the absolute value inequality which represents the temperature of water in the swimming pool, then represent it graphically

Sol./

Assume that the temperature of water is (x) celsius, so the inequality which represents the temperature of pool when it is not more than 26 celsius is:

$$x \le 25 + 1$$

and the inequality which represents the temperature of pool when it is not less than 24 celsius is:

و $x \ge 25 - 1$

$x - 25 \le 1$ and $x - 25 \ge -1 \quad \Rightarrow \quad |x - 25| \le 1$

Ex./2) Solve the absolute value inequalities, then represent the solution in the line of numbers.

1) $|x + 6| < 3$

Sol.

$-3 < x + 6 < 3 \quad \Rightarrow -3 - 6 < x < 3 - 6 \Rightarrow \quad -9 < x < -3$

$S = \{x : -9 < x < -3\}$

2) $|y| - 5 \le 1$

Sol./

$|y| \le 1 + 5 \quad \Rightarrow \quad |y| \le 6 \quad \Rightarrow \quad -6 \le y \le 6$

$S = \{y : -6 \le y \le 6\}$

Ex./3) Find the solution set for the following absolute value inquality

1) $|2x-5|+3<11$

Sol./

$|2x-5|<11-3 \quad \Rightarrow \quad |2x-5|<8 \quad \Rightarrow \quad -8<2x-5<8$

$-8+5<2x<8+5 \quad \Rightarrow \quad -3<2x<13 \,\}\div 2$

$\frac{-3}{2}<\frac{2x}{2}<\frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{2}<x<\frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad S=\left\{x:\ \frac{-3}{2}<x<\frac{13}{2}\right\}$

2) $|7-y|<8$

Sol./

$-8<7-y<8 \quad \Rightarrow \quad -8-7<-y<8-7$

$-15<-y<1\ ]\times(-1)$

$-1<y<15 \quad \Rightarrow \quad S=\{y:\ -1<y<15\}$

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)|>a$, $|g(x)|\geq$ حيث $a\in R$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي متباينة مركبة تتضمن(أو). بصورة عامة :

$|g(x)|\geq a \quad \Leftrightarrow \quad g(x)\geq a$ أو $g(x)\leq -a \quad , \ a>0$

$|g(x)|>a \quad \Leftrightarrow \quad g(x)>a$ أو $g(x)<-a \quad , \ a>0$

Ex./ Solve the absolute value inequality, then represent the solution on the line of numbers.

1) $|x+4|>2$

Sol./

$x+4>2$ أو $x+4<-2 \quad \Rightarrow \quad x>2-4$ أو $x<-2-4$

$x>-2$ أو $x<-6$

$S=S_1\cup S_2=\{x:x>-2\}\cup\{x:x<-6\}$

2) $|5y-1|\geq 4$

Sol./

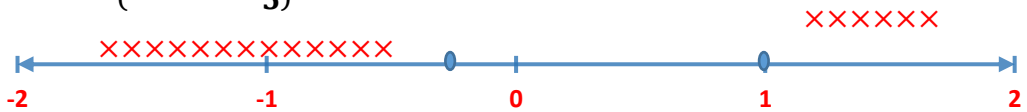
$5y-1\geq 4$ أو $5y-1\leq -4$

$5y\geq 4+1$ أو $5y\leq -4+1$

$5y\geq 5$ أو $5y\leq -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{5y}{5}\geq\frac{5}{5}$ أو $\frac{5y}{5}\leq -\frac{3}{5}$

$y\geq 1$ أو $y\leq -\frac{3}{5}$

$S=S_1\cup S_2=\{y:y\geq 1\}\cup\left\{y:y\leq -\frac{3}{5}\right\}$



Ex./ Find the solution set for the following absolute value inequalities:

1) $\left|\frac{2t-8}{4}\right| \geq 9$

Sol./

$\frac{2t-8}{4} \geq 9$ أو $\frac{2t-8}{4} \leq -9 \quad \} \times 4$

$2t-8 \geq 36$ أو $2t-8 \leq -36$

$2t \geq 36+8$ أو $2t \leq -36+8$

$2t \geq 44$ أو $2t \leq -28 \quad \} \div 2$

$t \geq 22$ أو $t \leq -14$

$S = S_1 \cup S_2 = \{t : t \geq 22\} \cup \{t : t \leq -14\}$

2) $\left|\frac{5-3v}{2}\right| \geq 6$

Sol./

$\frac{5-3v}{2} \geq 6$ أو $\frac{5-3v}{2} \leq -6 \quad \} \times 2$

$5-3v \geq 12$ أو $5-3v \leq -12$

$-3v \geq 12-5$ أو $-3v \leq -12-5$

$-3v \geq 7$ أو $-3v \leq -17 \quad \} \div (-3)$

$v \leq -\frac{7}{3}$ أو $v \geq \frac{17}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{v \; v \leq -\frac{7}{3}\right\} \cup \left\{v : v \geq \frac{17}{3}\right\}$

سؤال: في تحليلات دم الأنسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو $(3.5-5.3)\ mol/L$. اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الأنسان .

الحل

نفرض البوتاسيوم x

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واقل من القيمة الدنيا للمعدل هي : $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واكبر من القيمة العليا للمعدل هي : $x > 5.3$

المتباينة المركبة : $x < 3.5$ أو $x > 5.3$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم

نجد منتصف المسافة بين النقطتين : $\frac{3.5+5.3}{2} = \frac{8.8}{2} = 4.4$

نطرح نصف قطر المسافة من المتباينة :

$x > 5.3$ أو $x < 3.5 \quad \Rightarrow \quad x-4.4 > 5.3-4.4$ أو $x-4.4 < 3.5-4.4$

$x-4.4 > 0.9$ أو $x-4.4 < -0.9 \quad \Rightarrow \quad |x-4.4| > 0.9$

Make sure of your understanding

Q1/ Write the absolute value inequality which represents the following problems:

celsius.° celsius with increase or decrease of 2° 1) The ideal temperature inside flats is 22

Let temperature is X

$x \le 22 + 2$ و $x \ge 22 - 2$

$x - 22 \le 2$ و $x - 22 \ge -2$

$|x - 22| \le 2$

Q2/ Solve the absolute value inequalities, then represent the solution on the line of numbers.

1) $|x + 1| < 5$

Sol./

$-5 < x + 1 < 5 \quad \Rightarrow \quad -5 - 1 < x < 5 - 1$

$-6 < x < 4 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -6 < x < 4\}$

2) $|3Z - 7| \le 2$

Sol./

$-2 \le 3Z - 7 \le 2 \quad \Rightarrow \quad -2 + 7 \le 3Z \le 2 + 7$

$5 \le 3Z \le 9 \} \div 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{3} \le \frac{3Z}{3} \le \frac{9}{3}$

$\frac{5}{3} \le Z \le 3 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{Z : \frac{5}{3} \le Z \le 3\right\}$

3) $|x| + 8 < 9$

Sol./

$|x| < 9 - 8 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$

$-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -1 < x < 1\}$

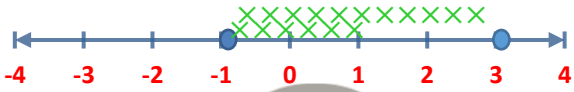
4) $|5y| - 2 \le 8$

Sol./

$|5y| \le 8 + 2 \quad \Rightarrow \quad |5y| \le 10$

$-10 \le 5y \le 10 \} \div 5 \quad \Rightarrow \quad -2 \le y \le 2$

$S = \{y : -2 \le y \le 2\}$

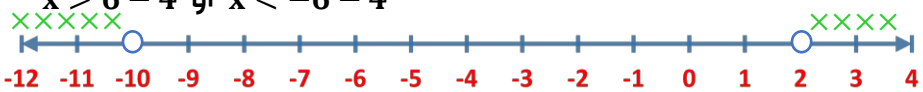


5) $|x+4| > 6$

Sol./

$x+4>6$ أو $x+4<-6$ $\Rightarrow$ $x>6-4$ أو $x<-6-4$

$x>2$ أو $x<-10$



$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2\} \cup \{x : x < -10\}$

6) $|5Z-9| > 1$

SOL : $5Z-9>1$ أو $5Z-9<-1$ $\Rightarrow$ $5Z>1+9$ أو $5Z<-1+9$

$5Z>10$ أو $5Z<8$ } $\div 5$ $\Rightarrow$ $Z>2$ أو $Z<\frac{8}{5}$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z>2\} \cup \left\{Z : Z<\frac{8}{5}\right\}$

7) $|2x|+7 \geq 8$

Sol./

$|2x| \geq 8-7$ $\Rightarrow$ $|2x| \geq 1$

$2x \geq 1$ أو $2x \leq -1$ } $\div 2$

$x \geq \frac{1}{2}$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \geq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

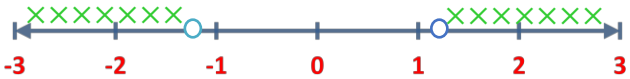
8) $|4y|-2 > 3$

Sol./

$|4y| > 3+2$ $\Rightarrow$ $|4y| > 5$

$4y>5$ أو $4y<-5$ } $\div 4$

$y>\frac{5}{4}$ أو $y<\frac{-5}{4}$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y>\frac{5}{4}\right\} \cup \left\{y : y<\frac{-5}{4}\right\}$



9) $|5-x| < 10$

الحل

$-10 < 5-x < 10$ $\Rightarrow$ $-10-5 < -x < 10-5$

$-15 < -x < 5$] $\times(-1)$

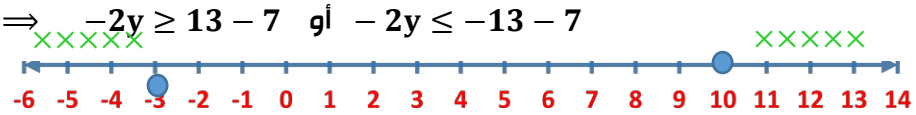
$15 > x > -5$ $\Rightarrow$ $S = \{x : 15 > x > -5\}$

10) $|7-2y| \geq 13$

الحل

$y-2y \geq 13$ أو $7-2y \leq -13 \quad \Rightarrow \quad -2y \geq 13-7$ أو $-2y \leq -13-7$

$-2y \geq 6$ أو $-2y \leq -20 \} \div (-2)$



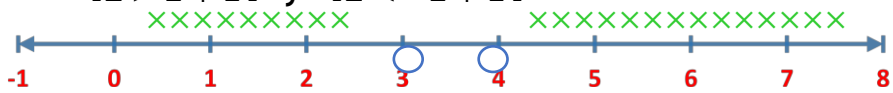
$y \leq -3$ أو $y \geq 10 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -3\} \cup \{y : y \geq 10\}$

11) $|4Z-14| > 2$

الحل

$4Z-14 > 2$ أو $4Z-14 < -2 \quad \Rightarrow \quad 4Z > 2+14$ أو $4Z < -2+14$

$4Z > 16$ أو $4Z < 12 \} \div 4$



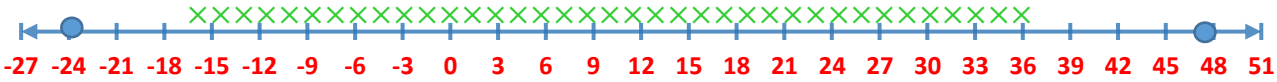
$Z > 4$ or $Z < 3 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z > 4\} \cup \{Z : Z < 3\}$

12) $\left|\frac{x-12}{4}\right| \leq 9$

الحل

$-9 \leq \frac{x-12}{4} \leq 9 \quad \} \times 4 \quad \Rightarrow \quad -36 \leq x-12 \leq 36$

$-36+12 \leq x \leq 36+12 \quad \Rightarrow \quad -24 \leq x \leq 48 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -24 \leq x \leq 48\}$



13) $\left|\frac{6-2y}{4}\right| \geq 9$

الحل

$\frac{6-2y}{4} \geq 9$ أو $\frac{6-2y}{4} \leq -9 \quad \} \times 4 \quad \Rightarrow \quad 6-2y \geq 36$ أو $6-2y \leq -36$

$-2y \geq 36-6$ أو $-2y \leq -36-6 \quad \Rightarrow \quad -2y \geq 30$ أو $-2y \leq -42 \quad \} \div (-2)$

$y \leq -15$ أو $y \geq 21 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -15\}$

Solve the Exercises

Q1/ Write the absolute value inequality which represents the following problems:

i) The temperature inside fridge should be 8 ̊celsius. Write the range of ideal temperature inside fridge. ̊celsius with increasing or decreasing of 0.5

نفرض درجة الحرارة المثالية x

$x \le 8 + 0.5$ و $x \ge 8 - 0.5$

$x - 8 \le 0.5$ و $x - 8 \ge -0.5$

$0.5 \le x - 8 \le 0.5 \quad \Rightarrow \quad |x - 8| \le 0.5$

ii) The boiling degree of water is 100 ̊celsius at the sea surface level. It increases or decreases in the mountainous areas and valleys in no more than 20 ̊degree of water. ̊celsius. Write the range of vipration in the boiling

الحل

نفرض درجة غليان الماء x

$x \le 100 + 20$ و $x \ge 100 - 20$

$x - 100 \le 20$ و $x - 100 \ge -20 \quad \Rightarrow \quad -20 \le x - 100 \le 20$

$|x - 100| \le 20$

Q2/ Solve the following absolute value inequalities:

1) $|x + 3| < 6$

الحل

$-6 < x + 3 < 6 \quad \Rightarrow \quad -6 - 3 < x < 6 - 3$

$-9 < x < 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -9 < x < 3\}$

2) $|2Z| - 5 < 2$

الحل

$|2Z| < 2 + 5 \quad \Rightarrow \quad |2Z| < 7 \quad \Rightarrow \quad -7 < 2Z < 7 \} \div 2$

$\frac{-7}{2} < Z < \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{Z : \frac{-7}{2} < Z < \frac{7}{2}\right\}$

3) $2|x| - 7 \geq 1$

الحل

$2|x| \geq 1 + 7 \quad \Rightarrow \quad 2|x| \geq 8 \ \} \div 2$

$|x| \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4$ أو $x \leq -4 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 4\} \cup \{x : x \leq -4\}$

4) $|11Z| - 2 \geq 9$

الحل

$|11Z| \geq 9 + 2 \quad \Rightarrow \quad |11Z| \geq 11 \quad \Rightarrow \quad 11Z \geq 11$ أو $11Z \leq -11 \ \} \div 11$

$Z \geq 1$ أو $Z \leq -1 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z \geq 1\}$

8) $|1 - x| < 1$

الحل

$-1 < 1 - x < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 - 1 < -x < 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < -x < 0 \quad \} \times (-1)$

$0 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : 0 < x < 2\}$

9) $\left|\frac{4}{5}Z - 1\right| > \frac{4}{5}$

الحل

$\frac{4}{5}Z - 1 > \frac{4}{5}$ أو $\frac{4}{5}Z - 1 < -\frac{4}{5} \ \} \times 5$

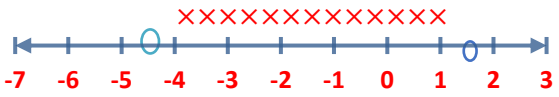
$4Z - 5 > 4$ أو $4Z - 5 < -4 \quad \Rightarrow \quad 4Z > 4 + 5$ أو $4Z < -4 + 5$

$4Z > 9$ أو $4Z < 1 \ \} \div 4 \quad \Rightarrow \quad Z > \frac{9}{4}$ أو $Z < \frac{1}{4}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{Z : Z > \frac{9}{4}\right\} \cup \left\{Z : Z < \frac{1}{4}\right\}$

سؤال: اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية:

1)



الحل

الرسم البياني يمثل تقاطع (و) والفجوة فارغة .

$-6 < x < 2$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ ثم نطرح (-2) من جميع المتباينة :

$-6 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad -6 - (-2) < x - (-2) < 2 - (-2)$

$-4 < x + 2 < 4 \quad \Rightarrow \quad |x + 2| < 4$

2)

الحل

الرسم البياني يمثل التقاطع (و)

$-4 \le x \le 2$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ ثم نطرح (-1) من جميع المتباينة :

$-4 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad -4-(-1) \le x-(-1) \le 2-(-1)$

$-3 \le x+1 \le 3 \quad \Rightarrow \quad |x+1| \le 3$

3)

الحل

الرسم البياني يمثل اتحاد (أو)

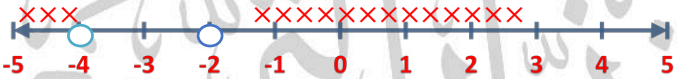
$x > -2$ أو $x < 4$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ثم نطرح (1) من جميع المتباينة :

$x > -2$ أو $x < 4 \quad \Rightarrow \quad x-1 > -2-1$ أو $x-1 < 4-1$

$x-1 > -3$ أو $x-1 < 3 \quad \Rightarrow \quad |x-1| > 3$

4)



الحل

الرسم البياني يمثل اتحاد (أو)

$x \ge -4$ أو $x \le -2$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ ثم نطرح (-3) من جميع المتباينة :

$x \ge -4$ أو $x \le -2 \quad \Rightarrow \quad x-3 \ge -4-(3)$ أو $x-3 \le -2-(-3)$

$x-3 \ge -1$ أو $x-3 \le 1 \quad \Rightarrow \quad |x-3| \ge 1$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي :

1) **الغرير** : حيوان الغرير هو أحد أنواع الثديات ينتمي الى شعبة الحبليات ويمتلك قوائم قصيرة نوعا ما ويعيش في الحفر التي يحفرها في الأرض طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل ما بين 68cm , 76cm . اكتب مدى طول الغرير.

الحل

نفرض طول الغرير x

$68 < x < 76$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{68+76}{2} = \frac{144}{2} = 72$ ثم نطرح (72) من جميع المتباينة :

$68 < x < 76 \quad \Rightarrow \quad 68-72 < x-72 < 76-72$

$-4 < x - 72 < 4 \quad \Rightarrow \quad |x - 72| < 4$

2) **صحة** : معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح بين 60 الى 90 نبضة في الدقيقة . اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الانسان .

الحل

نفرض عدد دقات القلب غير الطبيعية x

$x < 60$ أو $x > 90$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{60+90}{2} = \frac{150}{2} = 75$ ثم نطرح (75) من جميع المتباينة :

$x < 60$ أو $x > 90 \quad \Rightarrow \quad x - 75 < 60 - 75$ أو $x - 75 > 90 - 75$

$x < -15$ أو $x > 15 \quad \Rightarrow \quad |x - 75| > 4$

3) **مواصلات** : تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح ما بين 8km الى 10km اذ تعد منطقة جوية معتدلة . اكتب مدى منطقة الطيران المدنية .

الحل

نفرض مدى منطقة الطيران x

$8 < x < 10$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ثم نطرح (9) من جميع المتباينة :

$8 < x < 10 \quad \Rightarrow \quad 8 - 9 < x - 9 < 10 - 9$

$-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad |x - 9| < 1$

فـــكـــر

سؤال: **تحد** : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1) $\left|\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\right| \le \sqrt{6}$

الحل

$-\sqrt{6} \le \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \le \sqrt{6} \quad \} \times \sqrt{2}$

$-\sqrt{12} \le \sqrt{3}\,x + \sqrt{3} \le \sqrt{12} \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{3} \le \sqrt{3}\,x + \sqrt{3} \le 2\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3} - \sqrt{3} \le \sqrt{3}\,x \le 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{3} \le \sqrt{3}\,x \le \sqrt{3} \quad \} \div \sqrt{3}$

$-1 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -1 \le x \le 1\}$

2) $\left|\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y}{\sqrt{5}}\right| \geq \sqrt{15}$

الحل

$\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y}{\sqrt{5}} \geq \sqrt{15}$ أو $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y}{\sqrt{5}} \leq -\sqrt{15}\ \}\times\sqrt{5}$

$\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y \geq \sqrt{75}$ أو $\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y \leq -\sqrt{75}$

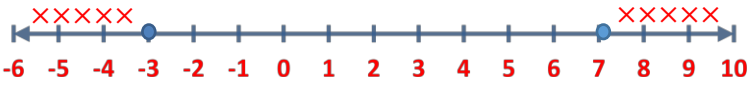
$2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,y \geq 5\sqrt{3}$ أو $2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,y \leq -5\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}\,y \geq 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ أو $-\sqrt{3}\,y \leq -5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}\,y \geq 3\sqrt{3}$ أو $-\sqrt{3}\,y \leq -7\sqrt{3}\ \}\div(-\sqrt{3})$

$y \leq -3$ أو $y \geq 7$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -3\} \cup \{y : y \geq 7\}$



سؤال: صحح الخطأ : قالت خلود أن متباينة القيمة المطلقة $|6-3y| \geq 7$ تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و) ومجموعة الحل لها : $\left\{y : -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{13}{2}\right\}$. بين خطأ خلود وصححه .

الحل

المتباينة تمثل متباينة مركبة بعلاقة (أو)

$6-3y \geq 7$ أو $6-3y \leq -7 \quad \Rightarrow \quad -3y \geq 7-6$ أو $-3y \leq -7-6$

$-3y \geq 1$ أو $-3y \leq -13 \quad \}\div(-3)$

$y \leq \dfrac{-1}{3}$ أو $y \geq \dfrac{13}{3} \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \leq -\dfrac{1}{3}\right\} \cup \left\{y : y \geq \dfrac{13}{3}\right\}$

سؤال: حس عددي : اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

1) $\lvert Z\rvert - 1 < 0$ الحل : $\lvert Z\rvert < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < Z < 1$ $S = \{Z : -1 < Z < 1\}$	2) $\lvert y\rvert > 0$ الحل : $y > 0$ أو $y < 0$ $S = S_1 \cup S_2 = \{y : y > 0\} \cup \{y : y < 0\}$
3) $\lvert x-1\rvert > 0$ الحل : $x-1 > 0$ أو $x-1 < 0 \Rightarrow x > 1$ أو $x < 1$ $S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 1\} \cup \{x : x < 1\}$	

سؤال: أكتب : متباينة قيمة مطلقة تمثل موقفاً من واقع الحياة ومثل الحل على مستقيم الأعداد .

الحل

مسألة : الضغط الدم الطبيعي لدى الأنسان يتراوح بين 120 الى 180 . أحسب مدى ضغط الدم غير الطبيعي .

نفرض مدى ضغط الدم هو x

المتباينة التي تمثل ضغط الدم غير الطبيعي هي :

$x > 180$ أو $x < 120$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{120+180}{2} = \frac{300}{2} = 150$ **ثم نطرح (150) من جميع المتباينة :**

$x - 150 > 180 - 150$ أو $x - 150 < 120 - 150$

$x - 150 > 30$ أو $x - 150 < -30$

$|x - 150| > 30$

اختبار الفصل

سؤال: حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

1) $\lvert x-6\rvert \le 3$ الحل : $-3 \le x-6 \le 3 \Rightarrow -3+6 \le x \le 3+6$ $3 \le x \le 9 \Rightarrow S=\{x : 3 \le x \le 9\}$	2) $\lvert 3Z\rvert - 5 < 4$ الحل : $\lvert 3Z\rvert < 4+5 \Rightarrow \lvert 3Z\rvert < 9$ $-9 < 3Z < 9 \ \} \div 3$ $-3 < Z < 3 \Rightarrow S=\{Z : -3 < Z < 3\}$
3) $6\lvert x\rvert - 8 \ge 3$ الحل : $6\lvert x\rvert \ge 3+8 \Rightarrow 6\lvert x\rvert \ge 11 \ \} \div 6$ $\lvert x\rvert \ge \frac{11}{6} \Rightarrow x \ge \frac{11}{6}$ أو $x \le \frac{-11}{6}$ $S=S_1 \cup S_2=\left\{x : x \ge \frac{11}{6}\right\} \cup \left\{x : x \le \frac{-11}{6}\right\}$	4) $\lvert x+1\rvert > \frac{1}{2}$ الحل : $x+1 > \frac{1}{2}$ أو $x+1 < -\frac{1}{2} \} \times 2$ $2x+2 > 1$ أو $2x+2 < -1$ $2x > 1-2$ أو $2x < -1-2$ $2x > -1$ أو $2x < -3 \ \} \div 2$ $x > -\frac{1}{2}$ أو $x < -\frac{3}{2}$ $S=S_1 \cup S_2=\left\{x : x > -\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}$
5) $\lvert 3y\rvert - 2 > 9$ الحل : $\lvert 3y\rvert > 9+2 \Rightarrow \lvert 3y\rvert > 11$ $3y > 11$ أو $3y < -11 \ \} \div 3$ $y > \frac{11}{3}$ أو $y < -\frac{11}{3}$ $S=S_1 \cup S_2=\left\{y : y > \frac{11}{3}\right\} \cup \left\{y : y < -\frac{11}{3}\right\}$	6) $\lvert 8Z\rvert - 1 \ge 8$ الحل : $\lvert 8Z\rvert \ge 8+1 \Rightarrow \lvert 8Z\rvert \ge 9$ $8Z \ge 9$ أو $8Z \le -9 \ \} \div 8$ $Z \ge \frac{9}{8}$ أو $Z \le -\frac{9}{8}$ $S=S_1 \cup S_2=\left\{Z : Z \ge \frac{9}{8}\right\} \cup \left\{Z : Z \le -\frac{9}{8}\right\}$
7) $\lvert 4-3y\rvert \ge 14$ الحل : $4-3y \ge 14$ أو $4-3y \le -14$ $-3y \ge 14-4$ أو $-3y \le -14-4$ $-3y \ge 10$ أو $-3y \le -18 \ \} \div (-3)$ $y \le -\frac{10}{3}$ أو $y \ge 6$ $S=S_1 \cup S_2=\left\{y : y \le -\frac{10}{3}\right\} \cup \{y : y \ge 6\}$	31 $\left\lvert \frac{6-3y}{9} \right\rvert \ge 5$ الحل : $\frac{6-3y}{9} \ge 5$ أو $\frac{6-3y}{9} \le -5 \ \} \times 9$ $6-3y \ge 45$ أو $6-3y \le -45 \Rightarrow -3y$ $\ge 45-6$ أو $-3y \le -45-6$ $-3y \ge 39$ أو $-3y \le -51 \ \} \div (-3)$ $y \le -13$ أو $y \ge 17 \Rightarrow S=S_1 \cup S_2$ $=\{y : y \le -13\} \cup \{y : y \ge 17\}$

الأختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

[1] $|y-8|<13$

a) $5<y<-21$ b) $-5\le y\le -21$

c) $-5<y<21$ d) $-5<y\le 21$

الحل :

$-13<y-8<13 \Rightarrow -13+8<y<13+8$

$-5<y<21 \Rightarrow S=\{y:\ -5<y<21\}$

الجواب فرع : (c)

[2] $|3Z|-7<1$

a) $-\frac{8}{3}\le Z<\frac{8}{3}$ b) $-\frac{8}{3}<Z\le\frac{8}{3}$

c) $-\frac{8}{3}\le Z\le\frac{8}{3}$ d) $-\frac{8}{3}<Z<\frac{8}{3}$

الحل :

$|3Z|<1+7 \Rightarrow |3Z|<8 \Rightarrow -8<3Z<8$

$\frac{8}{3}<\frac{3Z}{3}<\frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{8}{3}<Z<\frac{8}{3}$

$S=\left\{Z:\ -\frac{8}{3}<Z<\frac{8}{3}\right\}$

الجواب فرع : (d)

[3] $|3-x|<3$

a) $-6<x<0$ b) $0<x<6$

c) $-6<x<6$ d) $0\le x\le 6$

الحل :

$-3<3-x<3 \Rightarrow -3-3<-x<3-3$

$-6<-x<0 \ \}\times(-1) \Rightarrow 0<x<6$

الجواب فرع : (b)

[4] $|5t-5|>0$

a) $t\le 1$ أو $t>1$ b) $t\ge 1$ أو $t<-1$

c) $t>1$ أو $t<1$ d) $t>-1$ أو $t<-1$

الحل :

$5t-5>0$ أو $5t-5<0$

$5t>5$ أو $5t<5\ \}\div 5 \Rightarrow t>1$ أو $t<1$

الجواب فرع : (c)

[5] $|v-3|\ge\frac{1}{2}$

a) $v\le\frac{7}{2}$ أو $v\le-\frac{5}{2}$ b) $v\ge\frac{7}{2}$ أو $v\ge-\frac{5}{2}$

c) $v\ge\frac{7}{2}$ أو $v\le\frac{5}{2}$ d) $v\le\frac{7}{2}$ أو $v\ge-\frac{5}{2}$

الحل :

$v-3\ge\frac{1}{2}$ أو $v-3\le\frac{-1}{2}$

$v\ge\frac{1}{2}+3$ أو $v\le\frac{-1}{2}+3$

$v\ge\frac{1+6}{2}$ أو $v\le\frac{-1+6}{2} \Rightarrow v\ge\frac{7}{2}$ أو $v\le\frac{5}{2}$

الجواب فرع : (c)

[6] $|6-3y|\ge 9$

a) $y\le 1$ أو $y\ge-5$ b) $y<-1$ أو $y>5$

c) $y>-1$ أو $y<-5$ d) $y\le-1$ أو $y\ge 5$

الحل :

$6-3y\ge 9$ أو $6-3y\le-9$

$-3y\ge 9-6$ أو $-3y\le-9-6$

$-3y\ge 3$ أو $-3y\le-15\ \}\div(-3)$

$y\le-1$ أو $y\ge 5$

الجواب فرع : (d)

[7] $\left|\frac{7-2y}{3}\right| \geq 3$

a) $y \leq -1$ أو $y \geq 8$ b) $y < -1$ أو $y \geq 8$

c) $y < -1$ أو $y > 8$ d) $y < -1$ أو $y > 8$

الحل :

$\frac{7-2y}{3} \geq 3$ أو $\frac{7-2y}{3} \leq -3 \quad \} \times 3$

$7-2y \geq 9$ أو $7-2y \leq -9$

$-2y \geq 9-7$ أو $-2y \leq -9-7$

$-2y \geq 2$ أو $-2y \leq -16 \quad \} \div (-2)$

$y \leq -1$ أو $y \geq 8$

الجواب فرع : (a)

[8] $\left|\frac{Z-1}{7}\right| \leq 2$

a) $-13 < Z \leq 15$ b) $-13 \leq Z < 15$

c) $-13 \leq Z \leq 15$ d) $-13 < Z < 15$

الحل :

$-2 \leq \frac{Z-1}{7} \leq 2 \quad \} \times 7$

$-14 \leq Z-1 \leq 14$

$-14+1 \leq Z \leq 14+1$

$-13 \leq Z \leq 15$

الجواب فرع : (c)

Chapter Two

Algebraic Expressions

[2 – 1 – 1]	Multiplying Algebraic Expressions.

- ✓ اذا كان المقدار يتكون من قوسين مختلفين فنقوم بتوزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة
- ✓ اذا كان المقدار بالصورة $(a+b)^2$ أو $(a-b)^2$ فإن تبسيطه حسب قانون المربع الكامل :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- ✓ اذا كان المقدار بالصورة $(a-b)(a+b)$ فإن القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Ex./ 1) Find the result of multiplying an algebraic expressions by another algebrail expression where each one has two terms :

1) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

3) $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

4) $(x+3)(x+5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$

5) $(x+2)(x-6) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12$

6) $(x-1)(x-4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$

Ex./ 2) Find the result of multiplying an algebraic expressions by another algebrail expression where each one has two terms :

1) $(3y+1)(y+2) = 3y^2 + 6y + y + 2 = 3y^2 + 7y + 2$

[2] $(n-\sqrt{3})(5n-\sqrt{3}) = 5n^2 - \sqrt{3}\,n - 5\sqrt{3}n + 3 = 5n^2 - 6\sqrt{3}\,n + 3$

[3] $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

[8] $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

[5] $(Z+3)^2 = Z^2 + 6Z + 9$

[6] $(h-5)^2 = h^2 - 10h + 25$

[7] $(2x-7)(2x+7) = (2x)^2 - (7)^2 = 4x^2 - 49$

[8] $(v+\sqrt{2})(v-\sqrt{2}) = v^2 - (\sqrt{2})^2 = v^2 - 2$

[2 − 1 − 2] Multiplying algebraic expressions from two terms by another three terms

[1] اذا كان المقدار يتكون من قوسين احدهما من حدين والآخر من ثلاثة حدود هنالك طريقتين :

a) نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نطرح الحدود المتشابهة .

b) اذا كان المقدار بالصورة :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$1=1^3\,,8=2^3$
$27=3^3$
$64=4^3$
$125=5^3$
$216=6^3$

[2] اذا كان المقدر بالشك : $(a+b)^3\,,(a-b)^3$ نقوم بتبسيطه بالشكل التالي :

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2\ ,(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$$

نقوم بتبسيط القوس الذي يحتوي على التربيع أولاً ثم نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نجمع الحدود المتشابهة.

Ex./ 1) Find the result of multiplying an algebraic expression which consists of two terms by an algebraic expression which consists of three terms:

1 $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3\cancel{-2x^2}\cancel{+4x}\cancel{+2x^2}\cancel{-4x}+8=x^3+8$ الطريقة الأولى

$(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=x^3+8$ الطريقة الثانية

2 $(y-3)(y^2+3y+9)=y^3-3^3=y^3-27$

3 $(2v+5)(4v^2-10v+25)=(2v)^3+5^3=8v^3+125$

4 $\left(\frac{1}{3}-Z\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}Z+Z^2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-Z^3=\frac{1}{27}-Z^3$

5 $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}+v\right)\left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}}-\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\,v+v^2\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)^3-v^3=\frac{3}{5}+v^3$

6 $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4})=x^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=x^3-2$

7 $(y+2)^3=(y+2)(y+2)^2=(y+2)(y^2+4y+4)=y^3+4y^2+4y+2y^2+8y+8$

$=y^3+6y^2+12y+8$

8 $(Z-3)^3=(Z-3)(Z-3)^2=(Z-3)(Z^2-6Z+9)=$

$=Z^3-6Z^2+9Z-3Z^2+18Z-27=Z^3-9Z^2+27Z-27$

9 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$

$=x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$

10 $(y-5)^3=(y-5)(y-5)^2=(y-5)(y^2-10y+25)$

$=y^3-10y^2+25y-5y^2+50y-125=y^3-15y^2+75y-125$

Make sure of your understanding

Q1/ Find the result of multiplying an algebraic expression by another algebraic expression where both of them have two terms:

1 $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

2 $(\sqrt{7} - h)^2 = 7 - 2\sqrt{7}\,h + h^2$

3 $(Z+\sqrt{5})(Z-\sqrt{5}) = Z^2 - (\sqrt{5})^2 = Z^2 - 5$

4 $(v+5)(v+1) = v^2 + v + 5v + 5 = v^2 + 6v + 5$

5 $(x-3)(x-2) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$

6 $(3x-4)(x+5) = 3x^2 + 15x - 4x - 20 = 3x^2 + 11x - 20$

7 $\left(\frac{1}{3}y+3\right)\left(\frac{1}{3}y+3\right) = \frac{1}{9}y^2 + y + y + 9 = \frac{1}{9}y^2 + 2y + 9$

Q2/ Find the result of multiplying an algebraic expression which consists of two terms by another algebraic expression which consists of three terms:

1 $(y+2)(y^2-2y+4) = y^3 + 2^3 = y^3 + 8$

2 $(2Z+4)(4Z^2-8Z+16) = (2Z)^3 + 4^3 = 8Z^3 + 64$

3 $(v-\sqrt[3]{3})(v^2+\sqrt[3]{3}\,v+\sqrt[3]{9}) = v^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = v^3 - 3$

4 $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}+m\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\,m + m^2\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)^3 + m^3 = \frac{2}{7} + m^3$

5 $(x+5)^3 = (x+5)(x+5)^2 = (x+5)(x^2+10x+25)$

$= x^3 + 10x^2 + 25x + 5x^2 + 50x + 125 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

6 $(y-4)^3 = (y-4)(y-4)^2 = (y-4)(y^2-8y+16)$

$= y^3 - 8y^2 + 16y - 4y^2 + 32y - 64 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$

Solve the Exercises

Q1/ Find the result of multiplying an algebraic expression by another algebraic expression where both of them have two terms:

1 $(n-6)^2 = n^2 - 12n + 36$

2 $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6}) = y^2 - (\sqrt{6})^2 = y^2 - 6$

3 $(4-y)(5-y) = 20 - 4y - 5y + y^2 = 20 - 9y + y^2$

4 $(2x-3)(x+9) = 3x^2 + 27x - 3x - 27 = 3x^2 - 24x - 27$

Q2/ Find the result of multiplying an algebraic expression which consists of two terms by another algebraic expression which consists of three terms:

1 $(x+6)(x^2-6x+36) = x^3 + 6^3 = x^3 + 216$

2 $(y-1)(y^2+y+1) = y^3 - 1^3 = y^3 - 1$

3 $(Z-3)^3 = (Z-3)(Z-3)^2 = (Z-3)(Z^2-6Z+9)$

$= Z^3 - 6Z^2 + 9Z - 3Z^2 + 18Z - 27 = Z^3 - 9Z^2 + 27Z - 27$

4 $\left(\frac{2}{3} - r\right)\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}r + r^2\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - r^3 = \frac{8}{27} - r^3$

5 $(x - \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt[3]{4}\,x + \sqrt[3]{16}) = x^3 - (\sqrt[3]{4})^3 = x^3 - 4$

6 $(Z-\sqrt{5})^3 = (Z-\sqrt{5})(Z-\sqrt{5})^2 = (Z-\sqrt{5})(Z^2 - 2\sqrt{5}\,Z + 5)$

$= Z^3 - 2\sqrt{5}\,Z^2 + 5Z - \sqrt{5}\,Z^2 + 10Z - 5\sqrt{5} = Z^3 - 3\sqrt{5}\,Z^2 + 15Z - 5\sqrt{5}$

7 $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}} + n\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{25}} + \sqrt[3]{\frac{1}{5}}\,n + n^2\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^3 + n^3 = \frac{1}{5} + n^3$

8 $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \frac{1}{h}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{81}} - \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\,\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2}\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^3 + \left(\frac{1}{h}\right)^3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{h^2}$

Solve the problems

Q1/ Swimming pool: Baghdad hotel is one of the important tourist hotels in Baghdad, the capital of Iraq. The length of the swimming pool is (x+9) meter and the width is (x+1) meter. It is surrounded by an aisle which its width is 1 meter. Write the area of the swimming pool with the aisle in simplest form.

الحل

الطول $x+9+1+1=x+11$, العرض $x+1+1+1=x+3$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$$A=(x+11)(x+3)=x^2+3x+11x+33=x^2+14x+33$$

Q2/ History: Babylon city locates to the north of Al-Hila city in Iraq. Babylonians lived there since about 3000 years BC. In 575 , they built the gate of Ishtar which considers the eighth gate of Babylon wall. Wa, el drew a painting represents the gate of Ishtar. The dimensions of the painting was (y+7), (y-4) cm. Write the painting area which was drawn by Wa, el in simplest form by y .

الحل

مساحة اللوحة = الطول × العرض

$$A=(y-4)(y-7)=y^2-7y-4y+28=y^2-11y+2$$

Q3/ Ornament at fish : A cubic-shoped aquarium, the length of its side is (v+3) cm. Write the volume of the aquarium in simplest form.

الحل

$$V=L^3=(v+3)^3=(v+3)(v+3)^2=(v+3)(v^2+6v+9)$$
$$=v^3+6v^2+9v+3v^2+18v+27=v^3+9v^2 27v+27$$

سؤال: تحد :جد ناتج كل مما يلي بأبسط صورة :

1) $(x+1)^2-(x-2)^2=x^2+2x+1-(x^2-4x+4)=x^2+2x+1-x^2+4x-4=6x-3$

2) $(3y+2)(y-5)-(3y^2-10)=3y^2-15y+2y-10-3y^2+10=-13y$

سؤال: أصحح الخطأ : كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كالآتي:

$(\sqrt{5}h-4)(h-6)=5h^2+10h-24$ حدد خطأ نسرين وصححه .

الحل

$$(\sqrt{5}\,h-4)(h-6)=\sqrt{5}\,h^2-6\sqrt{5}\,h-4h+24=\sqrt{5}\,h^2-(6\sqrt{6}+4)h+24$$

سؤال: حس عددي : أي العددين أكبر ؟ العدد $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ أم العدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$. وضح اجابتك

الحل

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{6}+2 = 5-2\sqrt{6}$, $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{6}+2 = 5+2\sqrt{6}$

العدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ أكبر من العدد $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

سؤال: أكتب ناتج ضرب المقدارين الجبريين : $\left(2Z+\frac{1}{2}\right)\left(2Z-\frac{1}{2}\right)$

الحل

$$\left(2Z+\frac{1}{2}\right)\left(2Z-\frac{1}{2}\right) = (2Z)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4Z^2-\frac{1}{4}$$

مراجعة الفصل

مثال 1 // جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية :

1 $(x-3)^2 = x^2-6x+9$

2) $(2y-5)(2y+5) = 4y^2-25$

3) $(\sqrt{2}+Z)(\sqrt{2}-Z) = 2-Z^2$

تدريب 1 // جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية :

1) $(Z+6)^2 = Z^2+12Z+36$

2) $(4x-3)(4x+3) = (4x)^2-3^2 = 16x^2-9$

3) $(5+Z)(25-5Z+Z^2) = 5^3+Z^3 = 125+Z^3$

اختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر :

[1] $(x+5)^2$ a) $x^2-10x+25$ b) $x^2+10x+25$ c) $x^2+5x+25$ d) $x^2-5x+25$ **الحل** $(x+5)^2 = x^2+10x+25$ الجواب فرع : (b)	
[3] $(x+8)(x-8)$	[4] $(3-2Z)(3+2Z)$

a) $6-4Z^2$ b) $9-4Z^2$
c) $6+4Z^2$ d) $9+4Z^2$

الحل

$(3-2Z)(3+2Z)=3^2-(2Z)^2=9-4Z^2$

الجواب فرع : (b)

a) x^2-64 b) x^2+64
c) x^2+16 d) x^2-16

الحل

$(x+8)(x-8)=x^2-8^2=x^2-64$

الجواب فرع : (a)

[6] $(2x-3)(x+9)$
a) $2x^2+15x-27$ b) $2x^2-5x-27$
c) $2x^2-15x+27$ d) $2x^2+15x+27$

الحل

$(2x-3)(x+9)=2x^2+18x-3x-27$
$=2x^2+15x-27$

الجواب فرع : (a)

[5] $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})$
a) $y^2-\sqrt{12}$ b) y^2-6
c) $y^2+\sqrt{12}$ d) y^2+6

الحل

$(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})=y^2-(\sqrt{6})^2=y^2-6$

الجواب فرع : (b)

[8] $\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x+x^2\right)$
a) $\frac{1}{27}-x^3$ b) $\frac{1}{27}+x^3$
c) $\frac{1}{9}+x^3$ d) $\frac{1}{9}-x^3$

الحل

$\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x+x^2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-x^3=\frac{1}{27}-x^3$

الجواب فرع : (a)

[7] $(y-2)(y^2+2y+4)$
a) y^3+8 b) y^3-8
c) y^3-4 d) y^3-16

الحل

$(y-2)(y^2+2y+4)=y^3-2^3=y^3-8$

الجواب فرع : (b)

[10] $\left(y+\frac{1}{5}\right)^3$
a) $y^3-\frac{3}{3}y^2+\frac{3}{25}y-\frac{1}{125}$ b) $y^3+\frac{3}{3}y^2-\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$
c) $y^3+\frac{3}{3}y^2+\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$ d) $y^3-\frac{3}{3}y^2-\frac{3}{25}y-\frac{1}{125}$

الحل

$\left(y+\frac{1}{5}\right)^3=\left(y+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)^3$
$=\left(y+\frac{1}{5}\right)\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)$
$=y\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)+\frac{1}{5}\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)$
$=y^3+\frac{2}{5}y^2+\frac{1}{25}y+\frac{1}{5}y^2+\frac{2}{25}y+\frac{1}{125}$
$=y^3+\frac{3}{5}y^2+\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$

الجواب فرع : (c)

[9] $(Z-2)^3$
a) $Z^3+6Z^2+12Z+8$
b) $Z^3-6Z^2+12Z-8$
c) $Z^3+6Z^2-12Z-8$
d) $Z^3-6Z^2-12Z+8$

الحل

$(Z-2)^3=(Z-2)(Z-2)^2$
$=(Z-2)(Z^2-4Z+4)$
$=Z(Z^2-4Z+4)-2(Z^2-4Z+4)$
$=Z^3-4Z^2+4Z-2Z^2+8Z-8$
$=Z^3-6Z^2+12Z-8$

الجواب فرع : (b)

Lesson[2-2] Factoring the Algebraic Expression by using a Greater Common Factor

[2 − 2 − 1]	Factoring the algebraic expression by using a greater common factor

لإيجاد العامل المشترك نتبع ما يأتي :

1) نستخرج العامل المشترك للاعداد حيث يمثل أصغر عدد في المقدار الجبري ويمكن قسمة المقدار الجبري عليه .

2) نستخرج العامل المشترك للمتغيرات بأصغر أس .

3) نفتح قوس ونقوم بقسمة كل حد في المقدار الجبري على العامل المشترك وناتج القسمة يكتب داخل القوس .

ملاحظـــــة : التحقق من صحة الحل : نقوم بتوزيع العامل المشترك على داخل القوس فاذا حصلنا على المقدار الجبري فأن التحليل صحيح واذا لم نحصل على المقدار الجبري فأن الحل خطأ ويجب إعادة التحليل

Ex./ Factoring each expression by using the greater common factor (GCF), then checking the correction of solution :

1 $6x^3 + 9x^2 - 18x = 3x(2x^2 + 3x - 6)$

التحقق : $3x(2x^2 + 3x - 6) = 3x(2x^2) + 3x(3x) - 3x(6) = 6x^3 + 9x^2 - 18x$

2 $\sqrt{12}\,y^2Z + \sqrt{2}(\sqrt{6}\,yZ^2 - \sqrt{24}\,yZ) = 2\sqrt{3}\,y^2Z + \sqrt{12}\,yZ^2 - \sqrt{48}\,yZ$

$= 2\sqrt{3}\,y^2Z + 2\sqrt{3}\,yZ^2 - 4\sqrt{3}\,yZ = 2\sqrt{3}\,yZ(y + Z - 2)$

التحقق : $2\sqrt{3}\,yZ(y + Z - 2) = 2\sqrt{3}\,y^2Z + 2\sqrt{3}\,yZ^2 - 4\sqrt{3}\,yZ$

Ex./ Factoring each expression by using the binomial as a greater common factor

1 $5x(x + 3) - 7(x + 3) = (x + 3)(5x - 7)$

2 $\frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{3}y^2(y - 1) = (y - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2\right)$

3 $\sqrt{3}\,v^2(Z + 2) - \sqrt{5}\,v(Z + 2) = v(Z + 2)(\sqrt{3}\,v - \sqrt{5})$

[2 – 2 – 2]	Factoring an algebraic expression by using the property of grouping

تستعمل خاصية التجميع في التحليل اذا كان المقدار الجبري يتكون من أربعة حدود .

* نضع كل حدين بين قوسين ثم نستخرج العامل المشترك من كل قوس .
* نستخدم خاصية ثنائية الحد كعامل مشترك

Ex./ Factoring each algebraic expression by using the grouping, then check the correction of the solution:

1 $4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 = (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10) = 4x^2(x-2) + 5(x-2)$

$= (x-2)(4x^2+5)$

التحقق : $(x-2)(4x^2+5) = 4x^3 + 5x - 8x^2 - 10 = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$

2 $\sqrt{2}\,h^2t + \sqrt{3}\,t^2v - \sqrt{8}\,h^2v - \sqrt{12}\,v^2t = (\sqrt{2}\,h^2t - \sqrt{8}\,h^2v) + (\sqrt{3}\,t^2v - \sqrt{12}\,v^2t)$

$= (\sqrt{2}\,h^2t - 2\sqrt{2}\,h^2v) + (\sqrt{3}\,t^2v - 2\sqrt{3}\,v^2t)$

$= \sqrt{2}\,h^2(t-2v) + \sqrt{3}\,tv(t-2v) = (t-2v)(\sqrt{2}\,h^2 + \sqrt{3}\,tv)$

التحقق : $(t-2v)(\sqrt{2}\,h^2 + \sqrt{3}\,tv) = t(\sqrt{2}\,h^2 + \sqrt{3}\,tv) - 2v(\sqrt{2}\,h^2 + \sqrt{3}\,tv)$

$= \sqrt{2}\,h^2t + \sqrt{3}\,t^2v - 2\sqrt{2}h^2v + 2\sqrt{3}\,v^2t$

$= \sqrt{2}\,h^2t + \sqrt{3}\,t^2v - \sqrt{8}h^2v + \sqrt{12}\,v^2t$

Ex./ Factoring the algebraic expression by using the grouping with the inverse:

$14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x = (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x) = 7x^2(2x-1) + 3(1-2x)$

$= 7x^2(2x-1) + 3(-1)(2x-1) = 7x^2(2x-1) - 3(2x-1)$

$= (2x-1)(7x^2-3)$

Make sure of your understanding

Q1/ Factor each expression by using the greater common factor (GCF) , then check the correction of solution:

1 $9x^2 - 21x = 3x(3x-7)$ التحقق : $3x(3x-7) = 9x^2 - 21x$	2 $10 - 15y + 5y^2 = 5(2 - 3y + y^2)$ التحقق : $5(2-3y+y^2) = 10 - 15y + 5y^2$
3 $14Z^4 - 21Z^2 - 7Z^3 = 7Z^2(2Z^2 - 3 - Z)$ التحقق : $7Z^2(2Z^2 - 3 - Z) = 14Z^4 - 21Z^2 - 7Z^3$	4 $\sqrt{8}\,t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}\,tr)$ $= 2\sqrt{2}\,t^2r + \sqrt{2}\,tr^2 - \sqrt{2}\sqrt{3}\,tr$ $= \sqrt{2}\,tr(2t + r - \sqrt{3})$ التحقق : $\sqrt{2}\,tr(2t + r - \sqrt{3})$ $= 2\sqrt{2}\,t^2r + \sqrt{2}\,tr^2 - \sqrt{2}\,tr(\sqrt{3})$ $= \sqrt{2}\,t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}\,tr)$

Q2/ Factor each expression by using the binomial as a greater common factor:

1 $3y(y-4)-5(y-4)=(y-4)(3y-5)$

2 $\frac{1}{4}(t+5)+\frac{1}{3}t^2(t+5)=(t+5)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}t^2\right)$

3 $\sqrt{2}\,n(x+1)-\sqrt{3}\,m(x+1)=(x+1)(\sqrt{2}\,n-\sqrt{3}\,m)$

4 $2x(x^2-3)+7(x^2-3)=(x^2-3)(2x-7)$

Q3/ Factor each expression by using the property of grouping , then check the correction of solution:

1 $3y^3-6y^2+7y-14=(3y^3-6y^2)+(7y-14)=3y^2(y-2)+7(y-2)$
$=(y-2)(3y^2+7)$

التحقق : $(y-2)(3y^2+7)=3y^3+7y-6y^2-14=3y^3-6y^2+7y-14$

2 $21-3x+35x^2-5x^3=(21-3x)+(35x^2-5x^3)=3(7-x)+5x^2(7-x)$
$=(7-x)(3+5x^2)$

التحقق : $(7-x)(3+5x^2)=21+35x^2-3x-5x^3=21-3x+35x^2-5x^3$

3 $2r^2k+3k^2v-4r^2v-6v^2k=(2r^2k-4r^2v)+(3k^2v-6v^2k)$
$=2r^2(k-2v)+3kv(k-2v)=(k-2v)(2r^2+3kv)$

التحقق : $(k-2v)(2r^2+3kv)=2r^2k+3k^2v-4r^2v-6v^2k$

4 $3Z^3-\sqrt{18}\,Z^2+Z-\sqrt{2}=(3Z^3+Z)+(-\sqrt{18}\,Z^2-\sqrt{2})$
$=(3Z^3+Z)+(-3\sqrt{2}\,Z^2-\sqrt{2})$
$=Z(3Z^2+1)-\sqrt{2}(3Z^2+1)=(3Z^2+1)(Z-\sqrt{2})$

التحقق : $(3Z^2+1)(Z-\sqrt{2})=3Z^3-3\sqrt{2}Z^2+Z-\sqrt{2}$

Q4/ Factor each expression by using the property of grouping with the inverse:

1 $21y^3-7y^2+3-9y=(21y^3-7y^2)+(3-9y)=7y^2(3y-1)+3(1-3y)$
$=7y^2(3y-1)+3(-1)(3y-1)=7y^2(3y-1)-3(3y-1)=(3y-1)(7y^2-3)$

2 $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3+5-10x=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3\right)+(5-10x)=\frac{1}{2}x^3\left(x-\frac{1}{2}\right)+5(1-2x)$
$=\frac{1}{4}x^3(2x-1)+5(1-2x)=\frac{1}{4}x^3(2x-1)-5(2x-1)=(2x-1)\left(\frac{1}{4}x^3-5\right)$

3 $6Z^3-9Z^2+12-8Z=(6Z^3-9Z^2)+(12-8Z)=3Z^2(2Z-3)+4(3-2Z)$
$=3Z^2(2Z-3)+4(-1)(2Z-3)$
$=3Z^2(2Z-3)-4(2Z-3)=(2Z-3)(3Z^2-4)$

4 $5t^3-15t^2-2t+6=(5t^3-15t^2)+(-2t+6)=5t^2(t-3)+2(-t+3)$
$=5t^2(t-3)+2(-1)(t-3)=5t^2(t-3)-2(t-3)=(t-3)(5t^2-2)$

Solve the Exercises

Q1/ Factor each expression by using the greater common factor(GCF), then check the correction of solution

1 $12y^3 - 21y^2 = 3y^2(4y - 7)$ التحقق : $3y^2(4y - 7) = 12y^3 - 21y^2$	2 $5t^3 + 10t^2 - 15t = 5t(t^2 + 2t - 3)$ التحقق : $5t(t^2 + 2t - 3) = 5t^3 + 10t^2 - 15t$
3 $6v^2(3v - 6) + 18v = 18v^3 - 36v^2 + 18v$ $= 18v(v^2 - 2v + 1)$ التحقق : $18v(v^2 - 2v + 1) = 18v^3 - 36v^2 + 18v$ $= 6v^2(3v - 6) + 18v$	

Q2/ Factor each expression by using the binomial as a greater common factor:

1 $\frac{1}{7}(y + 1) + \frac{1}{3}y^2(y + 1) = (y + 1)\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}y^2\right)$

Q3/ Factor each expression by using the property of grouping, then check the correction solution:

1 $5x^3 - 10x^2 + 10x - 20 = (5x^3 - 10x^2) + (10x - 20)$
$= 5x^2(x - 2) + 10(x - 2) = (x - 2)(5x^2 + 10)$

التحقق : $(x - 2)(5x^2 + 10) = 5x^3 + 10x - 10x^2 - 20 = 5x^3 - 10x^2 + 10x - 20$

2 $3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k = (3t^3k + 9k^2s) + (-6t^3s - 18s^2k)$
$= 3k(t^3 + 3ks) - 6s(t^3 - 3ks) = (t^3 + 3ks)(3k - 6s)$

التحقق $(t^3 + 3ks)(3k - 6s) = 3t^3k - 6t^3s + 9k^2s - 18s^2k = 3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k$

Q4/ Factor the expression by using the property of grouping with inverse:

1 $12x^3 - 4x^2 + 3 - 9x = (12x^3 - 4x^2) + (3 - 9x) = 4x^2(3x - 1) + 3(1 - 3x)$
$= 4x^2(3x - 1) + 3(-1)(3x - 1) = 4x^2(3x - 1) - 3(3x - 1)$
$= (3x - 1)(4x^2 - 3)$

Solve the problems

Q1/ Solar energy : The solar panels are the main component in the solar energy systems which generate electricity .The cells are manufactured from semiconducting materials such as silicon. They absorb the light of sun . What are the dimensions of the solar panel , if its area was $3x(x-4)-22(x-4)$square meter..

Sol./

$$A = 3x(x-4)-22(x-4) = (x-4)(3x-22)$$

ابعاد اللوح الشمسي هي : $(x-4)\,,(3x-22)$

Q2/ Flamenco bird: Flamenco bird is one of the migratory birds which has beautiful shape . Its color is pink. These birds travel for long distances during the season of the annual migration passing by the marshes in the south of Iraq to get food from the water pools. If the area of the water pool which was covered by the flamenco birds in one of the Iraqi marshes is $4y^2+14y+7(2y+7)$ square meter. What is the shape of that pool, and what are its dimensions ?

Sol./

$$A = 4y^2+14y+7(2y+7) = 2y(2y+7)+7(2y+7) = (2y+7)(2y+7) = (2y+7)^2$$

شكل المسطح هو مربع . أبعاد المسطح هو : $(2y+7)\,,(2y+7)$

Q3/ Baghdad o, clock : It is a high building which has a Four_ Faces o, clock at the top of it.This building locates in the celebration park in Baghdad . It was established in 1994 .What is the radius of the internal circle of the o, clock if you know that its area is $Z^2\pi-3Z\pi-\pi(3Z-9)$.

Sol./

$$A = Z^2\pi-3Z\pi-\pi(3Z-9) = Z\pi(Z-3)-3\pi(Z-3) = (Z-3)(Z\pi-3\pi)$$

$$A = (Z-3)\pi(Z-3) \quad\Rightarrow\quad A = \pi(Z-3)^2 \quad , \quad A = r^2\pi$$

$$r^2\pi = \pi(Z-3)^2 \quad \}\ \div\pi$$

$$\frac{r^2\pi}{\pi} = \frac{\pi(Z-3)^2}{\pi} \quad\Rightarrow\quad r^2 = (Z-3)^2 \quad\Rightarrow\quad r = (Z-3)$$ نصف القطر

Think

Q1/ Challenge: Factor of the following expressions in a simplest form:

i) $5x^5y+7y^3Z-10x^5Z-14Z^2y^2 = (5x^5y-10x^5Z)+(7y^3Z-14Z^2y^2)$

$$= 5x^5(y-2Z)+7y^2Z(y-2z) = (y-2Z)(5x^5+7y^2Z)$$

Q2/ Correct the mistake: Ibtisam had written the result of factoring the following expression, as follow:

$$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}\,t^3 + t^2 - \sqrt{12}\,t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}\,t^2 - t)$$

Discover the mistake of Ibtisam and correct it.

Sol./

$$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}\,t^3 + t^2 - \sqrt{12}\,t = (\sqrt{2}t^4 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\,t^3) + (t^2 - 2\sqrt{3}\,t)$$
$$= \sqrt{2}\,t^3(t - 2\sqrt{3}) + t(t - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{2}\,t^3 + t)(t - 2\sqrt{3})$$

Q3/ Numerical sense: What is the unknown number in this expression.

$$x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + ?\ )$$

Sol./

$$x^2 + 3x + 5x + 15 = (x^2 + 3x) + (5x + 15) = x(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x + 5)$$

العدد المجهول هو : 5

سؤال: اكتب: ناتج طرح المقدار : $(x + y)(x - y)$ من المقدار : $(x + y)(x + y)$ بأبسط صورة

الحل

$$(x + y)(x + y) - (x + y)(x - y) = x^2 + xy + yx + y^2 - (x^2 - y^2)$$
$$= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2 = 2xy + 2y^2 = 2y(x + y)$$

الطريقة الثانية :

$$(x + y)(x + y) - (x + y)(x - y) = (x + y)[x + y - (x - y)]$$
$$= (x + y)(x + y - x + y) = (x + y)2y$$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من صحة الحل :

$$4x^2 + 14x - 30 = 2(2x^2 + 7x - 15) = 2(2x - 3)(x + 5)$$

التحقق :

$$2(2x - 3)(x + 5) = 2(2x^2 + 10x - 3x - 15) = 2(2x^2 + 7x - 15) = 4x^2 + 14x - 30$$

تدريب 1 // حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من صحة الحل :

$$\sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{3}\,(\sqrt{6}\,xZ^2 - \sqrt{12}\,xZ) = 2\sqrt{2}\,x^2Z + \sqrt{18}\,xZ^2 - \sqrt{36}\,xZ$$
$$= 2\sqrt{2}\,x^2Z + 3\sqrt{2}\,x\,Z^2 - 6xZ$$
$$= xZ(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}\,Z - 6)$$

التحقق :

$$xZ(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}\,Z - 6) = 2\sqrt{2}\,x^2Z + 3\sqrt{2}\,xZ^2 - 6xZ = \sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{18}\,xZ^2 - \sqrt{36}xZ$$
$$= \sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{3}\,(\sqrt{6}\,xZ^2 - \sqrt{12}\,xZ)$$

تأكد من فهمك

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GC) :

[1] $12x^3 + 9x^2 - 3x$

a) $3x(4x^2 + 3x + 1)$ b) $3x(4x^2 + 3x - 1)$

c) $9x(4x^2 + 3x + 1)$ d) $9x(4x^2 + 3x - 1)$

الحل

$12x^3 + 9x^2 - 3x = 3x(4x^2 + 3x - 1)$

الجواب فرع : (b)

[2] $6y^2(3y - 4) + 36y$

a) $6y(3y^2 + 4y + 6)$ b) $6y(3y^2 + 4y - 6)$

c) $6y(3y^2 - 4y - 6)$ d) $6y(3y^2 - 4y + 6)$

الحل

$6y^2(3y - 4) + 36y$

$= 18y^3 - 24y^2 + 36y = 6y(3y^2 - 4y + 6)$

الجواب فرع : (d)

سؤال: حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

[3] $3Z(Z - 3) - 7(Z - 3)$

a) $(Z + 3)(3Z - 7)$ b) $(Z - 3)(3Z + 7)$

c) $(Z - 3)(3Z - 7)$ d) $(Z + 3)(3Z + 7)$

الحل

$3Z(Z - 3) - 7(Z - 3) = (Z - 3)(3Z - 7)$

الجواب فرع : (c)

[5] $\sqrt{2}\,v(x - 1) - \sqrt{3}\,t(x - 1)$

a) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$ b) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$

c) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$ d) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$

الحل :

$\sqrt{2}\,v(x - 1) - \sqrt{3}\,t(x - 1) = (x - 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$

الجواب فرع : (b)

سؤال: حلل المقدار باستعمال خاصية التوزيع وتحقق من صحة الحل :

[6] $3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$

a) $(y + 3)(3y^2 + 5)$ b) $(y - 3)(3y^2 - 5)$

c) $(y - 3)(3y^2 + 5)$ d) $(y + 3)(3y^2 - 5)$

الحل

$3y^3 - 9y^2 + 5y - 15 = (3y^3 - 9y^2) + (5y - 15)$

$= 3y^2(y - 3) + 5(y - 3) = (y - 3)(3y^2 + 5)$

التحقق من صحة الحل :

$(y - 3)(3y^2 + 5) = y(3y^2 + 5) - 3(3y^2 + 5)$

$= 3y^3 + 5y - 9y^2 - 15 = 3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$

الجواب فرع : (c)

سؤال: حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس :

[8] $\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4 - 2x$

a) $(x-2)\left(\frac{1}{6}x^3 - 2\right)$ b) $(x+2)\left(\frac{1}{6}x^3 - 2\right)$

c) $(x+2)\left(\frac{1}{6}x^3 - 2\right)$ d) $(x-2)\left(\frac{1}{6}x^3 + 2\right)$

الحل

$$\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4 - 2x$$
$$= \left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right) + (4 - 2x)$$
$$= \frac{1}{6}x^3(x-2) + 2(2-x)$$
$$= \frac{1}{6}x^3(x-2) + 2(-1)(x-2)$$
$$= \frac{1}{6}x^3(x-2) - 2(x-2)$$
$$= (x-2)\left(\frac{1}{6}x^3 - 2\right)$$

الجواب فرع : (a)

[7] $20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$

a) $(5y+1)(4y^2-3)$

b) $(5y-1)(4y^2+3)$

c) $(5y-1)(4y^2-3)$

d) $(5y+1)(4y^2+3)$

الحل

$$20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$$
$$= (20y^3 - 4y^2) + (3 - 15y)$$
$$= 4y^2(5y-1) + 3(1-5y)$$
$$= 4y^2(5y-1) + 3(-1)(5y-1)$$
$$= 4y^2(5y-1) - 3(5y-1) = (5y-1)(4y^2-3)$$

الجواب فرع : (c)

Lesson [2 – 3] Factoring the Algebraic Expression by using Special Identities

[2 – 3 – 1]	Factoring the algebraic expression by the difference between two squares.

تتكون طريقة الفرق بين مربعين من قوسين أحدهما موجب والأخر سالب . أي أن :

القوس الأول = الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني = الجذر التربيعي للحد الأول – الجذر التربيعي للحد الثاني

أي أن تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين :

$$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$$

ملاحظـــــة : اذا كان المقدار بالصورة $x^2 + y^2$ فأنه لا يتحلل .

ملاحظـــــة : نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

Ex./1) Find the dimensions of football playground which its area is $x^2 - 400$ square meter ?

Sol./

$x^2 - 400 = x^2 - (20)^2 = (x + 20)(x - 20)$

So the length of the football playground is $(x + 20)$ meter and its width is $(x - 20)$ meter.

Ex./2) Factoring each of the following algebraic expressions as a difference between two squares:

1 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

2 $36y^2 - Z^2 = (6y + Z)(6y - Z)$

3 $49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$

4 $h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}\,h + \sqrt{7}\,v)(\sqrt{5}\,h - \sqrt{7}\,v)$

5 $8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2) = 2xy(2x + y)(2x - y)$

6 $2x^2 - Z^2 = (\sqrt{2}\,x + Z)(\sqrt{2}\,x - Z)$

7 $12 - t^2 = (\sqrt{12} + t)(\sqrt{12} - t) = (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

8 $\frac{1}{16}Z^4 - \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}Z^2 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{2}Z + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}Z - \frac{1}{3}\right)$

[2 – 3 – 2]	Factoring the Algebraic Expression by the Perfect square

هي تحليل مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل .

$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

يكون المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ مربعا كاملا اذا تحققت الشروط التالية :

1) يجب أن يكون أشارة الحد الأول والحد الأخير موجبة ومربع كامل (له جذر تربيعي) .

2) نطبق قانون الحد الوسط (الثاني) : $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

3) اذا كان المقدار مربعا كاملا فأن تحليله يكون : $ax^2 \pm bx + c = \left(\sqrt{ax^2} \pm \sqrt{c}\right)^2$

$\pm$ حسب إشارة الحد الوسط (الثاني) .

حيث ax^2 الحد الأول , bx : الحد الوسط (الثاني) , c : الحد الأخير (الثالث)

Ex./ Factor each of the following algebraic expressions which are in a form of a perfect square.

[1] $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
[2] $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$
[3] $16Z^2 - 8Z + 1 = (4Z-2)^2$

Ex,./ Determine which of the following algebraic expressions represents a perfect square and factor it

[1] $x^2 + 10x + 25$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(x^2)(25)}$ $= 2(x)(5) = 10x$ المقدار كامل $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$	[2] $y^2 + 14y + 36$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $by = 2\sqrt{(y^2)(36)} = 2(y)(6) = 12y \neq 14y$ المقدار ليس مربع كامل
[3] $4 - 37v + 9v^2$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $bv = 2\sqrt{(9v^2)(4)} = 2(3v)(2) = 12y \neq 37y$ المقدار ليس مربع كامل	[4] $9h^2 - 6h + 3$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $bh = 2\sqrt{(9h^2)(3)} = 2(3h)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\,h \neq 6h$ المقدار ليس مربع كامل

لإيجاد الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا نطبق قانون الحد الوسط :

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

Ex./ Write the missing term in the algebraic expression $ax^2 + bx + c$ to make it a perfect squre , then factor it

[1] $25x^2 - \cdots\cdots\cdots + 49$

Sol./

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} = 2(5x)(7) = 70x$$

$$25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$$

[2] $\cdots\cdots\cdots + 8x + 16$

Sol./

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)}$$ بتربيع الطرفين

$$64x^2 = 4(ax^2)(16) \quad \Rightarrow \quad 64x^2 = 64(ax^2)$$

$$ax^2 = \frac{64x^2}{64} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

[3] $y^2 + 14y + \cdots\cdots\cdots$

Sol./

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$14y = 2\sqrt{(y^2)(c)}$$ بتربيع الطرفين

$$196y^2 = 4y^2(c) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{196y^2}{4y^2} = 49$$

$$y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$$

Make sure of your understanding

Q1/ Factor each of the following algebraic expressions as a difference between two squares:

1 $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

2 $36 - 4x^2 = (6+2x)(6-2x)$

3 $h^2 - v^2 = (h+v)(h-v)$

4 $9m^2 - 4n^2 = (3m+2n)(3m-2n)$

5 $27x^3Z - 3xZ^3 = 3xZ(9x^2 - Z^2) = 3xZ(3x+Z)(3x-Z)$

6 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

Q2/ Factor each of the following algebraic expressions as a perfect square:

1 $y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2$

2 $9Z^2 - 6Z + 1 = (3Z-1)^2$

3 $v^2 + 2\sqrt{3}\,v + 3 = \left(v + \sqrt{3}\right)^2$

4 $4h^2 - 20h + 25 = (2h-5)^2$

3/ Determine which one of the following algebraic expressions represents a perfect square , then factor it.

11 $x^2 + 18x + 81$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(x^2)(81)}$ $= 2(x)(9) = 18x$ المقدار مربع كامل $x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	12 $16 - 14v + v^2$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(v^2)(16)}$ $= 2(v)(4) = 8v \neq 14v$ المقدار ليس مربع كامل
13 $64h^2 - 48h - 9$ *Sol./* المقدار ليس مربع كامل لأن إشارة الحد الأخير سالبة	14 $3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(4t^2)(3)}$ $= 2(2t)(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}\,t$ المقدار مربع كامل $3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2 = \left(\sqrt{3} - 2t\right)^2$

Q4/ Write the missing term in the algebraic expression $ax^2 + bx + c$ to become a perfect square, then factor it.

1 $\cdots\cdots\cdots + 14y + 49$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $14y = 2\sqrt{(ay^2)(49)}$ بتربيع الطرفين $196y^2 = 4(ay^2)(49) \Rightarrow 196y^2 = 196(ay^2)$ $ay^2 = \frac{196y^2}{196} = y^2 \Rightarrow y^2 + 14y + 49$ $= (y+7)^2$	2 $Z^2 + 4Z + \cdots\cdots\cdots$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $4Z = 2\sqrt{(Z^2)(C)}$ بتربيع الطرفين $16Z^2 = 4Z^2(C) \Rightarrow C = \frac{16Z^2}{4Z^2} = 4$ $Z^2 + 4Z + 4 = (Z+2)^2$
3 $3 - \cdots\cdots\cdots + 9x^2$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $bx = 2\sqrt{(9x^2)(3)} = 2(3x)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\,x$ $3 - 6\sqrt{3}\,x + 9x^2 = (\sqrt{3} - 3x)^2$	4 $4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \cdots\cdots\cdots$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $2\sqrt{5}\,x = 2\sqrt{(4x^2)(C)}$ بتربيع الطرفين $20x^2 = 4(4x^2)(C) \Rightarrow 20x^2 = 16x^2(C)$ $C = \frac{20x^2}{16x^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \frac{5}{4} = \left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

Solve the Exercises

Q1/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form :

1 $25 - 4x^2 = (5+2x)(5-2x)$ 2 $y^2 - 121 = (y+11)(y-11)$ 3 $12 - 3t^2 = 3(4-t^2) = 3(2+t)(2-t)$ 4 $8y^3x - 2x^3y = 2xy(4y^2 - x^2)$ $= 2xy(2y+x)(2y-x)$	5 $\frac{1}{3}Z^5 - \frac{1}{12}Z = \frac{1}{12}Z(4Z^4 - 1)$ $= \frac{1}{12}Z(2Z^2+1)(\sqrt{2}Z+1)(\sqrt{2}Z-1)$ 6 $4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$ 7 $16n^2 + 8\sqrt{3}\,n + 3 = (4n + \sqrt{3})^2$ 8 $4t^3 - 12t^2 + 9t = t(4t^2 - 12t + 9)$ $= t(2t-3)^2$

Q2/ Determine which of the following algebraic expressions represents a perfect square , then factor it:

1 $4x^2 + 18x + 16$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(4x^2)(16)}$ $= 2(2x)(4) = 16x \neq 18x$ المقدار ليس مربع كامل	2 $y^2 + 10y + 25$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} =$ $by = 2\sqrt{(y^2)(25)} = 2(y)(5) = 10y$ $y^2 + 10y + 25 = (y+5)^2$
4 $4v^2 + 4v + 4$ *Sol./* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$	3 $2h^2 - 12h - 18$ *Sol./* المقدار ليس مربع كامل لأن اشرة الحد الأخير سالبة

$bv = 2\sqrt{(4v^2)(4)} = 2(2v)(2) = 8v \neq 4v$ المقدار ليس مربع كامل	

Q3/ Write the missing term in the algebraic expression $ax^2 + bx + c$ to become a perfect square, then factor it:

1 $y^2 + \cdots\cdots\cdots + 36$ *Sol.* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $by = 2\sqrt{(y^2)(36)} = 2(y)(6) = 12y$ $y^2 + 12y + 36 = (y+6)^2$	2 $25 - 20x + \cdots\cdots$ *Sol.* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $20x = 2\sqrt{(ax^2)(25)}$ بتربيع الطرفين $400x^2 = 4(ax^2)(25) \Rightarrow 400x^2 = 100(ax^2)$ $ax^2 = \frac{400x^2}{100} = 4x^2$ $\Rightarrow 25 - 20x + 4x^2$ $= (5-2x)^2$
3 $81 + 18Z + \cdots\cdots$ *Sol.* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $18Z = 2\sqrt{(aZ^2)(81)}$ بتربيع الطرفين $324Z^2 = 4(aZ^2)(81) \Rightarrow 324Z^2 = 324(aZ^2)$ $aZ^2 = \frac{324Z^2}{324} = Z^2 \Rightarrow 81 + 18Z + Z^2$ $= (9+Z)^2$	4 $5 - \cdots\cdots + 16x^2$ *Sol.* $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $bx = 2\sqrt{(16x^2)(5)} = 2(4x)(\sqrt{5}) = 8\sqrt{5}\,x$ $5 - 8\sqrt{5}\,x + 16x^2 = (\sqrt{5} - 4x)^2$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: مئذنة الملوية : وتقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية وتعد احدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد فهي إحدى اثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها : $x^2 + 8x + 16$ متر مربع . ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟

الحل

$A = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ طول ضلع القاعدة

سؤال: مزرعة أبقار : لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر وسعها لتصبح مستطيلة الشكل الضلع الآخر فأصبحت مساحة المزرعة $x^2 - 81$ مترا مربعا . ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة x ؟

الحل

$A = x^2 - 81 = (x+9)(x-9)$

طول المزرعة $(x+)$, عرضها $(x-9)$

سؤال: لوحة فنية : رسم بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية . أيمثل مقدار مساحة اللوحة الفنية مربعا كاملا أم لا ؟

الحل

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx = 2\sqrt{(4x^2)(9)} = 2(2x)(3) = 12x$$ لا يمثل مربعا كاملا

فـــــكـــــر

سؤال: تحد : هل المقدار الاتي يمثل مربعا كاملا ام لا ؟ علل اجابتك :

i) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$

الحل

$$\boxed{\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

$$bx = 2\sqrt{\left(\frac{1}{9}x^2\right)\left(\frac{1}{16}\right)} = 2\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}x$$

المقدار مربع كامل

سؤال: أصحح الخطأ : قالت منتهى أن المقدار : $(2x+1)(2x-1)$ هو تحليل للمربع الكامل : $4x^2 - 4x + 1$ حدد خطأ منتهي وصححه .

الحل

المقدار : $(2x+1)(2x-1)$ هو ليس تحليل للمربع الكامل

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

سؤال: حس عددي : أيمثل المقدار : $9x^2 + 12x - 4$ مربعا كاملا أم لا ؟ وضح اجابتك .

الحل

المقدار لا يمثل مربعا كاملا لأن إشارة الحد الأخير (الثالث) سالبة .

سؤال: أكتب // تحليل للمقدار : $4x^2 - 8x + 4$

الحل

$$4x^2 - 8x + 4 = (2x)^2 - 2(x \times 4) + (2)^2 = (2x-2)^2$$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كفرق بين مربعين :

i) $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

ii) $25y^2 - 49 = (5y+7)(5y-7)$

تدريب 1 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كفرق بين مربعين :

i) $4x^2 - 49 = (2x+7)(2x-7)$

ii) $3x^2 - y^2 = (\sqrt{3}\,x + y)(\sqrt{3}\,x - y)$

مثال 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية كمربع كامل :

i) $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$

تدريب 2 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كمربع كامل :

$81Z^2 - 18Z + 1 = (9Z-1)^2$

اختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية :

[1] $9 - 4x^2$

a) $(3+2x)(3+2x)$ b) $(3+2x)(3-2x)$

c) $(9-x)(9+4x)$ d) $(3+x)(3-4x)$

الحل

$9 - 4x^2 = (3+2x)(3-2x)$

الجواب فرع : (b)

[2] $12y^3Z - 3yz^3$

a) $3y(2y-Z)(y+2Z)$ b) $3Z(2y-Z)(2y+Z)$

c) $3yZ(2y-Z)(2y+Z)$ d) $3yZ(y-2Z)(y+2Z)$

الحل

$12y^3Z - 3yz^3 = 3yZ(4y^2 - Z^2)$

$= 3yZ(2y-Z)(2y+Z)$

الجواب فرع : (c)

[3] $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x$

a) $\frac{x}{6}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{x}{6}\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

c) $\frac{x}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$ d) $\frac{x}{3}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)$

الحل

$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x = \frac{1}{6}x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

الجواب فرع : (a)

[4] $4x^2 + 24x + 36$

a) $(x+6)^2$ b) $(x-6)^2$

c) $4(x-3)^2$ d) $4(x+3)^2$

الحل

$4x^2 + 24x + 36 = 4(x^2 + 6x + 9) = 4(x+3)^2$

الجواب فرع : (d)

[5] $16 - 8y + y^2$

a) $(4 + 2y)^2$ b) $(4 - 2y)^2$

c) $(4 - y)^2$ d) $(4 + y)^2$

الحل

$16 - 8y + y^2 = (4 - y)^2$

الجواب فرع : (c)

سؤال: حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعا كاملا :

[6] $4x^2 - 20x + 25$

a) $2(x)(5) = 10x$ مربع كامل لأن

b) $-2(2x)(5) = -20x$ مربع كامل لأن

c) $-4(x)(5) \neq 10x$ مربع كامل لأن

d) $-2(2x)(5) \neq 20x$ ليس مربع كامل لأن

الحل

$bx = -2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = -2\sqrt{(4x^2)(25)} = -2(2x)(5)$

$= -20x$ مربع كامل

الجواب فرع : (b)

[7] $64 - 48y + 9y^2$

a) $2(4)(3y) \neq -48y$ ليس مربع كامل لأن

b) $2(8)(4y) = 48y$ مربع كامل لأن

c) $-2(8)(3y) = -48y$ مربع كامل لأن

d) $-4(4)(3y) \neq -48y$ ليس مربع كامل لأن

الحل

$bx = -2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$by = -2\sqrt{(9y^2)(64)} = -2(3y)(8)$

$= -48y$ مربع كامل لأن

الجواب فرع : (c)

سؤال: اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا :

[8] $Z^2 + \cdots\cdots + 49$

a) $14Z$ b) $-14Z$ c) $7Z$ d) $-7Z$

الحل

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bZ = 2\sqrt{(Z^2)(49)} = 2(Z)(7) = 14Z$

الجواب فرع : (a)

[9] $16y^2 + 40y + \cdots\cdots$

a) 9 b) 25 c) -9 d) -25

الحل

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$40y = 2\sqrt{(16y^2)(c)}$ بتربيع الطرفين

$1600y^2 = 4(16y^2)(c)$

$1600y^2 = 64y^2(c)$

$c = \frac{1600y^2}{64y^2} = 25$

الجواب فرع : (b)

Lesson $[2-4]$ Factoring the Algebraic Expression of three terms by Probe and Error (Experiment).

$[2-4-1]$	Factoring the algebraic expression x^2+bx+c

طريقة حل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة :

1. تتكون من قوسين صغيرين نضع إشارة الحد الثاني في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في القوس الثاني .
2. نحلل الحد الأول الى حاصل ضرب حدين متشابهين ووضع كل حد في بداية كل قوس .
3. نحلل الحد الأخير (الثالث) الى حاصل ضرب عددين حيث اذا كانت الإشارات متشابهة نجمع أما اذا كانت الاشارات مختلفة نطرح.
4. للتأكد من صحة الحل يجب ان يكون حاصل ضرب القريب مع القريب $\pm$ حاصل ضرب البعيد في البعيد $=$ الحد الوسط

Ex./ What are the dimensions of the painting of winged bull which its area is $x^2+10x+21$ centimeter squar?

Sol./

$x^2+10x+21=(x+3)(x+7)$ $\qquad +7x+3x=+10x$: الحد لوسط

Ex./ Factoring the following algebraic expression in a simplest form:

[1] $y^2+y-12=(y+4)(y-3)$ $\qquad -3y+4y=+y$: الحد الوسط

[2] $x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$ $\qquad -6x-3x=-9x$: الحد الوسط

[3] $y^2+6y-27=(y+9)(y-3)$ $\qquad -3y+9y=+6y$: الحد الوسط

[4] $x^2-xy-20y^2=(x-5y)(x+4y)$ $\qquad +4xy-5xy=-xy$: الحد الوسط

[5] $15-8Z+Z^2=(5-Z)(3-Z)$ $\qquad -5Z-3Z=-8Z$: الحد الوسط

: [2 – 4 – 2]	Factoring the algebraic expression $ax^2 + bx + c$ where a ≠ 0

Ex./ Factoring each of the following algebraic expressions :

[1] $6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$ $\quad +14x + 3x = +17x$: الحد الوسط

[2] $7y^2 - 26y - 8 = (y - 4)(7y + 2)$ $\quad +2y - 28y = -26y$: الحد الوسط

[3] $3Z^2 - 17Z + 10 = (3Z - 2)(Z - 5)$ $\quad -15Z - 2Z = -17Z$: الحد الوسط

[4] $4v^2 - v - 3 = (v - 1)(4v + 3)$ $\quad +3V - 4V = -V$: الحد الوسط

[5] $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$ $\quad +5h + 6h = +11h$: الحد اوسط

[6] $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$ $\quad -9xy - xy = -10xy$: الحد الوسط

[7] $6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x - 7)(2x - 3)$

$-3x - 14x = -17x$: الحد الوسط

Make sure of your understanding

Q1/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form:

1	$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$	4	$3 + 2Z - Z^2 = (1 + Z)(3 - Z)$
2	$1 - 2Z + Z^2 = (1 - Z)(1 - Z)$	5	$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$
3	$x^2 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 12)$	6	$15 - 8Z + Z^2 = (5 - Z)(3 - Z)$

Q2/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form:

1	$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$	5	$5y^2 - y - 6 = (5y - 6)(y + 1)$
2	$3y^2 - 14y + 8 = (3y - 2)(y - 4)$	6	$6 + 29Z - 5Z^2 = (1 + 5Z)(6 - Z)$
3	$3x^2 - 10x + 8 = (3x - 4)(x - 2)$	7	$x^2 - 9xy + 20y^2 = (x - 4y)(x - 5y)$
4	$8 - 25Z + 3Z^2 = (8 - Z)(1 - 3Z)$	8	$3y^2 - 19yx - 14x^2 = (y - 7x)(3y + 2x)$

Q3/ Put the signs between the terms in brackets to make the factoring of the algebraic expression correct:

1	$x^2 + 9x + 20 = (x + 5)(x + 4)$	3	$y^2 - 12y + 20 = (y - 2)(y - 10)$
2	$6x^2 - 7x + 2 = (2x - 1)(3x - 2)$	4	$20 - 7y - 3y^2 = (5 - 3y)(4 + y)$

Solve the Exercises

Q1/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form:

1 $x^2 + 9x + 14 = (x+7)(x+2)$	3 $3 + 2Z - Z^2 = (1+Z)(3-Z)$
2 $y^2 - 5y + 6 = (y-3)(y-2)$	4 $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

Q2/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form:

1 $2x^2 + 12x - 14 = 2(x^2 + 6x - 7)$ $= 2(x+7)(x-1)$	5 $13y^2 - 11y - 2 = (y-1)(13y+2)$
2 $4y^2 - 6y + 2 = 2(2y^2 - 3y + 1)$ $= 2(2y-1)(y-1)$	6 $50 - 20Z + 2Z^2 = 2(25 - 10Z + Z^2)$ $= 2(5-Z)(5-Z)$
3 $10 + 9Z - 9Z^2 = (2+3Z)(5-3Z)$ $= 2(3y-2)(3y+1)$	
4 $2x^2 + 3x + 1 = (2x+1)(x+1)$	

Q3/ Put the signs between the terms in brackets to make the factoring of the algebraic expression correct:

1 $x^2 + x - 20 = (x-4)(x+5)$	2 $35 + 3y - 2y^2 = (5-y)(7+2y)$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: قلعة الأخيضر : قلعة الأخيضر هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمة الى يومنا هذا الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل . ما أبعاد هذا السور الذي يحيط بالقلعة التي مساحتها $6x^2 - 39x + 60$ مترا مربعا؟

الحل

$$6x^2 - 39x + 60 = 3(2x^2 - 13x + 20) = 3(2x-5)(x-4)$$

أبعاد السور هو : $(2x-5)$, $(x-4)$

سؤال: العاب ترفيهية: تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في مدينة الألعاب ويمثل المقدار $5t^2 + 5t - 3$ مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الألعاب اذ t يمثل زمن الحركة . وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتها في المرة الأولى . حلل المقدار .

الحل

$$5t^2 + 5t - 30 = 5(t^2 + t - 6) = 5(t+6)(t-5)$$

سؤال: مترو الأنفاق : يعد مترو الأنفاق نظام سكك حديد تحت الأرض تسير القطارات وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة وذات الكثافة السكانية العالية ويتألف كل قطار من عدة عربات فإذا كان المقدار : $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة أرضية العربة بالمتر المربع فما أبعادها ؟

الحل

$14y^2 - 23y + 3 = (7y - 1)(2y - 3)$

أبعاد العربة هي : $(7y - 1)$, $(2y - 3)$

Think

Q1/ Challenge: Factor of the following algebraic expressions in simplest form:

i) $4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = (4x^3 + 4x^2) + (-9x - 9) = 4x^2(x + 1) - 9(x + 1)$

$= (x + 1)(4x^2 - 9) = (x + 1)(2x + 3)(2x - 3)$

سؤال: أصحح الخطأ : حلل سعد المقدار : $6Z^2 - 16Z - 6$ كما يأتي :

$6Z^2 - 16Z - 6 = (3Z - 1)(2Z + 6)$ اكتشف خطأ سعد وصححه .

الحل

خطأ الحد الوسط $+18Z - 2Z = +16Z \neq -16Z$

الحد الوسط : $+ 2Z - 18Z = -16Z$ $\quad 6Z^2 - 16Z - 6 = (2Z - 6)(3Z + 1)$

سؤال: حس عددي : أيمكن تحديد ما اذا كانت إشارات القوسين في تحليل المقدار : $x^2 - 12x + 35$ مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار ؟ وضح اجابتك .

الحل

تكون إشارة القوسين متشابهة (سالبة) حيث نضع إشارة الحد الثاني $(-)$ في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في القوس الثالث $(-)$

سؤال: أكتب // الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

$6Z^2 + 5Z - 56 = (3Z \cdots 8)(2Z \cdots 7)$

الحل

الحد الوسط : $+ 21Z - 16Z = +5Z$ $\quad 6Z^2 + 5Z - 56 = (3Z - 8)(2Z + 7)$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$ الحد الوسط : $3x - 4x = -x$

ii) $y^2 - 8y + 15 = (y-5)(y-3)$ الحد الوسط : $-3y - 5y = -8y$

تدريب 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $y^2 - y - 20 = (y-5)(y+4)$ الحد الوسط : $+4y - 5y = -y$

ii) $x^2 - 17x + 30 = (x-15)(x-2)$ الحد الوسط : $-2x - 15x = -17x$

مثال 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $5x^2 + 13x - 6 = (x+3)(5x-2)$ الحد الوسط : $-2x + 15x = +13x$

تدريب 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $7 - 23Z + 6Z^2 = (7-2Z)(1-3Z)$ الحد الوسط : $-21Z - 2Z = -23Z$

اختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

[1] $x^2 + 7x + 12$ a) $(x-3)(x+4)$ b) $(x+3)(x+4)$ c) $(x-1)(x+7)$ d) $(x-3)(x-4)$ الحل : $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$ الجواب فرع : (b)	[2] $x^2 - 5x - 36$ a) $(x-6)(x+6)$ b) $(x+12)(x-3)$ c) $(x-9)(x+4)$ d) $(x+9)(x-4)$ الحل : $x^2 - 5x - 36 = (x-9)(x+4)$ الجواب فرع : (c)
[3] $y^2 + 4y - 21$ a) $(y-7)(y+3)$ b) $(y+7)(y-3)$ c) $(y-7)(y-3)$ d) $(y+7)(y+3)$ الحل : $y^2 + 4y - 21 = (y+7)(y-3)$ الجواب فرع : (b)	[4] $4x^2 + 10x + 6$ a) $(x-6)(4x+1)$ b) $(4x+2)(x-3)$ c) $(4x-6)(x-1)$ d) $(2x+3)(2x+2)$ الحل : $4x^2 + 10x + 6 = (2x+3)(2x+2)$ الجواب فرع : (d)
[5] $24y^2 - 2y - 1$ a) $(4y-1)(6y+1)$ b) $(2y-1)(12y-1)$ c) $(4y+1)(6y-1)$ d) $(3y-1)(8y+1)$	[6] $10x^2 - 11x + 1$ a) $(5x-1)(2x+1)$ b) $(10x+1)(x-1)$ c) $(5x+1)(2x-1)$ d) $(10x-1)(x-1)$

الحل : $10x^2 - 11x + 1 = (10x - 1)(x - 1)$ الجواب فرع : (d)	الحل : $24y^2 - 2y - 1 = (4y - 1)(6y + 1)$ الجواب فرع : (a)
	[7] $22 + 3Z - 4Z^2$ a) $(11 + 4Z)(2 - Z)$ b) $(22 - 4Z)(1 + Z)$ c) $(11 - 4Z)(2 + Z)$ d) $(22 + 8Z)(1 - Z)$ الحل : $22 + 3Z - 4Z^2 = (11 - 4Z)(2 + Z)$ الجواب فرع : (c)

سؤال: ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً :

[9] $4y^2 - 2y - 12 = (2y \cdots 3)(2y \cdots 4)$ a) $(2y - 3)(2y + 4)$ b) $(2y + 3)(2y + 4)$ c) $(2y - 3)(2y - 4)$ d) $(2y + 3)(2y - 4)$ الجواب فرع : (d)	[8] $x^2 + 15x + 26 = (x \cdots 2)(x \cdots 13)$ a) $(x - 2)(x - 13)$ b) $(x - 2)(x + 13)$ c) $(x + 2)(x + 13)$ d) $(x + 2)(x - 13)$ الجواب فرع : (c)
	[10] $48 - 30Z + 3Z^2 = (6 \cdots 3Z)(8 \cdots Z)$ a) $(6 - 3Z)(8 - Z)$ b) $(6 + 3Z)(8 + Z)$ c) $(6 - 3Z)(8 + Z)$ d) $(6 + 3Z)(8 - Z)$ الجواب فرع : (a)

Lesson [2-5] Factoring the Algebraic Expression, sum of two cubes or difference between two cubes.

[2 – 5 – 1]	Factoring the algebraic expression, sum of two cubes.

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$1 = 1^3 \ , \quad 8 = 2^3 \ , \quad 27 = 3^3 , 64 = 4^3 \ , \quad 125 = 5^3 , \ 216 = 6^3$$

Ex./ What is the sum of two volumes of two cubes of Rubik . The side length of the first cube is 3 cm, while the side length of the second one is 4 cm.

Sol./

The volume of cube ie $V = L^3$

$$v_1 + v_2 = 3^3 + 4^3 = (3+4)(3^2 - 3 \times 4 + 4^2)$$
$$= (7)(9 - 12 + 16) = (7)(13) = 91 \text{ cm}^3$$

Ex./ Factor each of the following expressions in simplest form:

[1] $x^3 + 5^3 = (x+5)(x^2 - 5x + 5^2) = (x+5)(x^2 - 5x + 25)$

[2] $y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$

[3] $8Z^3 + 27 = 2^3Z^3 + 3^3 = (2Z+3)(4Z^2 - 6Z + 9)$

[4] $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

[5] $\frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \frac{3^3}{x^3} + \frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$

[6] $\frac{1}{2}y^3 + 4 = \frac{1}{2}(t^3 + 8) = \frac{1}{2}(t^3 + 2^3) = \frac{1}{2}(t+2)(t^2 - 2t + 4)$

[7] $0.125 + v^3 = (0.5)^3 + v^3 = (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

[2 – 5 – 2]	Factoring the Algebraic Expression difference between two cubes

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$1 = 1^3 \ , \quad 8 = 2^3 \ , \quad 27 = 3^3 \ , \quad 64 = 4^3 \ , \quad 125 = 5^3 \ , \quad 216 = 6^3$$

Ex./ Cube –shaped basin filled with water, the length of its side is 1m . The water was transferred to another cube – shaped basin which is bigger than the first one, the length of its side is 1.1 m. What is the additional quantity of water thah we need to fill the big basin ?

Sol./

كمية الماء الإضافية اللازمة = حجم المكعب الكبير – حجم المكعب الصغير

the additional quantity of water = the volume of big cube - the volume of small cube.

$$v_1 - v_2 = (1.1)^3 - 1^3 = (1.1 - 1)[(1.1)^2 - 1.1 \times 1 + 1^2]$$
$$= (0.1)(1.21 + 1.1 + 1) = (0.1)(3.31) = 0.331m^3$$

Ex./ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form:

[1] $x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

[2] $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

[3] $27Z^3 - 8 = 3^3Z^3 - 2^3 = (3Z - 2)(9Z^3 + 6Z + 4)$

[4] $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$

[5] $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(t - 3)(t^2 + 3t + 9)$

[6] $0.216 - n^3 = (0.6)^3 - n^3 = (0.6 - n)(0.36 + 0.6n + n^2)$

[7] $1 - 0.125Z^3 = 1^3 - (0.5)^3Z^3 = (1 - 0.5Z)(1 + 0.5Z + 0.25Z^2)$

[8] $32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3) = \frac{1}{2}(4^3 - m^3) = \frac{1}{2}(4 - m)(16 + 4m + m^2)$

Make sure of your understanding

Q1/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form :

1 $y^3 + 216 = y^3 + 6^3 = (y+6)(y^2 - 6y + 36)$

2 $x^3 + Z^3 = (x+Z)(x^2 - xZ + Z^2)$

3 $125 + 8Z^3 = 5^3 + 2^3Z^3 = (5+2Z)(25 - 10Z + 4Z^2)$

4 $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8} = \frac{1}{3^3}x^3 + \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right)$

5 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

6 $\frac{1}{3}t^3 + 9 = \frac{1}{3}(y^3 + 27) = \frac{1}{3}(t^3 + 3^3) = \frac{1}{3}(t+3)(t^2 - 3t + 9)$

7 $0.125 + v^3 = (0.5)^3 + v^3 = (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

8 $1 + 0.008Z^3 = 1^3 + (0.2)^3Z^3 = (1 + 0.2Z)(1 - 0.2Z + 0.04Z^2)$

Q2/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form :

1 $a^3 - 8^3 = (a-8)(a^2 + 8a + 64)$

2 $8y^3 - 64 = 8(y^3 - 8) = 8(y^3 - 2^3) = 8(y-2)(y^2 + 2y + 4)$

3 $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{c^3} - \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{4}\right)$

4 $\frac{1}{2}v^3 - 4 = \frac{1}{2}(v^3 - 8) = \frac{1}{2}(v^3 - 2^3) = \frac{1}{2}(v-2)(v^2 + 2v + 4)$

5 $0.125 - m^3 = (0.5)^3 - m^3 = (0.5 - m)(0.25 + 0.5m + m^2)$

6 $25 - \frac{1}{5}n^3 = \frac{1}{5}(125 - n^3) = \frac{1}{5}(5^3 - n^3) = \frac{1}{5}(5-n)(25 + 5n + n^2)$

7 $3b^3 - 81 = 3(b^3 - 27) = 3(b^3 - 3^3) = 3(b-3)(b^2 + 3b + 9)$

8 $0.216v^3 - 0.008t^3 = (0.6)^3v^3 - (0.2)^3t^3 = (0.6v - 0.2t)(0.36v^2 + 0.12vt + 0.04t^2)$

Solve the Exercises

Q1/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form :

1 $6^3 + x^3 = (6 + x)(6 - 6x + x^2)$

2 $125y^3 + 1 = 5^3y^3 + 1^3 = (5y + 1)(25y^2 - 5y + 1)$

3 $\frac{1}{64} + \frac{8}{125}y^3 = \frac{1}{4^3} + \frac{2^3}{5^3}y^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}y\right)\left(\frac{1}{16} - \frac{2}{20}y + \frac{4}{25}y^2\right)$

4 $\frac{1}{5}v^3 + 25 = \frac{1}{5}(v^3 + 125) = \frac{1}{5}(v^3 + 5^3) = \frac{1}{5}(v + 5)(v^2 - 5v + 25)$

5 $0.027 + 27n^3 = (0.3)^3 + 3^3n^3 = (0.3 + 3n)(0.09 + 0.9n + 9n^2)$

6 $0.125x^3 + 0.008y^3 = (0.5)^3x^3 + (0.2)^3y^3 = (0.5x + 0.2y)(0.25x^2 - 0.1xy + 0.04y^2)$

Q2/ Factor each of the following algebraic expressions in simplest form :

1 $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

2 $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8} = \frac{1}{x^3} - \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x} + \frac{9}{4}\right)$

3 $9 - \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{3}(27 - n^3) = \frac{1}{3}(3^3 - n^3) = \frac{1}{3}(3 - n)(9 + 3n + n^2)$

4 $0.001 - v^3 = (0.1)^3 - v^3 = (0.1 - v)(0.01 + 0.1v + v^2)$

5 $0.001x^3 - 0.008y^3 = (0.1)^3x^3 - (0.2)^3y^3$
$= (0.1x - 0.2y)(0.01x^2 + 0.02xy + 0.04y^2)$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: مكتبة : مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في المانيا كما أنها من أكثر المكتبات تماشيا مع متطلبات التعليم الحديثة . بناية المكتبة على شكل مكعب طول ضلعه $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر. حلل المقدار الذي يمثل طول الضلع .

الحل

$$\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{27}{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 27) = \frac{1}{2}(y^3 - 3^3) = \frac{1}{2}(y-3)(y^2 + 3y + 9)$$

سؤال: حوض سمك : حوض سمك الزينة حجمه $25x^3$ مترا مكعبا وضع في داخل حجر مكعب الشكل حجمه $\frac{1}{5}$ متر مكعب ملئ بالماء كاملا . اكتب مقدار حجم الماء ثم حلله .

الحل

$$25x^3 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(125x^3 + 1) = \frac{1}{5}(5^3x^3 + 1^3) = \frac{1}{5}(5x+1)(25x^2 - 5x + 1)$$

سؤال: سكن : بدأت المنازل تأخذ أشكالا مختلفة في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصممت هذه المنازل عل شكل مكعبات . فاذاكان حجم المنزل الأول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب . اكتب حجم المنزلين معا ثم حلل المقدار

الحل

$$v_1 + v_2 = \frac{8}{a^3} + \frac{27}{b^2} = \frac{2^3}{a^3} + \frac{3^3}{b^3} = \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)\left(\frac{4}{a^2} - \frac{6}{ab} + \frac{9}{b^3}\right)$$

Think

Q1/ Challenge: Factor of the following algebraic expressions in simplest form:

i) $0.002Z^3 - 0.016y^3 = 0.002(Z^3 - 8y^3) = 0.002(Z^3 - (2)^3y^3)$

$= 0.002(Z - 2y)(Z^2 + 2Zy + 4y^2)$

Q2/ Correct the mistake: Bushra factored the expression $8v^3 - 0.001$,as follows :

$$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01):$$

Discover Bushra, s mistake, then correct it.

Sol./

$$8v^3 - 0.001 = 2^3v^3 - (0.1)^3 = (2v - 0.1)(4v^2 + 0.2v + 0.01)$$

سؤال: حس عددي : هل يمكن جمع العددين 8, 27 بطريقة تحليل مجموع مكعبين ؟ وضح اجابتك

الحل نعم

$$8+27=2^3+3^3=(2+3)(4-6+9)=(5)(7)=35$$

سؤال: اكتب // الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

$$125-x^3=(5\cdots x)(25\cdots 5x\cdots x^2)$$

الحل

$$125-x^3=(5-x)(25+5x+x^2)$$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^3+5^3=(x+5)(x^2-5x+25)$

ii) $8Z^3+27=2^3Z^3+3^3=(2Z+3)(4Z^2-6Z+9)$

iii) $\frac{1}{Z^3}+\frac{1}{64}=\frac{1}{Z^3}+\frac{1}{4^3}=\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

تدريب 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

ii) $8Z^3+125=2^3Z^3+5^3=(2Z+5)(4Z^2-10Z+25)$

ii) $x^3-64=x^3-4^3=(x-4)(x^2+4x+16)$

iv) $\frac{1}{Z^3}-\frac{1}{27}=\frac{1}{Z^3}-\frac{1}{3^3}=\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{3Z}+\frac{1}{9}\right)$

أختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

[1] $8+x^3$ a) $(2-x)(4+2x+x^2)$ b) $(2+x)(4-2x+x^2)$ c) $(2-x)(4-2x+x^2)$ d) $(2+x)(4+2x+x^2)$ الجواب فرع : (b)	[2] $8y^3+27$ a) $(2y+3)(4y^2+6y+9)$ b) $(2y-3)(4y^2+6y+9)$ c) $(2y+3)(4y^2-6y+9)$ d) $(2y-3)(4y^2-6y+9)$ الجواب فرع : (c)

[3] $\frac{1}{Z^3}+\frac{1}{64}$

a) $\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

b) $\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

c) $\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

d) $\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

الجواب فرع : (d)

[4] $\frac{27}{125}+\frac{8}{x^3}$

a) $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}+\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

a) $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}-\frac{4}{x^2}\right)$

الجواب فرع : (c)

[5] $0.027+Z^3$

a) $(0.03+Z)(0.09-0.3Z+Z^2)$

b) $(0.03+Z)(0.009-0.03Z+Z^2)$

c) $(0.3+Z)(0.9-0.3Z+Z^2)$

d) $(0.3+Z)(0.09-0.3Z+Z^2)$

الجواب فرع : (c)

[6] $\frac{8}{y^3}-\frac{1}{27}$

a) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}-\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

b) $\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}-\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

c) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}+\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

d) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}+\frac{2}{3y}-\frac{1}{9}\right)$

الجواب فرع : (c)

[7] $9-\frac{1}{3}Z^3$

a) $\frac{1}{3}(3-Z)(9+3Z-Z^2)$

b) $\frac{1}{3}(3-Z)(9+3Z+Z^2)$

c) $\frac{1}{3}(3+Z)(9+3Z+Z^2)$

d) $\frac{1}{3}(3-Z)(9-3Z+Z^2)$

الجواب فرع : (b)

[8] $0.008x^3-1$

a) $(0.02x-1)(0.04x^2+0.002x+1)$

b) $(0.02x-1)(0.04x^2+0.02x+1)$

c) $(0.2x+1)(0.4x^2-0.2x+1)$

d) $(0.2x-1)(0.04x^2+0.2x+1)$

الجواب فرع : (d)

Lesson [2-6] Simplifying Rational Algebraic Expressions

[2 − 6 − 1] Simplifying the multiplying and dividing of rational algebraic

ملاحظـــــــــة :

1) نحلل كل حدودية بطرق التحليل السابقة للبسط والمقام .

2) اذا وجدت علامة القسمة (÷) نبدل القسمة الى ضرب (×) وقلب الحد ما بعد القسمة .

3) نختصر الحدود المتشابهة بين البسط والمقام .

4) نضرب البسط في البسط والمقام في المقام .

Ex./ Write the cost ratio of one flower bouqued to the total cost of the bouquets in a simplest form.

Sol./

$$\frac{\text{cost of one bouquet}}{\text{cost of total bouquet}} = \frac{2x-6}{x^2-x-6} = \frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

Ex./ Write each of the following expressions in simplest form:

[1] $$\frac{y^2-4}{y^2-4y+4} = \frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)(y-2)} = \frac{y+2}{y-2}$$

[2] $$\frac{5Z+10}{Z-3} \times \frac{Z^3-27}{Z^2+6Z+8} = \frac{5\cancel{(Z+2)}}{\cancel{Z-3}} \times \frac{\cancel{(Z-3)}(Z^2+2Z+9)}{\cancel{(Z+2)}(Z+4)} = \frac{5(Z^2+3Z+9)}{Z+4}$$

[3] $$\frac{16-x^2}{3x+5} \times \frac{3x^2+2x-5}{x^2+3x-4} = \frac{\cancel{(4+x)}(4-x)}{\cancel{3x+5}} \times \frac{\cancel{(3x+5)}(x-1)}{\cancel{(x+4)}(x-1)} = 4-x$$

[4] $$\frac{8+t^3}{4-2t+t^2} \div \frac{(2+t)^3}{t^2+9t+14} = \frac{8+t^3}{4-2t+t^2} \times \frac{t^2+9t+14}{(2+t)^3}$$

$$= \frac{\cancel{(2+t)}\cancel{(4-2t+t^2)}}{\cancel{4-2t+t^2}} \times \frac{\cancel{(t+2)}(t+7)}{\cancel{(2+t)}^2(2+t)} = \frac{t+7}{2+t} = \frac{t+7}{t+2}$$

[2 − 6 − 2]	Simplyfing adding and subtracting of the rational algebraic expressions.

خطوات الحل :

1) نحلل البسط والمقام بأحدي طرق التحليل السابقة ونختصر العوامل المتشابهة بين بسط ومقام نفس الحدودية .

2) نلاحظ المقامات اذا كانت متشابهة نجري عملية الجمع أو الطرح للبسط وبأخذ احدى المقامات .

3) اذا كانت المقامات مختلفة (غير متشابهة) نوحدها ذلك بأخذ المضاعف المشترك الأصغر للمقامات وبدون تكرار واستخراج البسط الجديد

Ex./ Write the rational algebraic expression in simplest form.

[1] $\frac{y^2}{y+2} - \frac{4}{y+2} = \frac{y^2-4}{y+2} = \frac{(y+2)(y-2)}{y+2} = y - 2$

[2] $\frac{7x-14}{x^2-4} + \frac{5}{x+2} = \frac{7\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} + \frac{5}{x+2} = \frac{7}{x+2} + \frac{5}{x+2} = \frac{7+5}{x+2} = \frac{12}{x+2}$

[3] $\frac{4Z}{2Z-5} - \frac{Z}{Z+3} = \frac{4Z(Z+3) - Z(2Z-5)}{(2Z-5)(Z+3)} = \frac{4Z^2 + 12Z - 2Z^2 + 5Z}{(2Z-5)(Z+3)}$

$= \frac{2Z^2+17Z}{(2Z-5)(Z+3)} = \frac{Z(2Z+17)}{(2Z-5)(Z+3)}$

[4] $\frac{t^2+2t+4}{t^3-8} + \frac{12}{3t-6} = \frac{\cancel{t^2+2t+4}}{(t-2)\cancel{(t^2+2t+4)}} + \frac{12}{3(t-2)} = \frac{1}{t-2} + \frac{4}{t-2} = \frac{5}{t-2}$

[5] $\frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{v^2-16} = \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{(v+4)(v-4)} = \frac{8(v-4) + 2(v+4) - 1}{(v+4)(v-4)}$

$= \frac{8v - 32 + 2v + 8 - 1}{(v+4)(v-4)} = \frac{10v - 25}{(v+4)(v-4)} = \frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$

Make sure of your understanding

Q1/ Write each of the following expressions in simplest form:

[1] $\frac{2Z^2-4Z+2}{Z^2-7Z+6}=\frac{2(Z^2-2Z+1)}{(Z-6)(Z-1)}=\frac{2(Z-1)(Z-1)}{(Z-6)(Z-1)}=\frac{2(Z-1)}{(Z-6)}$

[2] $\frac{y^3+27}{y^3-3y^2+9y}=\frac{(y+3)(y^2-3y+9)}{y(y^2-3y+9)}=\frac{y+3}{y}$

[3] $\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{x^2+5x+6}{25x^2-9}=\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{(x+3)(x+2)}{(5x+3)(5x-3)}=\frac{x+2}{5x-3}$

[4] $\frac{Z^2+7Z-8}{Z-1}\times\frac{Z^2-4}{Z^2+6Z-16}=\frac{(Z+8)(Z-1)}{Z-1}\times\frac{(Z+2)(Z-2)}{(Z+8)(Z-2)}=Z+2$

[5] $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\frac{x^2-4}{x^2-x-6}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-2)}\times\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x+3}{x-2}$

[6] $\frac{y^2-25}{y^3-125}\div\frac{y^2+10y+25}{y^2+y-20}=\frac{y^2-25}{y^3-125}\times\frac{y^2+y+25}{y^2+10y+25}$

$=\frac{(y+5)(y-5)}{(y-5)(y^2+5y+25)}\times\frac{y^2+y+25}{(y+5)(y+5)}=\frac{1}{y+5}$

[7] $\frac{8-Z^3}{4+2Z+Z^2}\div\frac{(2+Z)^3}{Z^2+9Z+14}=\frac{8-Z^3}{4+2Z+Z^2}\times\frac{Z^2+9Z+14}{(2+Z)^3}$

$=\frac{(2-Z)(4+2Z+Z^2)}{4+2Z+Z^2}\times\frac{(Z+7)(Z+2)}{(2+Z)^2(2+Z)}=\frac{(2-Z)(Z+7)}{(2+Z)^2}$

[8] $\frac{2y^2-2y}{y^2-9}\div\frac{y^2+y-2}{y^2+2y-3}=\frac{2y^2-2y}{y^2-9}\times\frac{y^2+2y-3}{y^2+y-2}=\frac{2y(y-1)}{(y+3)(y-3)}\times\frac{(y+3)(y-1)}{(y+2)(y-1)}=\frac{2y(y-1)}{(y-3)(y-2)}$

Q2/ Write each of the following expressions in simplest form:

[9] $\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-4x+3}=\frac{2}{(x+3)(x-3)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}=\frac{2(x-1)+3(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-1)}$

$=\frac{2x-2+3x+9}{(x+3)(x-3)(x-1)}=\frac{5x+7}{(x+3)(x-3)(x-1)}$

[10] $\frac{2y^3-128}{y^3+4y^2+16y}-\frac{y-1}{y}=\frac{2(y^3-64)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}=\frac{2(y-4)(y^2+4y+16)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}$

$=\frac{2(y-4)}{y}-\frac{y-1}{y}=\frac{2y-8-y+1}{y}=\frac{y-7}{y}$

[11] $\frac{Z^2+Z+1}{Z^4-Z}-\frac{Z+3}{Z^2+2Z-3}=\frac{Z^2+Z+1}{Z(Z^3-1)}-\frac{Z+3}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{Z^2+Z+1}{Z(Z-1)(Z^2+Z+1)}-\frac{1}{(Z-1)}$

$=\frac{1}{Z(Z-1)}-\frac{1}{(Z-1)}=\frac{1-Z}{Z(Z-1)}=\frac{-(Z-1)}{Z(Z-1)}=\frac{-1}{Z}$

[12] $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}-1=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}-1=\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}=\frac{x+1-x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$

[13] $\frac{5y}{y^2-1}-\frac{6}{y^2-1}+\frac{y}{y^2-1}=\frac{5y-6+y}{y^2-1}=\frac{6y-6}{(y+1)(y-1)}=\frac{6(y-1)}{(y+1)(y-1)}=\frac{6}{y+1}$

[14] $\frac{3}{Z-1}+\frac{2}{Z+3}+\frac{8}{Z^2+2Z-3}=\frac{3}{Z-1}+\frac{2}{Z+3}+\frac{8}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{3(Z+3)+2(Z-1)+8}{(Z+3)(Z-1)}$

$=\frac{3Z+9+2Z-2+8}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5Z+15}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5(Z+3)}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5}{Z-1}$

Solve the Exercises

Q1/ Write each of the following expressions in simplest form:

[17] $\frac{x+5}{12x}\times\frac{6x-30}{x^2-25}=\frac{x+5}{12x}\times\frac{6(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{1}{2x}$

[18] $\frac{y+3}{2y^2+6y+18}\times\frac{y^3-27}{y^2-9}=\frac{y+3}{2(y^2+3y+9)}\times\frac{(y-3)(y^2+3y+9)}{(y+3)(y-3)}=\frac{1}{2}$

[19] $\frac{3-x}{4-2x}\times\frac{x^2+x-6}{9-x^2}=\frac{3-x}{2(2-x)}\times\frac{(x+3)(x-2)}{(3+x)(3-x)}=\frac{x-2}{-2(x-2)}=\frac{-1}{2}$

[20] $\frac{Z^2-Z-12}{9+3Z}\times\frac{3}{Z^2-16}=\frac{(Z-4)(Z+3)}{3(3+Z)}\times\frac{3}{(Z+4)(Z-4)}=\frac{1}{(Z+4)}$

[21] $\frac{y+2}{2y-4}\div\frac{y^3+8}{y-2}=\frac{y+2}{2y-4}\times\frac{y-2}{y^3+8}=\frac{y+2}{2(y-2)}\times\frac{(y-2)}{(y+2)(y^2-2y+4)}=\frac{1}{2(y^2-2y+4)}$

[22] $\frac{2x^2-x-15}{4x^2-20x+25}\div\frac{x-3}{4x^2-25}=\frac{2x^2-x-15}{4x^2-20x+25}\times\frac{4x^2-25}{x-3}=$

$=\frac{(x-3)(2x+5)}{(2x-5)(2x-5)}\times\frac{(2x+5)(2x-5)}{x-3}=\frac{(2x+5)^2}{2x-5}$

[23] $\frac{y^2-7y}{y^3-27}\div\frac{y^2-49}{y^2+3y+9}=\frac{y^2-7y}{y^3-27}\times\frac{y^2+3y+9}{y^2-49}=\frac{y(y-7)}{(y-3)(y^2+3y+9)}\times\frac{y^2+3y+9}{(y+7)(y-7)}$

$=\frac{y}{(y-3)(y+7)}$

[24] $\frac{64-Z^3}{32+8Z+2Z^2}\div\frac{(4-Z)^2}{16-Z^2}=\frac{64-Z^3}{32+8Z+2Z^2}\times\frac{16-Z^2}{(4-Z)^2}$

$=\frac{(4-Z)(16+4Z+Z^2)}{2(16+4Z+Z^2)}\times\frac{(4+Z)(4-Z)}{(4-Z)(4-Z)}=\frac{4+Z}{2}$

[25] $\frac{5}{x^2-36}-\frac{2}{x^2-12x+36}=\frac{5}{(x+6)(x-6)}-\frac{2}{(x-6)^2}=\frac{5(x-6)-2(x+6)}{(x+6)(x-6)^2}$

$=\frac{5x-30-2x-12}{(x+6)(x-6)^2}=\frac{3x-42}{(x+6)(x-6)^2}$

[26] $\frac{y^2-y}{y^3-1}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y(y-1)}{(y-1)(y^2+y+1)}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y}{y^2+y+1}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y-1}{y^2+y+1}$

[27] $\frac{1-Z^2}{Z^3+1}+\frac{Z+3}{Z^2-Z+1}=\frac{(1+Z)(1-Z)}{(Z+1)(Z^2-Z+1)}+\frac{Z+3}{Z^2-Z+1}=\frac{1-Z}{Z^2-Z+1}+\frac{Z+3}{Z^2-Z+1}$

$=\frac{1-Z+Z+3}{Z^2-Z+1}=\frac{4}{Z^2-Z+1}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: مكتبة : اذا كان المقدار الجبري x^2-4 يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة والمقدار الجبري x^2+x-6 يمثل عدد الكتب الأدبية فيها . اكتب نسبة الكتب العلمية الى الكتب الأدبية بأبسط صورة .

الحل

$$\frac{\text{عدد الكتب العلمية}}{\text{عدد الكتب الأدبية}}=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+3)\cancel{(x-2)}}=\frac{x+2}{x+3}$$

سؤال: هندسة : مستطيل أبعاده $5,3$ أمتار وسع الى مستطيل أكبر وذلك بأحاطته بممر عرضه x متر . اكتب المقدار الجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع الى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض لمستطيل قبل التوسيع الى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة .

الحل

طول المستطيل قبل التوسيع $=3$, طول المستطيل بعد التوسيع $=x+3$

عرض المستطيل قبل التوسيع $=5$, عرض المستطيل بعد التوسيع $=x+5$

$$\frac{\text{طول المستطيل قبل التوسيع}}{\text{طول المستطيل بعد التوسيع}}+\frac{\text{عرض المستطيل قبل التوسيع}}{\text{عرض المستطيل بعد التوسيع}}=\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+5}=\frac{3(x+5)+5(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$=\frac{3x+15+5x+15}{(x+3)(x+5)}=\frac{8x+30}{(x+3)(x+5)}$$

سؤال: العاب نارية : المقدار الجبري $20+15t-5t^2$ يمثل ارتفاع بالأمتار لقذيفة ألعاب نارية أطلقت من سطح بناية ارتفاعها 20 مترا اذ t تمثل زمن وصول القذيفة بالثواني الى الهدف . والمقدار الجبري $4+19t-5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أطلقت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار . اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى الى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة .

الحل

$$\frac{\text{ارتفاع القذيفة الأولى}}{\text{ارتفاع القذيفة الثانية}}=\frac{20+15t-5t^2}{4+19-5t^2}=\frac{5(4+3t-t^2)}{(1+5t)(4-t)}=\frac{5(1+t)\cancel{(4-t)}}{(1+5t)\cancel{(4-t)}}=\frac{5(1+t)}{1+5t}$$

فـــــــــكر

تحد : بسط كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية :

i) $$\frac{y^2-5}{2y^3-16} \div \frac{y-\sqrt{5}}{2y^2+4y+8} = \frac{y^2-5}{2y^3-16} \times \frac{2y^2+4y+8}{y-\sqrt{5}} = \frac{(y+\sqrt{5})\cancel{(y-\sqrt{5})}}{2(y^3-8)} \times \frac{2\cancel{(y^2+2y+4)}}{y-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{y+\sqrt{5}}{(y-2)\cancel{(y^2+2y+4)}} \times \frac{\cancel{y^2+2y+4}}{1} = \frac{y+\sqrt{5}}{y-2}$$

أصحح الخطأ : بسط سماح المقدار الجبري وكتبته بأبسط صورة كما يأتي :

$$\frac{Z^2-Z-30}{5+Z} \times \frac{2Z+12}{Z^2-36} = 1$$

اكتشف خطأ سماح وصححه .

$$\frac{Z^2-Z-30}{5+Z} \times \frac{2Z+12}{Z^2-36} = \frac{\cancel{(Z-6)}\cancel{(Z+5)}}{\cancel{5+Z}} \times \frac{2\cancel{(Z+6)}}{\cancel{(Z+6)}\cancel{(Z-6)}} = 2$$

الحل

حس عددي : ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم ؟ وضح ذلك .

$$\frac{5}{x^2-49} + \frac{-4}{(x-7)(x+7)}$$

الحل

$$\frac{5}{x^2-49} + \frac{-4}{(x-7)(x+7)} = \frac{5}{(x+7)(x-7)} + \frac{-4}{(x-7)(x+7)} = \frac{5-4}{(x+7)(x-7)} = \frac{1}{(x+7)(x-7)}$$

أكتب // قيمة المقدار الجبري بأبسط صورة : $\frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12} \div \frac{Z^2-16}{2Z+8}$

$$\frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12} \div \frac{Z^2-16}{2Z+8} = \frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12} \times \frac{2Z+8}{Z^2-16} = \frac{Z^2+Z-6}{2(Z^2+Z-6)} \times \frac{2(Z+4)}{(Z+4)(Z-4)} = \frac{1}{Z-4}$$

الحل

مراجعة الفصل

مثال 1 // اكتب كل مقدار بأبسط صورة :

i) $\frac{x+3}{2x-6}\times\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}=\frac{x+3}{2(x-3)}\times\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2+3x+9}=\frac{x+3}{2}$

ii) $\frac{125+y^3}{25-5y+y^2}\div\frac{(5+y)^3}{y^2+10y+25}=\frac{125+y^3}{25-5y+y^2}\times\frac{y^2+10y+25}{(5+y)^3}$

$=\frac{(5+y)(25-5y+y^2)}{25-5y+y^2}\times\frac{(y+5)(y+5)}{(5+y)^3}=1$

iii) $\frac{3x-15}{x^2-25}+\frac{2}{x+5}=\frac{3(x-5)}{(x+5)(x-5)}+\frac{2}{x+5}=\frac{3}{x+5}+\frac{2}{x+5}=\frac{5}{x+5}$

تدريب 1 // اكتب كل مقدار بأبسط صورة :

i) $\frac{Z^2-4}{Z+2}\times\frac{Z^2+9Z+20}{Z^2+2Z-8}=\frac{(Z+2)(Z-2)}{Z+2}\times\frac{(Z+5)(Z+4)}{(Z+4)(Z-2)}=Z+5$

ii) $\frac{27-x^3}{2x^2+6x+18}\div\frac{(3-x)^2}{x^2-x-6}=\frac{27-x^3}{2x^2+6x+18}\times\frac{x^2-x-6}{(3-x)^2}=\frac{(3-x)(9+3x+x^2)}{2(x^2+3x+9)}\times\frac{(x-3)(x-2)}{(3-x)^2}$

$=\frac{3-x}{2}\times\frac{-(3-x)(x-2)}{(3-x)^2}=\frac{-(x-2)}{2}$

iii) $\frac{4Z}{2Z-5}-\frac{Z}{Z+3}=\frac{4Z(Z+3)-Z(2Z-5)}{(2Z-5)(Z+3)}=\frac{4Z^2+12Z-2Z^2+5Z}{(2Z-5)(Z+3)}=\frac{2Z^2+17Z}{(2Z-5)(Z+3)}$

سؤال: اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[1] $\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9}$ a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{x}$

الحل :

$$\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9} = \frac{x+3}{4x} \times \frac{4(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x}$$

الجواب فرع : (d)

[2] $\frac{y+2}{y^2+2y+4} \times \frac{y^3-8}{y^2-4}$ a) $\frac{1}{y-2}$ b) 1 c) $\frac{1}{y+2}$ d) -1

الحل :

$$\frac{y+2}{y^2+2y+4} \times \frac{y^3-8}{y^2-4} = \frac{y+2}{y^2+2y+4} \times \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y+2)(y-2)} = 1$$

الجواب فرع : (b)

[3] $\frac{Z^2-2Z-15}{9+3Z} \times \frac{5}{Z^2-25}$ a) $\frac{5}{Z+5}$ b) $\frac{3}{5(Z+5)}$ c) $\frac{5}{3(Z+5)}$ d) $\frac{3}{Z+5}$

الحل :

$$\frac{Z^2-2Z-15}{9+3Z} \times \frac{5}{Z^2-25} = \frac{(Z-5)(Z+3)}{3(3+Z)} \times \frac{5}{(Z+5)(Z-5)} = \frac{5}{3(Z+5)}$$

[4] $\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \div \frac{x-7}{4x^2-25}$ a) $x-7$ b) $2x-5$ c) $x+7$ d) $2x+5$

الجواب فرع : (b)

الحل :

$$\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \div \frac{x-7}{4x^2-25} = \frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \times \frac{4x^2-25}{x-7} = \frac{(x+7)(x-7)}{(x+7)(2x-5)} \times \frac{(2x+5)(2x-5)}{x-7}$$
$$= 2x+5$$

[5] $\frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \div \frac{(1-Z)^2}{1-Z^2}$ a) $1-Z$ b) $1+Z$ c) $1+Z+Z^2$ d) $1-Z+Z^2$

الحل :

$$\frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \div \frac{(1-Z)^2}{1-Z^2} = \frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \times \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} == \frac{(1-Z)(1+Z+Z^2)}{1+Z+Z^2} \times \frac{(1+Z)(1-Z)}{(1-Z)^2} = 1+Z$$

الجواب فرع : (b)

[6] $\frac{3+y}{2y-10} \div \frac{y^3+27}{5-y}$ a) $\frac{-1}{2(y^2-3y+9)}$ b) $\frac{1}{2(y^2-3y+9)}$ c) $\frac{-1}{2(y^2+3y+9)}$ d) $\frac{1}{2(y^2+3y+9)}$

الحل

$$\frac{3+y}{2y-10} \div \frac{y^3+27}{5-y} = \frac{3+y}{2y-10} \times \frac{5-y}{y^3+27} = \frac{3+y}{2(y-5)} \times \frac{-(y-5)}{(y+3)(y^2-3y+9)} = \frac{-1}{2(y^2-3y+9)}$$

الجواب فرع : (a)

سؤال: اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[7] $\frac{2y^2+1}{y^3-1}-\frac{y}{y^2+y+1}$ a) $\frac{y}{y+1}$ b) $\frac{1}{y+1}$ c) $\frac{1}{y-1}$ d) $\frac{y}{y-1}$

الحل

$$\frac{2y^2+1}{y^3-1}-\frac{y}{y^2+y+1}=\frac{2y^2+1}{(y-1)(y^2+y+1)}-\frac{y}{y^2+y+1}=\frac{2y^2+1-y(y-1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$
$$=\frac{2y^2+1-y^2+y}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{y^2+y+1}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{1}{y-1}$$

الجواب فرع : (c)

[8] $\frac{5-4Z^2}{8Z^3+1}+\frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1}$ a) $\frac{2Z-1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$ b) $\frac{2Z+1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$

c) $\frac{2}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$ d) $\frac{4}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$

الحل

$$\frac{5-4Z^2}{8Z^3+1}+\frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1}=\frac{5-4Z^2}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}+\frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1}=\frac{5-4Z^2+(2Z-1)(2Z+1)}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$$
$$=\frac{5-4Z^2+4Z^2-1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}=\frac{4}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$$

الجواب فرع : (d)

[9] $\frac{3y+1}{y+4}-\frac{y-4}{3y-1}-\frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}$

a) $\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$ b) $\frac{3}{(y+4)(3y-1)}$

c) $\frac{-3}{(y+4)(3y-1)}$ d) $\frac{-5}{(y+4)(3y-1)}$

الحل

$$\frac{3y+1}{y+4}-\frac{y-4}{3y-1}-\frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}=\frac{3y+1}{y+4}-\frac{y-4}{3y-1}-\frac{10+8y^2}{(y+4)(3y-1)}$$
$$=\frac{(3y+1)(3y-1)-(y-4)(y+4)-(10+8y^2)}{(y+4)(3y-1)}$$
$$=\frac{9y^2-1-(y^2-16)-10-8y^2}{(y+4)(3y-1)}=\frac{y^2-11-y^2+16}{(y+4)(3y-1)}=\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$$

الجواب فرع : (a)

اختبار الفصل

سؤال : جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1 $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

2 $(v-\sqrt{2})(v+\sqrt{2}) = v^2 - (\sqrt{2})^2 = v^2 - 2$

3 $(2-x)(5-x) = 10 - 2x - 5x + x^2$
$= 10 - 7x + x^2$

4 $(2y-3)(y+9) = 3y^2 + 27y - 3y - 27$
$= 3y^2 + 24y - 27$

سؤال: جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

5 $(x+11)(x^2 - 11x + 121) = x^3 + 11^3 = x^3 - 1331$

6 $\left(\frac{1}{3} - y\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}y + y^2\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - y^3 = \frac{1}{27} - y^3$

7 $(y-1)^3 = (y-1)(y-1)^2 = (y-1)(y^2 - 2y + 1)$
$= y^3 - 2y^2 + y - y^2 + 2y - 1 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$

8 $\left(Z + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(Z + \frac{1}{4}\right)\left(Z + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(Z + \frac{1}{4}\right)\left(Z^2 + \frac{1}{2}Z + \frac{1}{16}\right)$
$= Z^3 + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{16}Z + \frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{8}Z + \frac{1}{64} = Z^3 + \frac{3}{4}Z^2 + \frac{3}{16}Z + \frac{1}{64}$

سؤال: حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

9 $8x^2 - 12x = 4x(2x-3)$

التحقق :

$4x(2x-3) = 8x^2 - 12x$

10 $7y^3 + 14y^2 - 21y = 7y(y^2 + 2y - 3)$

التحقق :

$7y(y^2 + 2y - 3) = 7y^3 + 14y^2 - 21y$

11 $\sqrt{18}\,Z^3r + \sqrt{2}\,(Zr^2 - Zr)$
$= 3\sqrt{2}\,Z^3r + \sqrt{2}\,Zr^2 - \sqrt{2}\,Zr$
$= \sqrt{2}\,Zr(3Z^2 + r - 1)$

التحقق :

$\sqrt{2}\,Zr(3Z^2 + r - 1) = 3\sqrt{2}\,Z^3r + \sqrt{2}\,Zr^2 - \sqrt{2}\,Zr$
$= \sqrt{18}\,Z^3r + \sqrt{2}\,(Zr^2 - Zr)$

سؤال: حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

12 $\frac{2}{3}(y+5) + \frac{1}{3}y(y+5) = (y+5)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}y\right)$

13 $\sqrt{5}\,Z(Z^2 - 1) - \sqrt{2}\,Z^2(Z^2 - 1) = (Z^2 - 1)(\sqrt{5}\,Z - \sqrt{2}\,Z^2)$

سؤال: حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع :

$6x^4 - 18x^3 + 10x - 30 = (6x^4 - 18x^3) + (10x - 30) = 6x^3(x-3) + 10(x-3) = (x-3)(6x^3 + 10)$

$56 - 8y + 14y^2 - 2y^3 = (56 - 8y) + (14y^2 - 2y^3) = 8(7-y) + 2y^2(7-y) = (7-y)(8 + 2y^2)$

سؤال : حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس :

16 $9x^3 - 6x^2 + 8 - 12x = (9x^3 - 6x^2) + (8 - 12x) = 3x^2(3x - 2) + 4(2 - 3x)$
$= 3x^2(3x - 2) + 4(-1)(3x - 2) = 3x^2(3x - 2) - 4(3x - 2) = (3x - 2)(3x^2 - 4)$

17 $\sqrt{11}\,Z^3 - \sqrt{44}\,Z^2 + 5(2 - Z) = (\sqrt{11}\,Z^3 - 2\sqrt{11}\,Z^2) + 5(2 - Z)$
$= \sqrt{11}\,Z^2(Z - 1) + 5(-1)(Z - 2) = \sqrt{11}\,Z^2(Z - 1) - 5(Z - 2) = (Z - 2)(\sqrt{11}Z^2 - 5)$

سؤال: حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية :

18 $16 - x^2 = (4 + x)(4 - x)$

19 $\frac{1}{3}Z^2 - \frac{1}{27} = \frac{1}{3}\left(Z^2 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(Z + \frac{1}{3}\right)\left(Z - \frac{1}{3}\right)$

20 $\frac{1}{16}v - \frac{1}{2}v^4 = \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{8} - v^3\right) = \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2} - v\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}v + v^2\right)$

21 $8x^3 - \frac{1}{125} = \left(2x - \frac{1}{5}\right)\left(4x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}\right)$

22 $81 - 18y + y^2 = (9 - y)^2$

23 $7Z^2 - 36Z + 5 = (7Z - 1)(Z - 5)$

سؤال: حدد أي من المقادير الجبرية التالية تمثل مربعا كاملا وحلله :

24 $25x^2 + 30x + 9$ الحل $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(25x^2)(9)}$ $= 30x$ مربع كامل $25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2$	25 $49 - 4y + y^2$ الحل $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(y^2)(49)} = 2(y)(7)$ $= 14y \neq 4y$ ليس مربع كامل
26 $4v^2 + 4\sqrt{5}\,v + 5$ الحل $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2(2v)(\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}\,v$ مربع كامل $4v^2 + 4\sqrt{5}\,v + 5 = (2v + \sqrt{5})^2$	

سؤال: اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كالا وحلله :

27 $x^2 + \cdots\cdots + 81$ الحل $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $bx = 2\sqrt{(x^2)(81)} = 2(x)(9) = 18x$ $x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$	28 $36 - 12y + \cdots\cdots$ الحل $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $12y = 2\sqrt{(ay^2)(36)}$ بتربيع الطرفين $144y^2 = 4(ay^2)(36) \Rightarrow 144y^2 = 144(ay^2)$ $ay^2 = \frac{144y^2}{144} = y^2 \Rightarrow 36 - 12y + y^2 = (6-y)^2$
29 $7 - \cdots\cdots + 4Z^2$ الحل $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ $bZ = 2\sqrt{(4Z^2)(7)} = 2(2Z)(\sqrt{7}) = 4\sqrt{7}\,Z$ $7 - 4\sqrt{7}\,Z + 4Z^2 = (\sqrt{7} - 2Z)^2$	

سؤال: حلل كل مقدار من المقادير الآتية :

30 $x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$ 31 $x^2 - 5\sqrt{3}x + 12 = (x - 4\sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ 32 $2v^2 + 9v + 7 = (2v+7)(v+1)$ 33 $32 - 16x + 2x^2 = 2(16 - 8x + x^2)$ $= 2(4-x)(4-x)$ 34 $\frac{1}{4}y^2 - 2y + 3 = \frac{1}{4}(y^2 - 8y + 12)$ $= \frac{1}{4}(y-2)(y-6)$ 35 $12 - 7\sqrt{2}v + 2v^2$ $= (3\sqrt{2} - v)(4\sqrt{2} - 2v)$ 36 $8 + 27x^3 = 2^3 + 3^3x^3$ $= (2+3x)(4 - 6x + 9x^2)$	37 $125y^3 - 1 = 5^3y^3 - 1^3$ $= (5y-1)(25y^2 + 5y + 1)$ 38 $\frac{1}{v^3} - \frac{8}{27} = \frac{1^3}{v^3} - \frac{2^3}{3^3}$ $= \left(\frac{1}{v} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{v^2} + \frac{2}{3v} + \frac{4}{9}\right)$ 39 $1 + 0.125y^3 = 1^3 + (0.5)^3y^3$ $= (1 + 0.5y)(1 - 0.5y + 0.25y^2)$ 40 $Z^3 - 0.027 = Z^3 - (0.3)^3$ $= (Z - 0.3)(Z^2 + 0.3Z + 0.09)$ 41 $3 - \frac{1}{9}v^3 = \frac{1}{9}(27 - v^3) = \frac{1}{9}(3^3 - v^3)$ $= \frac{1}{9}(3-v)(9 + 3v + v^2)$

سؤال: اكتب كل مقدار من المقادير التالية على أبسط صورة

42 $$\frac{27 - 8Z^3}{4Z^2 - 9} \div \frac{9 + 6Z + 4Z^2}{9 + 6Z} = \frac{27 - 8Z^3}{4Z^2 - 9} \times \frac{9 + 6Z}{9 + 6Z + 4Z^2}$$

$$= \frac{(3-2Z)(9+6Z+4Z^2)}{(2Z+3)(2Z-3)} \times \frac{3(3+2Z)}{9+6Z+4Z^2} = \frac{-3(2Z-3)}{(2Z-3)} = -3$$

43 $$\frac{7}{x^2-25}-\frac{6}{x^2+10x+25}=\frac{7}{(x+5)(x-5)}-\frac{6}{(x+5)^2}=\frac{7(x+5)-6(x-5)}{(x-5)(x+5)^2}$$

$$=\frac{7x+35-6x+30}{(x-5)(x+5)^2}=\frac{x+65}{(x-5)(x+5)^2}$$

44 $$\frac{y^2-1}{1-y^3}+\frac{1+y}{1+2y+y^2}=\frac{(y+1)(y-1)}{(1-y)(1+y+y^2)}+\frac{\cancel{1+y}}{(\cancel{1+y})(1+y)}$$

$$=\frac{(y+1)(y-1)}{-(y-1)(\cancel{1+y}+y^2)}+\frac{1}{1+y}=\frac{-(y+1)}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+y}$$

$$=\frac{-(y+1)(1+y)+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)}$$

$$=\frac{-(y+y^2+1+y)+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)}$$

$$=\frac{-2y-y^2-1+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)}=\frac{-y}{(1+y+y^2)(1+y)}$$

45 $$\frac{Z+3}{Z+5}-\frac{Z-5}{Z-3}+\frac{1}{Z^2+2Z-15}=\frac{Z+3}{Z+5}-\frac{Z-5}{Z-3}+\frac{1}{(Z+5)(Z-3)}$$

$$=\frac{(Z+3)(Z-3)-(Z-5)(Z+5)+1}{(Z+5)(Z-3)}=\frac{Z^2-9-(Z^2-25)+1}{(Z+5)(Z-3)}$$

$$=\frac{Z^2-9-Z^2+25+1}{(Z+5)(Z-5)}=\frac{17}{(Z+5)(Z-3)}$$

Chapter Three Equations

Lesson [3-1] Solving the System of two Linear Equations with two variables.

[3 – 1 – 1]	Solving a System of two Linear Equations graphically.

ليكن $L_1 : a_1x + b_1y = c_1 , L_2 : a_2x + b_2y = c_2$ معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين x , y لحل هذا النظام بيانيا نتبع ما يأتي :

[1] تمثيل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي .

[2] لإيجاد احداثي نقطة تقاطع المستقيمين يرسم عمودان من النقطة على المحور الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل .

Ex./ Find a solution set for the system graphically in R .

$x - y = 1$ ———— (1) $\qquad$ $x + y = 2$ ———— (2)

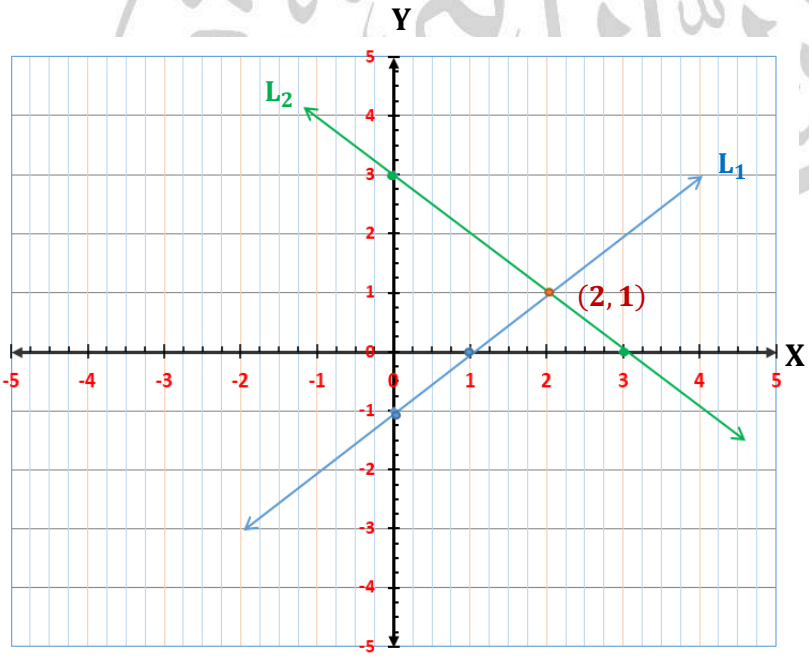
الحل :

رمز للمعادلة ( ) : $x - y = 1$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	−1	(0, −1)
1	0	(1, 0)

$0 - y = 1 \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow y = -1$

$x - 0 = 1 \Rightarrow x = 1$



نرمز للمعادلة ( ) : $x + y = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3$

$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$

مجموعة الحل هي : $S = [(2, 1)]$

[3 − 1 − 2]	Solving the system of two Linear Equations by Substitution

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين بتحويل أحدى المعادلتين الى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بايجاد علاقة بين X, Y من أحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى

Ex./ Find the solution set of the system by using the substitution:

$y = 4x$ ———— (1)

$y = x + 6$ ———— (2)

الحل

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$4x = x + 6 \quad \Rightarrow \quad 4x - x = 6$

$x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{3} = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة (2)

$y = 2 + 6 = 8$

مجموعة حل النظام : $S = \{(2, 8)\}$

Ex./ Find the solution set of the system by using the substitution In R:

$x + 8y = 10$ ———— (1)

$x - 4y = 2$ ———— (2)

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$x = 2 + 4y$ ———— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2 + 4y + 8y = 10 \quad \Rightarrow \quad 12y = 10 - 2$

$12y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

نعوض عن قيمة $y = \frac{2}{3}$ في معادلة (3)

$x = 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{8}{3} = \frac{6+8}{3} = \frac{14}{3}$

مجموعة حل النظام : $S = \left\{\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

[3 – 1 – 2]	Solving the system of two linear Equations by Elimiation method.

تتلخص هذه الطريقة لحل النظام من معادلتين بحذف أحد المتغيرين وذلك بجعل معامل أحدهما متساويا بالقيمة ومختلفا بالإشارة في كلا المعادلتين .

Ex./ Find the solution set for the system in R by using the elimination method:

$x + 2y = 5 \quad ——— (1)$
$3x - y = 1 \quad ——— (2) \quad \} \times 2$

Sol./

نضرب معادلة (2) في العدد 2

$$\begin{array}{rl} x + \cancel{2y} = 5 & ——— (1) \\ 6x - \cancel{2y} = 2 & ——— (2) \quad \text{بالجمع} \\ \hline 7x = 7 & \Rightarrow \quad x = \frac{7}{7} = 1 \end{array}$$

نعوض قيمة $x = 1$ في معادلة (1)

$$1 + 2y = 5 \quad \Rightarrow \quad 2y = 5 - 1 \quad \Rightarrow \quad 2y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{2} = 2$$

مجموعة حل النظام : $S = \{(1, 2)\}$

Ex./ Find the solution set for the system in R by using the elimination method:

$3x + 4y = 10 \quad ——— (1) \quad \} \times 3$
$2x + 3y = 7 \quad ——— (2) \quad \} \times 4$

Sol./

نضرب معادلة (1) في العدد 3 ونضرب معادلة (2) في العدد 4

$$\begin{array}{rl} 9x + \cancel{12y} = 30 & ——— (1) \\ \mp 8x \mp \cancel{12y} = \mp 28 & ——— (2) \quad \Rightarrow \text{بالطرح} \\ \hline x = 2 & \end{array}$$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة (2)

$$2(2) + 3y = 7 \quad \Rightarrow \quad 4 + 3y = 7 \quad \Rightarrow \quad 3y = 7 - 4 \quad \Rightarrow \quad 3y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{3} = 1$$

مجموعة حل النظام : $S = \{(2, 1)\}$

Make sure of your understanding

Q1/ Find a solution set of the system in R graphically:

$3x - y = 6 \quad ——— (1)$

$x - y = 3 \quad ——— (2)$

Sol./

نرمز للمعادلة (1) : $3x - y = 3$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	−6	(0, −6)
2	0	(2, 0)

$3(0) - y = 6 \Rightarrow -y = 6 \Rightarrow y = -6$

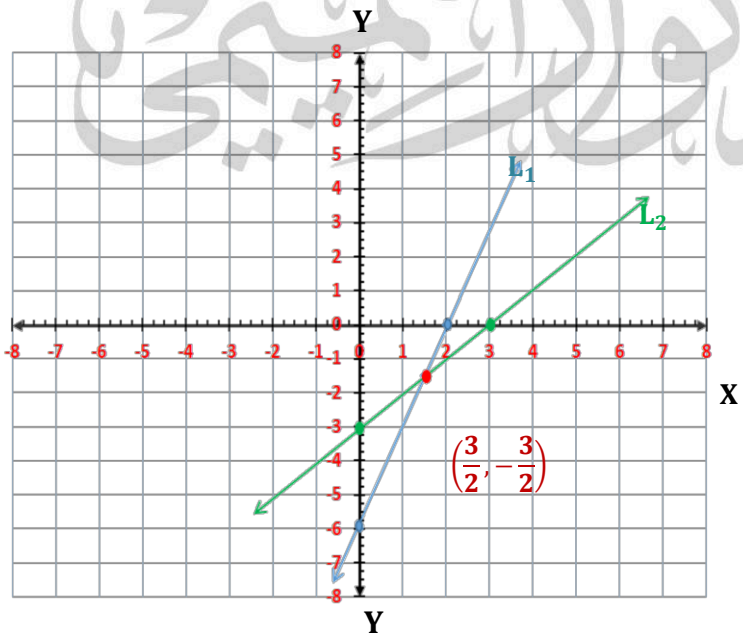
$3x - 0 = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

نرمز للمعادلة (2) $x - y = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	−3	(0, −3)
3	0	(3, 0)

$0 - y = 3 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$

$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$



مجموعة حل النظام : $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$

$y - x = 3 \quad ---(1)$
$y + x = 0 \quad ---(2)$

الحل : نرمز للمعادلة (1) : $y - x = 3$ بالرمز L_1

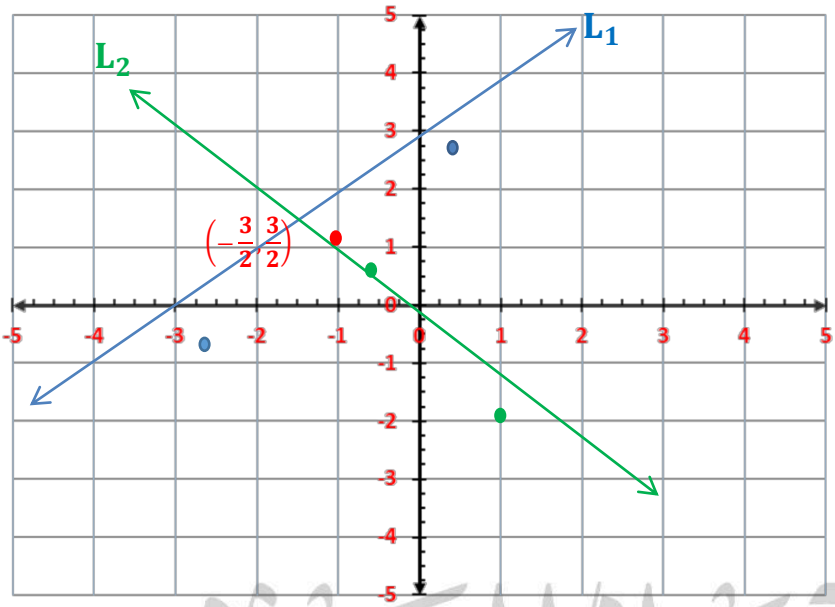
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
−3	0	(−3, 0)

$y - 0 = 3 \Rightarrow y = 3$
$0 - x = 3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$

نرمز للمعادلة ( ) : $y + x = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
1	−1	(1, −1)
−1	1	(−1, 1)

$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$
$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$



مجموعة حل النظام : $\left\{\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

$y = x - 2 \quad ---(1)$
$y = 3 - x \quad ---(2)$

الحل : نرمز للمعادلة (1) : $y = x - 2$ بالرمز L_1

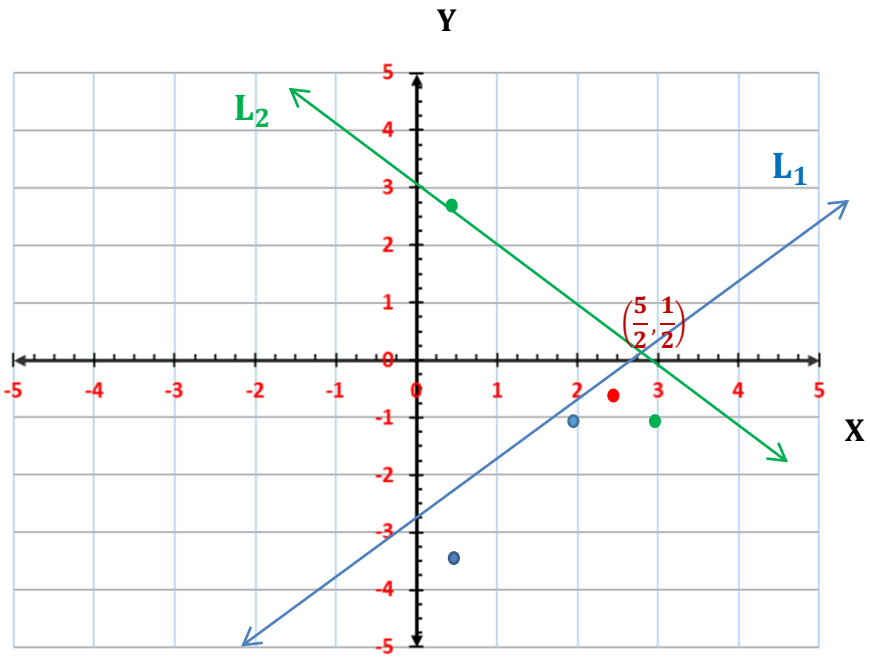
x	y	(x, y)
0	−2	(0, −2)
2	0	(2, 0)

$y = 0 - 2 \Rightarrow y = -2$
$0 = x - 2 \Rightarrow x = 2$

نرمز للمعادلة (2) $y = 3 - x$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3$
$0 = 3 - x \Rightarrow x = 3$



مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Q2/ Find the solution set of the system by using the method of substitution, for each of the following :

1 $2x + 3y = 1$ ———— (1)
$3x - 2y = 0$ ———— (2)

Sol./

من معادلة (2) نحصل على :

$$3x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}y \quad ———— (3)$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$$2\left(\frac{2}{3}y\right) + 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}y + 3y = 1 \quad \} \times 3$$

$$4y + 9y = 3 \quad \Rightarrow \quad 13y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{13}$$

نعوض قيمة $y = \frac{3}{13}$ في معادلة (3)

$$x = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{1}{13}$$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)\right\}$

2 $x - 2y = 11$ ———— (1)
$2x - 3y = 18$ ———— (2)

Sol./

من معادلة (1) نحصل على :

$$x = 11 + 2y \quad ———— (3)$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$$2(11 + 2y) - 3y = 18 \quad \Rightarrow \quad 22 + 4y - 3y = 18$$
$$y = 18 - 22 = -4$$

نعوض قيمة $y = -4$ في معادلة (3)

$$x = 11 + 2(-4) = 11 - 8 = 3$$

مجموعة حل النظام : $\{(3, -4)\}$

3 $y - 5x = 10$ ———— (1)
$y - 3x = 8$ ———— (2)

الحل : من معادلة (1) نحصل على :

$$y = 10 + 5x \quad ———— (3)$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$$10 + 5x - 3x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8 - 10$$
$$2x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2}{2} = -1$$

نعوض قيمة $x = -1$ في معادلة (3)

$$y = 10 + 5(-1) = 10 - 5 = 5$$

مجموعة حل النظام : $\{(-1, 5)\}$

Q3/ Find the solution set of the system by using the elimination method, for each of the following :

1 $3x - 4y = 12$ ———— (1)
$5x + 2y == -6$ ———— (2) $\}\times 2$

Sol./

بضرب معادلة (2) في العدد 2

$$3x - \cancel{4y} = 12 \quad ———— (1)$$
$$10x + \cancel{4y} = -12 \quad ———— (2) \qquad \text{بالجمع}$$
$$13x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$$5(0) + 2y = -6 \quad \Rightarrow \quad 2y = -6$$
$$y = \frac{-6}{2} = -3$$

مجموعة حل النظام : $\{(0, -3)\}$

2 $x - 3y = 6$ ———— (1) $\}\times 2$
$2x - 4y = 24$ ———— (2)

Sol./

بضرب معادلة (1) في العدد 2

$$\mp\cancel{2x} \pm 6y = \mp 12 \quad ———— (1)$$
$$\cancel{2x} - 4y = 24 \quad ———— (2) \qquad \text{بالطرح}$$
$$2y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{12}{2} = 6$$

نعوض قيمة $y = 6$ في معادلة (1)

$$x - 3(6) = 6 \quad \Rightarrow \quad x - 18 = 6$$
$$x = 6 + 18 = 24$$

مجموعة حل النظام : $\{(24, 6)\}$

3 $3y - 2x - 7 = 0$ ———— (1)
$y + 3x + 5 = 0$ ———— (2) $\}\times 3$

Sol./

بضرب معادلة (2) في العدد 3

$$\cancel{3y} - 2x - 7 = 0 \quad ———— (1)$$
$$\mp\cancel{3y} \mp 9x \mp 15 = 0 \quad ———— (2) \qquad \text{بالطرح}$$
$$-11x - 22 = 0 \quad \Rightarrow \quad 11x = -22$$
$$x = \frac{-22}{11} = -2$$

نعوض قيمة $x = -2$ في معادلة (2)

$$y + 3(-2) + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y - 6 + 5 = 0$$
$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

مجموعة حل النظام : $\{(-2, 1)\}$

Q4/ Find the solution set of the system, then check the e correction of the solution:

$$[1]\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \text{ ———— } (1) \ \}\times 6$$
$$\frac{3y}{3} - \frac{x}{3} = 4 \text{ ———— } (2) \ \}\times 3$$

Sol./

بضرب معادلة (1) في العدد 6 ومعادلة (2) في العدد 3

$$4x - 3y = 6 \text{ ——— } (1)$$
$$3y - x = 12 \Rightarrow -x + 3y = 12 \text{ ——— } (2)$$
$$4x - \cancel{3y} = 6 \text{ ——— } (1)$$
$$-x + \cancel{3y} = 12 \text{ ——— } (1)$$ بالجمع

$$3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$$

نعوض قيمة $x = 6$ في معادلة (2)

$$-6 + 3y = 12 \Rightarrow 3y = 12 + 6$$
$$3y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{3} = 6$$

مجموعة حل النظام : $\{(6,6)\}$

تحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x = 6\ , y = 6$ في أحدى المعادلتين لتكن معادلة (2)

$$-x + 3y = -6 + 3(6) = -6 + 18 = 12$$

$$[2]\ 0.2x - 6y = 4 \text{ ——— } (1)$$
$$0.1x - 7y == -2 \text{ ——— } (2) \ \}\times 2$$

Sol./ بضرب معادلة (2) في العدد 2

$$0.2x - 6y = 4 \text{ ——— } (1)$$
$$\cancel{\mp 0.2x} \pm 14y = \pm 4 \text{ ——— } (2)$$ بالطرح

$$8y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{8} = 1$$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$$0.2x - 6(1) = 4 \Rightarrow 0.2x - 6 = 4$$
$$0.2x = 4 + 6 \Rightarrow 0.2x = 10$$
$$x = \frac{10}{0.2} = \frac{100}{2} = 50$$

مجموعة حل النظام : $\{(50,1)\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم $x = 50\ , y = 1$ في معادلة (1)

$$0.2x - 6y = 0.2(50) - 6(1) = 10 - 6 = 4$$

[12] $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=2\frac{3}{4}$ ———— (1) $\}\times 12$

$\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=6\frac{1}{4}$ ———— (2) $\}\times 12$

Sol./

نبسط معادلة (1)

$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=\frac{11}{4}\ \}\times 12$

$6x+8y=33$ ———— (1)

نبسط معادلة (2)

$\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=\frac{25}{4}\ \}\times 12$

$3x-\cancel{8y}=75$ ———— (2)

$6x+\cancel{8y}=33$ ———— (1) بالجمع

$9x=108 \Rightarrow x=\frac{108}{9}=12$

نعوض قيمة $x=12$ في معادلة (1)

$6(12)+8y=33 \Rightarrow 72+8y=33$

$8y=33-72 \Rightarrow 8y=-39 \Rightarrow y=\frac{-39}{8}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(12,-\frac{39}{8}\right)\right\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم $x=12\ ,y=-\frac{39}{8}$ في معادلة (1)

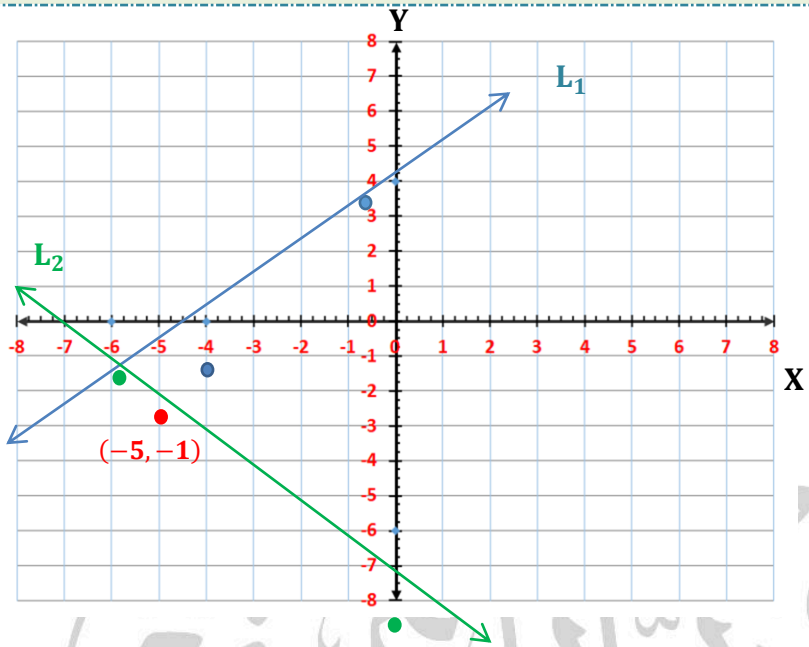
$$6x+8y=6(12)+8\left(-\frac{39}{8}\right)=72-39=33$$

Solve the Exercises

Q1/ Find the solution set of the system in R graphically:

[1] $x - y = -4$ ———— (1)

$y + x = -6$ ———— (2)



نرمز للمعادلة (1) $x - y = -4$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
−4	0	(−4, 0)

$0 - y = -4 \Rightarrow y = 4$

$x - 0 = -4 \Rightarrow x = -4$

نرمز للمعادلة (2) $y + x = -6$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	−6	(0, −6)
−6	0	(−6, 0)

$y + 0 = -6 \Rightarrow y = -6$

$0 + x = -6 \Rightarrow x = -6$

مجموعة الحل : $\{(-5,-1)\}$

[2] $y = x - 4$ ——— (1)
$x = 2 - y$ ——— (2)

الحل : نرمز للمعادلة (1) : $y = x - 4$ بالرمز L_1

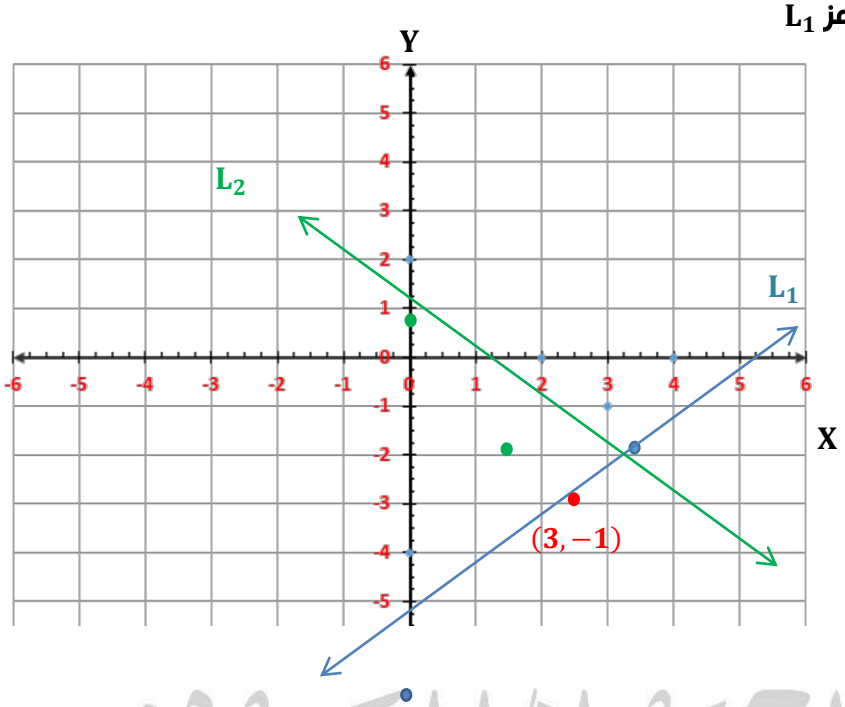
x	y	(x, y)
0	−4	(0, −4)
4	0	(4, 0)

$y = 0 - 4 \Rightarrow y = -4$
$0 = x - 4 \Rightarrow x = 4$

نرمز للمعادلة ( ) : $x = 2 - y$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)

$0 = 2 - y \Rightarrow y = 2$
$x = 2 - 0 = 2$



مجموعة حل النظام: $\{(3, -1)\}$

Q2/ Find the solution set of the system by using the method of substitution, for each of the following:

1 $3x + 2y = 2$ ——— (1)
$x - y = 8$ ——— (2)

الحل

من معادلة (2) نحصل على :

$x = 8 + y$ ——— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3(8 + y) + 2y = 2 \Rightarrow 24 + 3y + 2y = 2$

$5y = 2 - 24 \Rightarrow 5y = -22 \Rightarrow y = \frac{-22}{5}$

نعوض قيمة $y = -\frac{22}{5}$ في معادلة (3)

$x = 8 - \frac{22}{5} = \frac{40 - 22}{5} = \frac{18}{5}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{18}{5}, -\frac{22}{5}\right)\right\}$

2 $2x - y = -4$ ——— (1)
$3x - y == 3$ ——— (2)

الحل

من معادلة (2) نحصل على :

$y = 3x - 3$ ——— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2x - (3x - 3) = -4 \Rightarrow 2x - 3x + 3 = -4$

$-x = -4 - 3 \Rightarrow -x = -7 \Rightarrow x = 7$

نعوض قيمة $x = 7$ في معادلة (3)

$y = 3(7) - 3 = 21 - 3 = 18$

مجموعة حل النظام $\{(7, 18)\}$

Q3/ Find the solution set of the system by using the method of elimination, for each of the following:

1 $3x = 22 - 4y$ ——— (1) $4y = 3x - 14$ ——— (2) **الحل** نرتب المعادلتين : $\cancel{3x} + 4y = 22$ ——— (1) $\cancel{-3x} + 4y = -14$ ——— (2) بالجمع $8y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{8} = 1$ نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1) $3x = 22 - 4(1) \Rightarrow 3x = 22 - 4$ $3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$ مجموعة حل النظام : $\{(6, 1)\}$	2 $5x - 3y = 6$ ——— (1) $\} \times 5$ $2x + 5y = -10$ ——— (2) $\} \times 3$ **الحل** بضرب معادلة (1) في العدد 5 ومعادلة (2) في العدد 3 $25x - \cancel{15y} = 30$ ——— (1) $6x + \cancel{15y} = -30$ ——— (1) بالجمع $31x = 0 \Rightarrow x =$ نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2) $2(0) + 5y = -10 \Rightarrow 5y = -10$ $y = \frac{-10}{5} = -2$ مجموعة حل النظام : $\{(0, -2)\}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: طقس : تقل عدد الأيام (x) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد أيام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية . اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف ثم جد حلهما بطريقة الحذف .

الحل

عدد أيام شهر كانون الثاني $= 31$ يوم

نفرض عدد الأيام التي تنخفض بها درجة الحرارة $= x$

نفرض عدد الأيام التي تزداد بها درجة الحرارة $= y$

$$y + \cancel{x} = 31 \quad \text{-------}(1)$$
$$y - \cancel{x} = 9 \quad \text{-------}(2) \qquad \text{بالجمع}$$
$$2y = 40 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{40}{2} = 20$$

نعوض قيمة $y = 20$ في معادلة (1)

$$20 + x = 31 \quad \Rightarrow \quad x = 31 - 20 = 11 \quad \Rightarrow \quad S = \{(11, 20)\}$$

سؤال: تجارة : باع متجر 25 ثلاجة وغسالة بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة اذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازا باع من كل نوع . اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلها بطريقة التعويض

الحل

نفرض عدد الثلاجات $= x$, عدد الغسالات $= y$

$$x + y = 25 \quad \text{-------}(1)$$

سعر الثلاجة $= 1000000x$, سعر الغسالة $= 500000y$

$$1000000x + 500000y = 20000000 \quad \} \div 500000$$
$$2x + y = 40 \quad \text{-------}(2)$$

من معادلة ( ) نحصل على :

$$y = 25 - x \quad \text{-------}(3)$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$$2x + 25 - x = 40 \quad \Rightarrow \quad x = 40 - 25 \quad \Rightarrow \quad x = 15$$

نعوض قيمة $x = 15$ في معادلة (3)

$$y = 25 - 15 = 10 \quad \Rightarrow \quad S = \{(15, 10)\}$$

سؤال: حفلة تخرج : عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور . وكان عدد المدعوين 23 شخصا . فكم شخصا دعل كل منهما ؟

الحل

نفرض عدد الأشخاص الذين دعاهم سجاد $= x$

عدد الأشخاص الذين دعاهم أنور $= y$

$x + \cancel{y} = 23 \quad ------(1)$

$x - \cancel{y} = 3 \quad ------(2)$ بالجمع

$2x = 26 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{26}{2} = 13$ عدد الاشخاص الذين دعاهم سجاد

نعوض قيم $x = 1$ في معادلة (1)

$13 + y = 23 \quad \Rightarrow \quad y = 23 - 13 = 10$ الذين دعاهم أنور

فـــــــكـــــــر

سؤال: تحد : جد مجموعة الحل للمعادلتين في R

ii) $\frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1 \quad ----(1) \quad \}\times 6$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3 \quad ----(2) \quad \}\times 2$

الحل

نبسط المعادلتين ذلك بضرب معادلة (1) في العدد6 والمعادلة (2) في العدد 2

$2x - 2y = 6 \quad ----(1)$

$x + y = 6 \quad ----(2) \quad \}\times 2$

$2x + \cancel{2y} = 12 \quad ----(2)$

$2x - \cancel{2y} = 6 \quad ----(1)$ بالجمع

$4x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

نعوض قيمة $x = \frac{9}{2}$ في معادلة (2)

$\frac{9}{2} + y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6 - \frac{9}{2} = \frac{12-9}{2} = \frac{3}{2}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

سؤال: أصحح الخطأ : قال أحمد أن مجموعة حل المعادلتين الخطيتين : $2x+3y=6\,,3x+2y=1$ هي المجموعة : $\left\{\left(\frac{5}{16},\frac{5}{9}\right)\right\}$ اكتشف خطأ أحمد وصححه .

الحل

بضرب معادلة (1) في العدد2 والمعادلة (2) في العدد 3

$$4x+\cancel{6y}=12 \quad ————(1)$$
$$\mp 9x\mp\cancel{6y}=\mp 3 \quad ————(2) \quad \text{بالطرح}$$
$$-5x=9 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{9}{5}$$

نعوض قيمة $x=-\frac{9}{5}$ في معادلة (2)

$$3\left(-\frac{9}{5}\right)+2y=1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{27}{5}+2y=1 \quad \}\times 5$$
$$-27+10y=5 \quad\Rightarrow\quad 10y=5+27 \quad\Rightarrow\quad 10y=32 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(-\frac{9}{5},\frac{16}{5}\right)\right\}$

خطأ أحمد هو أيجاد مجموعة الحل .

سؤال: أكتب // مجموعة حل المعادلتين الخطيتين :

$$5x-6y=0 \quad ————(1)$$
$$x+2y=4 \quad ————(2) \quad \}\times 3$$

الحل

بضرب معادلة (2) في العدد3

$$5x-6y=0 \quad ————(1)$$
$$3x+6y=12 \quad ————(2) \quad \text{بالجمع}$$
$$8x=12 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

نعوض قيمة $x=\frac{3}{2}$ في معادلة (2)

$$\frac{3}{2}+2y=4 \quad \}\times 2 \quad\Rightarrow\quad 3+4y=8 \quad\Rightarrow\quad 4y=8-3$$
$$4y=5 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad \text{مجموعة الحل : } \left\{\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)\right\}$$

مراجعة الفصل

سؤال: جد مجموعة الحل االنظام في R باستعمال الحذف لكل مما يأتي : $x + 3y = 7 \ , \ x - 3y = 1$

الحل

$x + \cancel{3y} = 7 \ ——— (1)$

$x - \cancel{3y} = 1 \ ——— (2)$ بالجمع

$2x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{2} = 4$

نعوض قيمة $x = 4$ في معادلة (1)

$4 + 3y = 7 \quad \Rightarrow \quad 3y = 7 - 4$

$3y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{3} = 1$

مجموعة حل النظام : $\{(4, 1)\}$

سؤال: جد مجموعة الحل االنظام في R باستعمال الحذف لكل مما يأتي :

$x + y = 2 \ ——— (1)$

$x + 5y = 4 \ ——— (2)$

الحل

$x + y = 2 \ ——— (1)$

$\mp x \mp 5y = \mp 4 \ ——— (2)$ بالطرح

$-4y = -2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

نعوض قيمة $y = \frac{1}{2}$ في معادلة (1)

$x + \frac{1}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي : جد مجموعة حل المعادلتين بيانيا في R

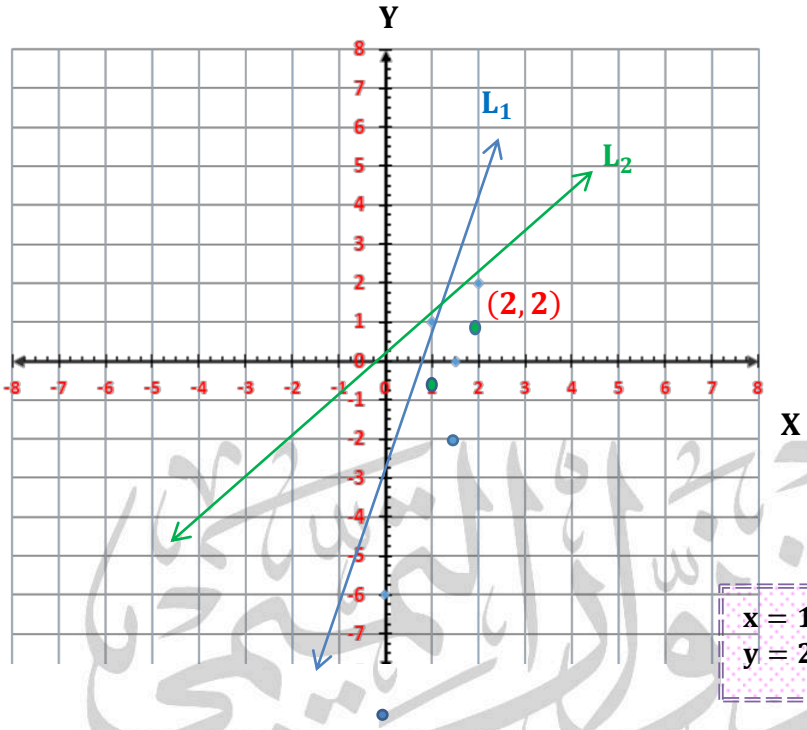
[1] $y = 4x - 6$, $y = x$ } a) $\{(-2,-2)\}$ b) $\{(-2,2)\}$ c) $\{(2,-2)\}$ d) $\{(2,2)\}$

الحل : نرمز للمعادلة (1) $y = 4x - 6$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	−6	(0, −6)
$\frac{3}{2}$	0	$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$y = 0 - 6 \Rightarrow y = -6$

$0 = 4x - 6 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$



نرمز للمعادلة (2) $y = x$ بالرمز L_2

$x = 1 \Rightarrow y = 1$

$y = 2 \Rightarrow x = 2$

x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

مجموعة حل النظام : $\{(2,2)\}$ الجواب فرع (d)

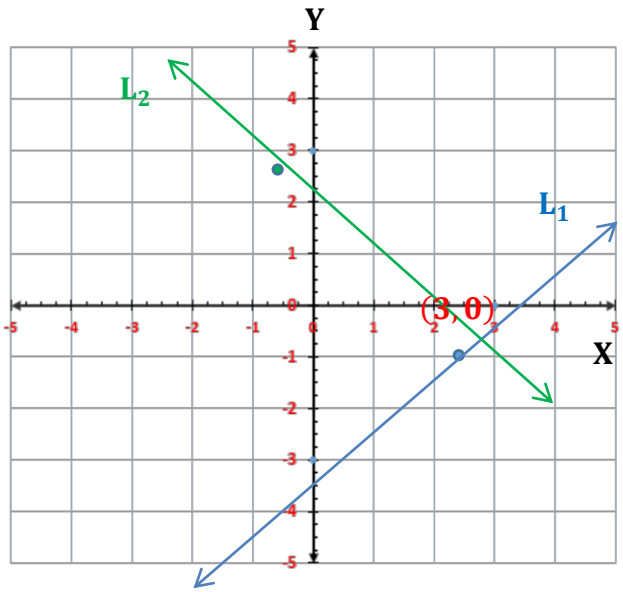
[2] $y = x - 3$, $y = 3 - x$ } a) $\{(-3,0)\}$ b) $\{(3,0)\}$ c) $\{(0,-3)\}$ d) $\{(0,3)\}$

الحل : نرمز للمعادلة (1) $y = x - 3$ بالرمز L_1

$y = 0 - 3 \Rightarrow y = -3$

$0 = x - 3 \Rightarrow x = 3$

x	y	(x, y)
0	−3	(0, −3)
3	0	(3, 0)



نرمز للمعادلة (1) $y = 3 - x$ بالرمز L_2

$y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3$

$0 = 3 - x \Rightarrow x = 3$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

مجموعة حل النظام: $\{(3,0)\}$

الجواب فرع (b)

سؤال: جد مجموعة الحل للمعادلتين في R باستعمال التعويض لكل مما يأتي :

[3] $3x + 4y = 26$ ——— (1)
$5x - 2y = 0$ ——— (2)

a) $\{(2,5)\}$ b) $\{(-2,-5)\}$
c) $\{(2,-5)\}$ d) $\{(-2,5)\}$

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$5x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{5}y$ ——— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3\left(\frac{2}{5}y\right) + 4y = 26 \Rightarrow \frac{6}{5}y + 4y = 26 \quad \}\times 5$

$6y + 20y = 130 \Rightarrow 26y = 130$

$y = \frac{130}{26} = 5$

نعوض قيمة $y = 5$ في معادلة (3)

$x = \frac{2}{5} \times 5 = 2$

مجموعة حل النظام : $\{(2,5)\}$

الجواب فرع (a)

[4] $y = 6x + 12$ ——— (1)
$3y = 2x - 8$ ——— (2)

a) $\left\{\left(-\frac{11}{4}, \frac{9}{2}\right)\right\}$ b) $\left\{\left(\frac{11}{4}, -\frac{9}{2}\right)\right\}$
c) $\left\{\left(-\frac{11}{4}, -\frac{9}{2}\right)\right\}$ d) $\left\{\left(\frac{11}{4}, \frac{9}{2}\right)\right\}$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 4

$7x - \cancel{4y} = 12$ ——— (1)
$\mp 12x \pm \cancel{4y} = \mp 20$ ——— (2) بالطرح

$-5x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$

نعوض قيمة $x = \frac{8}{5}$ في معادلة (2)

$3\left(\frac{8}{5}\right) - y = 5 \Rightarrow \frac{24}{5} - y = 5$

$y = \frac{24}{5} - 5 = \frac{24 - 25}{5} = -\frac{1}{5}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4$ ——— (1)
$y - \frac{x}{4} = 2$ ——— (2)

a) $\{(8,-4)\}$ b) $\{(-8,-4)\}$
c) $\{(8,4)\}$ d) $\{(-8,4)\}$

الحل : نبسط المعادلتين بضرب معادلة (1) في العدد 4 والمعادلة (2) في العدد 4

$\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4 \quad \}\times 4 \Rightarrow 3x - 2y = 16$ ——— (1)

$y - \frac{x}{4} = 2 \ \} \times 4 \Rightarrow 4y - x = 8$ ——— (2)

من معادلة ( ) نحصل على :

$x = 4y - 8$ ——— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3(4y - 8) - 2y = 16 \Rightarrow 12y - 24 - 2y = 16$

$10y = 16 + 24 \Rightarrow 10y = 40 \Rightarrow y = 4$

نعوض قيمة $y = 4$ في معادلة (3)

$x = 4(4) - 8 = 16 - 8 = 8$

مجموعة حل النظام : $\{(8,4)\}$

الجواب فرع (c)

سؤال: جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي :

[7] $6y - 2x - 8 = 0$ ——(1)
$y + x - 12 = 0$ ——(2)

a) $\{(8,-4)\}$ b) $\{(8,4)\}$
c) $\{(-8,4)\}$ d) $\{(-8,-4)\}$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 2

$6y - 2\cancel{x} - 8 = 0$ ——(1)
$2y + 2\cancel{x} - 24 = 0$ ——(2) بالجمع

$8y - 32 = 0 \Rightarrow 8y = 32 \Rightarrow$
$y = \frac{32}{8} = 4$

نعوض قيمة $y = 4$ في معادلة (2)

$4 + x - 12 = 0 \Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

مجموعة حل النظام : $\{(8,4)\}$

الجواب فرع (b)

[6] $7x - 4y = 12$ ——(1)
$3x - y = 5$ ——(2)

a) $\left\{\left(-\frac{8}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$ b) $\left\{\left(-\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$
c) $\left\{\left(\frac{8}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$ d) $\left\{\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$

نضرب معادلة ( ) في 2

$8x - \cancel{2y} = 28$ ——(1)
$\mp x \pm \cancel{2y} = \mp 14$ ——(2) بالطرح

$7x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في ( )

$4(2) - y = 14 \Rightarrow 8 - y = 14$
$y = 8 - 14 = -6$

مجموعة حل النظام : $\{(2,-6)\}$

الجواب فرع (c)

[8] $\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = 2\frac{1}{3}$ ——(1)
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 3\frac{1}{2}$ ——(2)

a) $\{(-2,-6)\}$ b) $\{(-2,6)\}$
c) $\{(2.-6)\}$ d) $\{(2,6)\}$

الحل : نبسط معادلة (1) ومعادلة (2)

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = \frac{7}{3}$ $\}\times 6$
$4x - y = 14$ ——(1) $\}\times 2$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = \frac{7}{2}$ $\}\times 4$
$x - 2y = 14$ ——(2)

Lesson [3-2] Solving Quadratic Equations with one variable

[3 – 2 – 1]	Using difference between two squres to solve equations

لحل المعادلة بطريقة التحليل فرق بين مربعين نتبع ما يأتي :

- يكون الحل بنفس خطوات التحليل التي درسناها في الفصل الثاني مع تكملة الحل بإيجاد مجموعة الحل .
- للحل بهذه الطريقة يجب أن يتكون السؤال من مربعين والأشارة بينهما سالبة .
- إذا طلب في السؤال طول ضلع أو عرض أو أي عدد حقيقي فإن القيمة السالبة في مجموعة الحل تهمل (لأنه لا يوجد طول ضلع أو عرض سالب القيمة) .

طريقة الحل :

1. نقوم بفتح قوسين وتساويهما بالصفر .
2. نضع في القوس الاول أشارة موجب وفي القوس الثاني أشارة سالب أو بالعكس .
3. نضع ناتج الجذور التربيعية للحد الاول والثاني داخل الأقواس .
4. نستخدم خطوتين (إما – أو) لإيجاد قيمة المتغير في الحالتين .
5. نجد مجموعة الحل .

Ex./ Write an equation represents the area of picture, then solve it to find the side length of the picture. If you know the area of the picture is =9.

Sol./

Assume that the side length of picture is the variable (x)

Since Area=L*W

$x^2 = 9$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 0$

$either/\ x+3=0 \Rightarrow x=-3$ (neglagt)

$or/\ x-3=0 \Rightarrow x=3$

The wall picture length is $3m$

Ex./ solve the following equation by using the difference between two squares, then check the correct of solution.

Sol./

$(4+y)(4-y)=0$

$either\ /\ 4+y=0 \Rightarrow y=-4$

$or/\ 4-y=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow S=\{4,-4\}$

Checking نعوض قيم y في المعادلة

$y=4 \Rightarrow 16-y^2 = 16-(4)^2 = 16-16 =$

$y=-4 \Rightarrow 16-y^2 = 16-(-4)^2 = 16-16 = 0$

Ex./ Solve the following equations in R by using the difference between two squares:

[1] $4x^2 - 25 = 0$ *Sol.* أما $2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ أو $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$	[2] $3Z^2 - 12 = 0$ *Sol.* $3(Z^2 - 4) = 0 \} \div 3$ $Z^2 - 4 = 0 \Rightarrow (Z+2)(Z-2) = 0$ أما $Z + 2 = 0 \Rightarrow Z = -2$ أو $Z - 2 = 0 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$
[3] $2y^2 - 6 = 0$ *Sol.* $2(y^2 - 3) = 0 \} \div 2$ $y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (y+\sqrt{3})(y-\sqrt{3}) = 0$ أما $y + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3}$ أو $y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$	[4] $x^2 - 5 = 0$ *Sol.* $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) = 0$ أما $x + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$ أو $x - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$
[5] $(Z+1)^2 - 36 = 0$ *Sol.* $(Z+1+6)(Z+1-6) = 0$ $\Rightarrow (Z+7)(Z-5) = 0$ أما $Z + 7 = 0 \Rightarrow Z = -7$ أو $Z - 5 = 0 \Rightarrow Z = 5 \Rightarrow S = \{-7, 5\}$	

[3 − 2 − 2] Using Square root Property to Solve the equations root

لحل المعادلات بخاصية الجر التربيعي نتبع ما يأتي

1. فك الاقواس إن وجدت .
2. نقسم على العامل المشترك إن وجد (أو معامل x^2) .
3. نجعل المتغير في طرف والثابت (العدد) في طرف آخر .
4. نأخذ جذر تربيعي للطرفين .

- يجب أن تتكون المعادلة من حدين فقط .
- يجب أن يكون كل حد في طرف .
- كل رقم يخرج من تحت الجذر له قيمتان . قيمة موجبة وأخرى سالبة .
- إذا كان أحد الطرفين أشارته سالب ليس للمعادلة حل .

$$\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$$
$$\sqrt{25} = |5| = 5$$

Ex./ Solve the following equation *in* R by using the property of square root, then check the correction of solution ; $x^2 = 9$

Sol./

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow S = \{3, -3\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

$x = 3 \Rightarrow x^2 = (3)^2 = 9$ الطرف الأيمن

$x = -3 \Rightarrow x^2 = (-3)^2 = 9$ الطرف الأيمن

Ex./ Solve the following equation in R by using the square root rule:

[1] $y^2 = 36$ *Sol./* $y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = \pm 6 \quad S = \{6, -6\}$	[2] $Z^2 = \frac{9}{25}$ *Sol./* $Z = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow Z = \pm\frac{3}{5} \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$
[3] $x^2 + 81 = 0$ *Sol./* $x^2 = -81$ (لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب)	[4] $3y^2 = 7$ *Sol./* $y^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ $S = \left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$
[5] $4x^2 - 5 = 0$ *Sol./* $4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$ $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$	

اذا ربطت طرفي معادلة صحيحة فأن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة . أي أن :

$y = x \Rightarrow y^2 = x^2$

لحل مثل هذا النوع من المعادلات نتبع ما يأتي :

[1]نجعل الحد الذي يحتوي على الجذر $(\sqrt{x})$ في طرف والأعداد في طرف اخر .

[2]نقسم طرفي المعادلة على معامل المتغير الذي يحتوي على الجذر $(\sqrt{x})$ أي :

نجعل المعادلة بالصورة : $\sqrt{x} = a$

[3]نقوم بتربيع طرفي المعادلة . أي أن : $(\sqrt{x})^2 = a^2$

[4]نكتب مجموعة الحل .

Ex./ Solve the following equations in R

[1] $3\sqrt{x} = 18 \quad \} \div 3$ *Sol./* $\sqrt{x} = \frac{18}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = 6$ بتربيع الطرفين $(\sqrt{x})^2 = (6)^2 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow S = \{36\}$	[2] $\sqrt{y+8} = 3$ بتربيع الطرفين *Sol./* $(\sqrt{y+8})^2 = (3)^2 \Rightarrow y + 8 = 9$ $y = 9 - 8 = 1 \Rightarrow S = \{1\}$
[3] $\sqrt{5Z} = 7$ بتربيع الطرفين *Sol./* $(\sqrt{5Z})^2 = (7)^2 \Rightarrow 5Z = 49$ $Z = \frac{49}{5} \Rightarrow S = \left\{\frac{49}{5}\right\}$	[4] $\sqrt{\frac{x}{13}} = 1$ بتربيع الطرفين *Sol./* $\left(\sqrt{\frac{x}{13}}\right)^2 = (1)^2 \Rightarrow \frac{x}{13} = 1$ $x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$

Make sure of your understanding

Q1/Solve the following equations by using the difference between two squares, then check the correction of solution:

[1] $x^2 - 16 = 0$ Sol./ $(x+4)(x-4) = 0$ أما $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ أو $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{-4, 4\}$ تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة : $x = 4 \Rightarrow x^2 - 16 = (4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$ $x = -4 \Rightarrow x^2 - 16 = (-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$	[2] $81 - y^2 = 0$ Sol./ $(9+y)(9-y) = 0$ أما $9 + y = 0 \Rightarrow y = -9$ أو $9 - y = 0 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow S = \{-9, 9\}$ تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة : $y = 9 \Rightarrow 81 - y^2 = 81 - (9)^2 = 81 - 81 = 0$ $y = -9 \Rightarrow 81 - y^2 = 81 - (-9)^2 = 81 - 81 = 0$

[3] $2Z^2 - 8 = 0$

Sol./ $2(Z^2 - 4) = 0 \quad \} \div 2 \Rightarrow Z^2 - 4 = 0 \Rightarrow (Z+2)(Z-2) = 0$

أما $Z + 2 = 0 \Rightarrow Z = -2$

أو $Z - 2 = 0 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم Z في المعادلة :

$Z = 2 \Rightarrow 2Z^2 - 8 = 2(2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0$

$Z = -2 \Rightarrow 2Z^2 - 8 = 2(-2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0$

Q2/ Solve the following equations by using the difference between two squares:

[1] $4x^2 - 9 = 0$ *Sol./* $(2x+3)(2x-3) = 0$ أما $2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ أو $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ $S = \{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$	[2] $5y^2 - 20 = 0 \} \div 5$ *Sol./* $y^2 - 4 = 0 \Rightarrow (y+2)(y-2) = 0$ أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$ أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$
[3] $(y+2)^2 - 49 = 0$ *Sol./* $(y+2+7)(y+2-7) = 0$ $(y+9)(y-5) = 0$ أما $y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9$ أو $y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow S = \{-9, 5\}$	[4] $(3-Z)^2 - 1 = 0$ *Sol./* $(3-Z+1)(3-Z-1) = 0 \Rightarrow (4-Z)(2-Z) = 0$ أما $4 + Z = 0 \Rightarrow Z = -4$ أو $2 - Z = 0 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow S = \{-4, 2\}$
[5] $x^2 - 3 = 0$ *Sol./* $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$ أما $x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$ أو $x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$	[6] $y^2 - \frac{1}{9} = 0$ *Sol./* $\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0$ أما $y + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ أو $y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$

Q3/ Solve the following equations by using the rule of the square root:

[1] $x^2 = 64$ *Sol./* $x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8 \Rightarrow S = \{8, -8\}$	[2] $Z^2 = 7$ *Sol./* $Z = \pm\sqrt{7} \Rightarrow S = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$
[3] $2y^2 = \frac{49}{8}$ *Sol./* $y^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$ $y = \pm\frac{7}{4} \Rightarrow S = \{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\}$	[4] $6Z^2 - 5 = 0$ *Sol./* $6Z^2 = 5 \Rightarrow Z^2 = \frac{5}{6} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$ $Z = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\}$

[5] $4(x^2-12)=13$ *Sol./* $4x^2-48=13 \Rightarrow 4x^2=13+48 \Rightarrow 4x^2=63$ $x^2=\frac{63}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{63}{4}}$ $x=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2} \Rightarrow S=\left\{\frac{3\sqrt{7}}{2},-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right\}$	[6] $Z^2+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$ *Sol./* $Z^2=\frac{5}{6}-\frac{2}{3} \Rightarrow Z^2=\frac{5-4}{6} \Rightarrow Z^2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $Z=\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow Z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow S=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

Q4/ Solve the following equations in R:

[1] $3\sqrt{x}=15$

Sol./

$\sqrt{x}=\frac{15}{3} \Rightarrow \sqrt{x}=5$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2=(5)^2 \Rightarrow x=25 \Rightarrow S=\{25\}$

[2] $\sqrt{y-5}=2$ بتربيع الطرفين

Sol./

$(\sqrt{y-5})^2=(2)^2 \Rightarrow y-5=4$

$y=4+5=9 \Rightarrow S=\{9\}$

[3] $\sqrt{2Z}=6$ بتربيع الطرفين

Sol./

$(\sqrt{2Z})^2=(6)^2 \Rightarrow 2Z=36$

$Z=\frac{36}{2}=18 \Rightarrow S=\{18\}$

تدرب وحل التمرينات

Q1/ Solve the following equations, then check the correction of solution:

[1] $x^2 = 49$

Sol./

$x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow S = \{7, -7\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

$x = 7 \Rightarrow x^2 = (7)^2 = 49$ الطرف الايمن

$x = -7 \Rightarrow x^2 = (-7)^2 = 49$ الطرف الايمن

[2] $5y^2 - 10 = 0 \quad \} \div 5$

Sol./

$y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2$

$y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة :

$y = \sqrt{2} \Rightarrow 5y^2 - 10 = 5(\sqrt{2})^2 - 10 = 10 - 10 = 0$

$y = -\sqrt{2} \Rightarrow 5y^2 - 10 = 5(-\sqrt{2})^2 - 10 = 10 - 10 = 0$

[3] $3Z^2 - 27 = 0 \quad \} \div 3$

Sol./

$Z^2 - 9 = 0 \Rightarrow (Z + 3)(Z - 3) = 0$

أما $Z + 3 = 0 \Rightarrow Z = -3$

أو $Z - 3 = 0 \Rightarrow Z = 3 \Rightarrow S = \{3, -3\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم Z في المعادلة :

$Z = 3 \Rightarrow 3Z^2 - 27 = 3(3)^2 - 27 = 27 - 27 = 0$

$Z = -3 \Rightarrow 3Z^2 - 27 = 3(-3)^2 - 27$

$= 27 - 27 = 0$

Q2/ Solve the following equations in R by using the difference between two squares:

[1] $9x^2 - 36 = 0$

Sol./

$(3x+6)(3x-6) = 0$

Either / $3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} = -2$

Or/ $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

$S = \{2, -2\}$

[2] $9(x^2 - 1) - 7 = 0$

Sol./

$9x^2 - 9 - 7 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 16 = 0$

$(3x+4)(3x-4) = 0$

Either / $3x + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

Or / $3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$

سؤال: حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[1] $y^2 - \frac{1}{36} = 0$ *Sol./* $\left(y + \frac{1}{6}\right)\left(y - \frac{1}{6}\right) = 0$ *Either* /$y + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}$ *Or*/ $y - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{6} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right\}$	[2] $x^2 = 121$ *Sol./* $x = \pm\sqrt{121} \Rightarrow x = \pm 11 \Rightarrow S = \{11, -11\}$ [29] $50 - 2y^2 = 0 \quad \} \div 2$ *Sol./* $25 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25}$ $y = \pm 5 \Rightarrow S = \{9, -9\}$
[3] $x^2 = \frac{1}{64}$ *Sol./* $x = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{8} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$	[4] $7(x^2 - 2) = 50$ *Sol./* $7x^2 - 14 = 50 \Rightarrow 7x^2 = 50 + 14$ $7x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{7} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{64}{7}}$ $x = \pm\frac{8}{\sqrt{7}} \Rightarrow S = \left\{\frac{8}{\sqrt{7}}, -\frac{8}{\sqrt{7}}\right\}$

Q3/ Solve the following equations:

[1] $6\sqrt{x} = 30 \quad \} \div 3$

Sol./

$\sqrt{x} = \frac{30}{6} \Rightarrow \sqrt{x} = 5$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (5)^2 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow S = \{25\}$

[2] $\sqrt{4Z} = 8$ بتربيع الطرفين

Sol./

$(\sqrt{4Z})^2 = (8)^2 \Rightarrow 4Z = 64 \Rightarrow Z = \frac{64}{4} = 16$

$S = \{16\}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: موكيت سجاد : قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها $12m$ وعرضها $3m$ قطعت الى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل . ما طول ضلع الغرفة .

الحل

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 12 \times 3 = 36\ m^2$

نفرض طول ضلع المربع $= x$

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه $\Leftarrow$ $A = x^2$

مساحة المستطيل = مساحة المربع

$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$

طول ضلع الغرفة $6m$

سؤال: هندسة : قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها $x\ cm$ قطعت أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع $2cm$ وثنيت لتكون صندوقا دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه $32cm^3$. جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية

الحل

الارتفاع $= 2$ وبعدي القاعدة $= (x-4)$

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول × العرض × الارتفاع

$2(x-4)(x-4) = 32 \quad \} \div 2$

$(x-4)^2 = 16 \Rightarrow x - 4 = \pm\sqrt{16}$

$x - 4 = \pm 4$

أما $x - 4 = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 = 8\ cm$

طول ضلع قطعة الكارتون

أو $x - 4 = -4 \Rightarrow x = -4 + 4 = 0$ يهمل

سؤال: نافورة : صمم حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه $3m$ في منتصف حديقة مربعة الشكل فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض $40m^2$ فما طول ضلع الحديقة ؟

الحل

نفرض طول ضلع الحديقة $= x$

المساحة المتبقية= مساحة الحديقة – مساحة الحوض

$x^2 - 3^2 = 40 \Rightarrow x^2 - 9 = 40 \Rightarrow x^2 = 40 + 9$

$x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7$

طول ضلع الحديقة $x = 7\ m$ أو يهمل $x = -7$ أما

فـــــــــكر

سؤال: تحد : حل المعادلات التالية في R

i) $9(x^2+1)=34$

الحل

$9x^2+9-34=0 \Rightarrow 9x^2-25$

$(3x+5)(3x-5)=0$

أما $3x+5=0 \Rightarrow 3x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$

أو $3x-5=0 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right\}$

ii) $4x^2-3=0$

الحل

$4x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

سؤال: هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا ؟

i) $2y^2=\frac{16}{10}$, $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$

الحل

$y^2=\frac{16}{20} \Rightarrow y^2=\frac{4}{5} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}$

$y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow S=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$

$\left\{\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ لا تمثل مجموعة الحل

ii) $3x^2-7=0$, $\left\{\frac{7}{\sqrt{3}},-\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$

الحل

$3x^2=7 \Rightarrow x^2=\frac{7}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

$x=\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S=\left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$

لا تمثل مجموعة الحل : $\left\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$

سؤال: أصحح الخطأ: قال صلاح أن المجموعة $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$ اكتشف خطأ صلاح وصححه

الحل

$$5x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

سؤال: حس عددي : عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أنقص من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة. ما العدد ؟

الحل نفرض العدد الصحيح هو x

$$x^2 - 1 = 80 \Rightarrow x^2 = 80 + 1$$

$$x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt{81} \Rightarrow x = \pm 9$$

$x = -9$ يهمل

$x = 9$ الصحيح

سؤال: أكتب // مجموعة الحل للمعادلة : $(8 - 3y)^2 - 1 = 0$

الحل

$$(8 - 3y + 1)(8 - 3y - 1) = 0 \Rightarrow (9 - 3y)(7 - 3y) = 0$$

أما $9 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{3} = 3$

أو $7 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{3} \Rightarrow S = \left\{3, \frac{7}{3}\right\}$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين : $25 - x^2 = 0$

الحل

$$(5 + x)(5 - x) = 0$$

أما $5 + x = 0 \Rightarrow x = -5$

أو $5 - x = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{-5, 5\}$

مثال 2 // حل المعادلة التالية في R باستعمال خاصية الجذر التربيعي : $y^2 = \frac{16}{25}$

الحل

$$y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow y = \mp\frac{4}{5}$$

$S = \left\{\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$

تدريب 1 // حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين : $x^2 - 64 = 0$

الحل

$(x+8)(x-8) = 0$

أما $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$

أو $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow S = \{-8, 8\}$

تدريب 2 // حل المعادلة التالية في R باستعمال خاصية الجذر التربيعي : $y^2 = 49$

الحل

$y^2 = 49 \Rightarrow y = \mp\sqrt{49} \Rightarrow y = \mp 7$

$S = \{7, -7\}$

الاختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلة التالية في R باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين :

[1] $3x^2 - 12x = 0$

a) $S = \{4, -4\}$ b) $S = \{3, -3\}$

c) $S = \{0, 4\}$ d) $S\{0, 3\}$

الحل :

$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0$

أما $3x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{0, 4\}$ أو

الجواب فرع (c)

[2] $7Z^2 - 21 = 0$

a) $S = \{7, -7\}$ b) $S = \{3, -3\}$

c) $S = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$ d) $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

الحل :

$7(Z^2 - 3) = 0 \ \} \div 7 \Rightarrow Z^2 - 3 = 0$

$(Z + \sqrt{3})(Z - \sqrt{3}) = 0$

أما $Z + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Z = -\sqrt{3}$

أو $Z - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Z = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

الجواب فرع (d)

[3] $4(x^2 - 1) - 5 = 0$

a) $S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

الحل :

$4x^2 - 4 - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 9 = 0$

$(2x+3)(2x-3) = 0$

أما $2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

[4] $(y+7)^2 - 81 = 0$

a) $S = \{2, -2\}$ b) $S = \{16, -16\}$

c) $S = \{2, -16\}$ d) $S = \{-2, 16\}$

الحل :

$(y + 7 + 9)(y + 7 - 9) = 0$

$(y + 16)(y - 2) = 0$

أما $y + 16 = 0 \Rightarrow y = -16$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \{2, -16\}$

الجواب فرع (c)

أو $2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ $S=\left\{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\}$ الجواب فرع (a)	
[5] $3x^2-6=0$ a) $S=\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$ b) $S=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$ c) $S=\{6,-6\}$ d) $S=\{2,-2\}$ الحل : $3(x^2-2)=0 \ \}\div 3 \Rightarrow x^2-2=0$ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$ أما $x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$ أو $x-\sqrt{2}= \Rightarrow x=\sqrt{2} \Rightarrow S=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$ الجواب فرع (b)	

سؤال: حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[6] $x^2=144$ a) $S=\{7,-7\}$ b) $S=\{14,-14\}$ c) $S=\{12,-12\}$ d) $S=\{12,12\}$ الحل : $x=\pm\sqrt{144} \Rightarrow x=\pm 12 \Rightarrow S=\{12,-12\}$ الجواب فرع (c)	[7] $32-2y^2=0$ a) $S=\{6,6\}$ b) $S=\{4,-4\}$ c) $S=\{6,-6\}$ d) $S=\{4,4\}$ الحل : $2y^2=32 \Rightarrow y^2=\frac{32}{2} \Rightarrow y^2=16$ $y=\pm\sqrt{16} \Rightarrow y=\pm 4 \Rightarrow S=\{4,-4\}$ الجواب فرع (b)

[8] $5Z^2 = 9$

a) $S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$

الحل :

$Z^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \Rightarrow Z = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

$S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$

الجواب فرع (c)

[9] $4(y^2 - 1) = 45$

a) $S = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\right\}$

الحل :

$4y^2 - 4 = 45 \Rightarrow 4y^2 = 45 + 4 \Rightarrow 4y^2 = 49$

$y^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{49}{4}} \Rightarrow y = \pm\frac{7}{2}$

$S = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$

الجواب فرع (c)

[10] $\frac{1}{2}Z^2 = \frac{1}{9}$

a) $S = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

الحل :

$9Z^2 = 2 \Rightarrow Z^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$

$Z = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$

الجواب فرع (c)

[11] $x^2 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$

a) $S = \left\{\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

c) $S = \{2, -2\}$ d) $S = \{1, -1\}$

الحل :

$x^2 = \frac{3}{16} + \frac{13}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{16}{16} = 1 \Rightarrow$

$x = \mp\sqrt{1}$

$x = \mp 1 \Rightarrow S = \{1, -1\}$

الجواب فرع (d)

Lesson [3 – 3]Using Probe and Error to Solve the Quadratic Equations(Experiment)

[3 – 3 – 1] Solving the equation $x^2 + bx + c = 0$

Using Probe and Error to Solve the Quadratic Equations(Experiment)

Ex./ Solve the following equations by factoring in experiment:

[1] $x^2 - 7x + 12 = 0$ Sol./ $(x-4)(x-3) = 0$ *Either* / $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ *Or* / $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{4, 3\}$	[2] $y^2 + 8y + 15 = 0$ Sol./ $(y+5)(y+3) = 0$ *Either* / $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ *Or* / $(y+5) = 0 \Rightarrow y = -5$ $S = \{-5, -3\}$
[3] $Z^2 - Z - 30 = 0$ Sol./ $(Z-6)(Z+5) = 0$ أما $Z - 6 = 0 \Rightarrow Z = 6$ أو $Z + 5 = 0 \Rightarrow Z = -5 \Rightarrow S = \{6, -5\}$	[4] $x^2 - 2x - 63 = 0$ Sol./ $(x-9)(x+7) = 0$ أما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$ أو $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow S = \{9, -7\}$

سؤال: اذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار $2m$ على ضعف عرضه ومساحته $480m^2$. فما بعدي الملعب؟

الحل نفرض عرض الملعب x , طول الملعب $2x + 2$

مساحة الملعب = الطول × العرض

$x(2x + 2) = 480$

$2x^2 + 2x - 480 = 0 \quad \} \div 2$

$x^2 + x - 240 = 0 \Rightarrow (x+16)(x-15) = 0$

أما $x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$ يهمل

أو $x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5m$ عرض الملعب

$2x + 2 = 2(15) + 2 = 30 + 2 = 32m$ طول الملعب

Ex./ What is the number which its square increases in 12?

Sol./ Assume that the number is x, then the square of the number will be x2 , and the numerical sentence which represents the problem is

نفرض العدد $= x$, مربع العدد $= x^2$

$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$(x-4)(x+3) = 0$

أما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

[3 – 3 – 2]	Solving the equation $ax^2 + bx + c = 0$, a≠0

Ex./ Solve the following equations by factoring in experiment:

[1] $4y^2 - 14y + 6 = 0$ *Sol./* $(4y-2)(y-3) = 0$ either/ $4y - 2 = 0 \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Or/ $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow S = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$	[2] $3x^2 + 18x - 21 = 0$ *Sol./* $(x+7)(3x-3) = 0$ either/ $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$ either Or/ $3x - 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$ $S = \{1, -7\}$
[3] $20 + 13Z + 2Z^2 = 0$ *Sol./* $(4+Z)(5+2Z) = 0$ either/ $4 + Z = 0 \Rightarrow Z = -4$ Or/ $5 + 2Z = 0 \Rightarrow 2Z = -5 \Rightarrow Z = -\frac{5}{2}$ $S = \left\{-4, -\frac{5}{2}\right\}$	[4] $9x^2 - 69x - 24 = 0 \} \div 3$ *Sol./* $3x^2 - 23x - 8 = 0 \Rightarrow (x-8)(3x+1) = 0$ either/ $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$ Or/ $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ $S = \left\{8, -\frac{1}{3}\right\}$

Ex./ **A swimming pool which its length is less in three times of its width in 1 m. If the area of the swimming pool is $140m^2$, find its dimensions.**

Sol./ **Assume that the width of the swimming pool is the variable x so the length of the pool is 3x – 1**

The equation which represents the problem is

نفرض عرض المسبح x

طول المسبح $3x - 1$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$x(3x-1) = 140 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - x - 140 = 0$

$(x-7)(3x+20) = 0$

أما $x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7m$ عرض المسبح

أو $3x + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -20 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{20}{3}$ يهمل

$3x - 1 = 3(7) - 1 = 21 - 1 = 20m$ طول المسبح

Make sure of your understanding

Q1/ Solve the following equations in R by factoring in experiment:

[1] $x^2 - 9x + 18 = 0$ *Sol./* $(x-6)(x-3) = 0$ *either* $/x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$ أو $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{6, 3\}$	[2] $x^2 - 4x - 32 = 0$ *Sol./* $(x-8)(x+4) = 0$ *either* $/ x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8$ Or/ $x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4 \quad \Rightarrow \quad S = \{8, -4\}$
[3] $y^2 + 48y - 49 = 0$ *Sol./* $(y+49)(y-1) = 0$ *either* $/ y + 49 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -49$ Or/ $y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{1, -49\}$	[4] $x^2 - 9x - 36 = 0$ *Sol./* $(x-12)(x+3) = 0$ *either* $/x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 12$ Or/ $x + 3 = 0 \quad x = -3 \quad \Rightarrow \quad S = \{12, -3\}$
[5] $x^2 - 3x + 2 = 0$ *Sol./* $(x-2)(x-1) = 0$ *either* $/x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ Or/ $x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{1, 2\}$	[6] $y^2 - 8y - 33 = 0$ *Sol./* $(y-11)(y+3) = 0$ *either* $/y - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 11$ Or/ $y + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -3 \Rightarrow \quad S = \{11, 3\}$

Q2/ What is the number that if we add its fourfold to it's square, the result will be 45?

Sol./ Let the number is $= X$ And the number of its square is $= x^2$

add its fourfold to it's square $= 4x$

نفرض العدد هو $= x$, مربع العدد $= x^2$

أربعة اضعاف العدد $= 4x$

$x^2 + 4x = 45 \Rightarrow x^2 + 4x - 45 = 0$

$(x+9)(x-5) = 0$

either / $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5, -9\}$

Q3/ What is the number which its square is more greater than its double in 35?

Sol./ Let the number is $= x$, its square is $= x^2$ and its double is $= 2x$

نفرض العدد هو $= x$, مربع العدد $= x^2$

ضعف العدد $= 2x$

$x^2 - 2x = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x-7)(x+5) = 0$

either / $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

Or / $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow S = \{7, -5\}$

[14] $70 - 33y - 4y^2 = 0$

Sol./

$(7 - 4y)(10 + y) = 0$

either / $7 - 4y = 0 \Rightarrow 4y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{4}$

Or / $10 + y = 0 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow S = \left\{-10, \frac{7}{4}\right\}$

Q4/ A carpet ,its length is more than its width in about $2m$ and its area is $48m^2$, what are the dimensions of the carpet?

الحل

نفرض عرض السجادة x , طول السجادة $x + 2$

مساحة السجادة = الطول × العرض

$x(x+2) = 48 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x+8)(x-6) = 0$

أما $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$ يهمل

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ عرض السجادة

$x + 2 = 6 + 2 = 8m$ طول السجادة

Q5/ Solve the following equation in R:-

[1] $15x^2 - 11x - 14 = 0$

الحل

$(5x-7)(3x+2) = 0$

أما $5x - 7 = 0 \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

أو $3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$S = \left\{\frac{7}{5}, -\frac{2}{3}\right\}$

[2] $6 + 7x - 5x^2 = 0$

الحل

$(3+5x)(2-x) = 0$

أما $3 + 5x = 0 \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \left\{2, -\frac{3}{5}\right\}$

[3] $42 + 64y + 24y^2 = 0 \quad \} \div 2$

الحل

$21 + 32y + 12y^2 = 0$

$(3+2y)(7+6y) = 0$

أما $3 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

أو $7 + 6y = 0 \Rightarrow 6y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{6}$

$S = \left\{-\frac{7}{6}, -\frac{3}{2}\right\}$

[4] $36 - 75x + 6x^2 = 0 \quad \} \div 3$

الحل

$12 - 25x + 2x^2 = 0 \Rightarrow (12-x)(1-2x) = 0$

أما $12 - x = 0 \Rightarrow x = 12$

أو $1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{12, \frac{1}{2}\right\}$

Q6/ A rectangular- shaped land, its length is more than its width in 4m, what are the two dimensions of the land if its area is $60m^2$ Rectangular Carpat ?

الحل

نفرض العرض x الطول $x + 4$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x+4) = 60 \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0$

$(x+10)(x-6) = 0$

أما $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$ يهمل

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ العرض

$x + 4 = 6 + 4 = 10m$ الطول

Solve the Exercises

Q1/ Solve the following equations in R by factoring in experiment:

[1] $x^2 - 15x + 56 = 0$ *Sol./* $(x-8)(x-7) = 0$ أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$ $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow S = \{8, 7\}$ أو	[2] $y^2 + 16y + 63 = 0$ *Sol./* $(y+9)(y+7) = 0$ أما $y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9$ أو $y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7 \quad S = \{-9, -7\}$
[3] $x^2 + 15x - 16 = 0$ *Sol./* $(x+16)(x-1) = 0$ أما $x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{1, -16\}$ أو	[4] $y^2 - y - 42 = 0$ *Sol./* $(y-7)(y+6) = 0$ أما $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$ أو $y + 6 = 0 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow S = \{7, -6\}$

Q2/ A rectangular- shaped metal, its width decreases in 2m from its length. What are the two dimensions of the piece of metal? If its area is $24m^2$?

Sol./

نفرض طول القطعة x , عرض القطعة $x - 2$

مساحة القطعة = الطول × العرض

$x(x-2) = 24 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$

$(x-6)(x+4) = 0$

أما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ طول القطعة

أو $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ يهمل

$x - 2 = 6 - 2 = 4m$ عرض القطعة

Q2/ A dining hall, its length less from the twice of its width in 3m and its area is $54m^2$, what are the dimensions of the hall?

الحل

نفرض عرض الصالة $x =$, مثلي عرضها $2x =$

طول الصالة $= 2x - 3$

مساحة الصالة = الطول × العرض

$x(2x-3) = 54 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 54 = 0$

$(x-6)(2x+9) = 0$

أما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ عرض الصالة

أو $2x + 9 = 0 \Rightarrow 2x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$ يهمل

$2x - 3 = 2(6) - 3 = 12 - 3 = 9m$ طول الصالة

Q3/ Find the solution set for the following equations, then check the correction of solution:

[1] $x^2 - 4x + 3 = 0$ الحل : $(x-3)(x-1) = 0$ أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{3, 1\}$ تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة : $x = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (3)^2 - 4(3) + 3$ $= 9 - 12 + 3 = 0$ $x = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (1)^2 - 4(1) + 3$ $= 1 - 4 + 3 = 0$	[2] $y^2 - 9y - 36 = 0$ الحل : $(y-12)(y+3) = 0$ أما $y - 12 = 0 \Rightarrow y = 12$ أ $+3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow S = \{12, -3\}$ تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y بالمعادلة : $y = 12 \Rightarrow y^2 - 9y - 36$ $= (12)^2 - 9(12) - 36$ $= 144 - 108 - 36 = 0$ $y = -3 \Rightarrow y^2 - 9y - 36$ $= (-3)^2 - 9(-3) - 36$ $= 9 + 27 - 36 = 0$
[3] $4 - 26x + 12x^2 = 0$ الحل : $(4-2x)(1-6x) = 0$ أما $4 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$ أو $1 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$	

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: رياضة : اذا كان طول صورة ملعب كرة القدم بمقدار $4m$ على ضعف عرضها فما بعدا الصورة اذا كانت مساحتها $160m^2$؟

الحل نفرض عرض الصورة x , ضعف العرض $2x$ طول الصورة $2x+4$

المساحة = الطول × العرض

$x(2x+4)=160$

$2x^2+4x-160=0 \ \} \div 2$

$x^2+2x-80=0$

$(x+10)(x-8)=0$

أما $x+10=0 \Rightarrow x=-10$ يهمل

أو $x-8=0 \Rightarrow x=8m$ عرض الصورة

$2x+4=2(8)+4=16+4=20m$ طول الصورة

سؤال: حقل نعام : اذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار $4m$ عن ضعف عرضه فاذا كانت مساحة الحقل $96m^2$ فهل يكفي سياج طوله $44m$ لتحويط الحقل ؟

الحل نفرض عرض الحقل x , ضعف العرض $2x$ طول الحقل $2x-4$

المساحة = الطول × العرض

$x(2x-4)=96 \Rightarrow 2x^2-4x-96=0 \ \} \div 2$

$x^2-2x-48=0 \Rightarrow (x+6)(x-8)=0$

أما $x+6=0 \Rightarrow x=-6$ يهمل

أو $x-8=0 \Rightarrow x=8m$ عرض

$2x-4=2(8)-4=16-4=12m$ طول الحقل

محيط المستطيل = 2 × (الطول + العرض)

$P=2\times(12+8)=2\times 20=40m$ نعم يكفي

سؤال: أطار صورة : اشترى سامر اطار لصورة طوله ضعف عرضه يحتاج سامر الى تصغير الاطار بمقدار 2cm من طوله وعرضه ليصبح مناسبا للصورة فما أبعاد الاطار الذي اشتراه سامر اذا كانت مساحة الصورة $40cm^2$ ؟

الحل

نفرض عرض الاطار x , طول الاطار $2x$

بعد التصغير يصبح : العرض $(x-2)$, الطول $(2x-2)$

المساحة = الطول × العرض

$$(2x-2)(x-2)=40$$
$$2x^2-4x-2x+4-40=0$$
$$2x^2-6x-36=0 \quad \} \div 2 \Rightarrow x^2-3x-18=0$$
$$(x-6)(x+3)=0$$

أما $x-6=0 \Rightarrow x=6m$ العرض

أو $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ يهمل

$2x=2(6)=12m$ طول

فـــــــــكر

سؤال: تحد : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

i) $(x-3)(x+2)=14$

الحل

$$x^2+2x-3x-6-14=0 \Rightarrow x^2-x-20=0$$
$$(x-5)(x+4)=0$$

أما $x-5=0 \Rightarrow x=5$

أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow S=\{5,-4\}$

ii) $3y^2-11y+10=80$

الحل

$$3y^2-11y+10-80=0$$
$$3y^2-11y-70=0 \Rightarrow (y-7)(3y+10)=0$$

أما $y-7=0 \Rightarrow y=7$

أو $3y+10=0 \Rightarrow 3y=-10 \Rightarrow y=-\frac{10}{3}$

$$S=\left\{7,-\frac{10}{3}\right\}$$

سؤال: وضح : هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا ؟

i) $4x^2 + 2x = 30 \quad , \quad \left\{-\frac{2}{5}, 3\right\}$

الحل

$(2x+6)(2x-5) = 0$

أما $2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

أو $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$S = \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$ لا تمثل مجموعة حل

ii) $42 - 33y + 6y^2 = 0 \quad , \quad \left\{2, \frac{7}{2}\right\}$

الحل

$(7-2y)(6-3y) = 0$

أما $7 - 2y = 0 \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$

أو $6 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{}{3} = 2$

$S = \left\{2, \frac{7}{2}\right\}$ تمثل مجموعة حل

سؤال: أصحح الخطأ : قالت رنا أن مجموعة الحل للمعادلة : $2x^2 - 34x + 60 = 0$ هي $\{3, 5\}$. حدد خطأ رنا وصحح.

الحل

$(2x-4)(x-15) = 0$

أما $2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

أو $x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow S = \{2, 15\}$

خطأ رنا مجموعة الحل .

سؤال: حس عددي : عدد صحيح مكون من رقمين فاذا كان رقم آحاده يزيد على ضعف عشراته بمقدار 1 وحاصل ضرب رقميه يساوي 10 فما العدد ؟

الحل

نفرض العشرات x , ضعف العشرات $2x$ الاحاد $2x + 1$

$x(2x+1) = 10 \Rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0$

$(2x+5)(x-2) = 0$

أما $2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \left\{2, -\frac{5}{2}\right\}$

سؤال: أكتب // معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها : ما العدد الذي ينقص مربعه على ضعفه بمقدار 35 ؟

الحل

نفرض العدد x , ضعف العدد $2x$, مربع العدد x^2

$x^2 - 2x = 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x-7)(x+5) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow S = \{7, -5\}$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة : $x^2 - 2x - 15 = 0$

الحل

$(x-5)(x+3) = 0$

أما $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S = \{5, -3\}$

تدريب 1 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة : $x^2 - 10x + 21 = 0$

الحل

$(x-7)(x-3) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{7, 3\}$

مثال 2 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة : $3y^2 - 11y + 10 = 0$

الحل

$(3y-5)(y-2) = 0$

أما $3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$

تدريب 2 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة : $4y^2 + 16y - 9 = 0$

الحل

$(2y+9)(2y-1) = 0$

أما $2y + 9 = 0 \Rightarrow 2y = -9 \Rightarrow y = -\frac{9}{2}$

أو $2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$

الاختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $y^2 + 10y + 21 = 0$

a) $S = \{3, -7\}$ b) $S = \{-3, 7\}$
c) $S = \{-3, -7\}$ d) $S = \{3, 7\}$

الحل :

$(y+3)(y+7) = 0$

أما $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$

أو $y + 7 = 0 \quad y = -7 \Rightarrow S = \{-3, -7\}$

الجواب فرع (c)

[2] $x^2 - 5x - 36 = 0$

a) $S = \{7, -8\}$ b) $S = \{-4, 9\}$
c) $S = \{4, -9\}$ d) $S = \{-4, -9\}$

الحل :

$(x-9)(x+4) = 0$

أما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

أو $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{-4, 9\}$

الجواب فرع (b)

[3] $y^2 + y - 56 = 0$

a) $S = \{7, -8\}$ b) $S = \{-7, 8\}$
c) $S = \{7, 8\}$ d) $S = \{-7, -8\}$

الحل :

$(y+8)(y-7) = 0$

أما $y + 8 = 0 \Rightarrow y = -8$

أو $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow S = \{7, -8\}$

الجواب فرع (a)

[4] $4y^2 + 18y + 18 = 0$

a) $S = \left\{-3, \frac{3}{4}\right\}$ b) $S = \left\{3, \frac{3}{4}\right\}$
c) $S = \left\{3, \frac{3}{2}\right\}$ d) $S = \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$

الحل :

$(2y+3)(2y+6) = 0$

أما $2y + 3 = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

أو $2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = -6$

$y = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow S = \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $6Z^2 + 36Z - 42 = 0$

a) $S = \{1, 7\}$ b) $S = \{-1, 7\}$
c) $S = \{-1, -7\}$ d) $S = \{1, -7\}$

الحل :

$6Z^2 + 36Z - 42 = 0 \ \}\div 6 \Rightarrow Z^2 + 6Z - 7 = 0$

$(Z+7)(Z-1) = 0$

أما $Z + 7 = 0 \Rightarrow Z = -7$

أو $Z - 1 = 0 \Rightarrow Z = 1 \Rightarrow S = \{1, -7\}$

الجواب فرع (d)

[6] $22 - 20y - 2y^2 = 0$

a) $S = \{11, 1\}$ b) $S = \{1, -11\}$
c) $S = \{11, -1\}$ d) $S = \{-1, -11\}$

الحل :

$22 - 20y - 2y^2 = 0 \ \}\div 2$

$11 - 10y - y^2 = 0$

$(1-y)(11+y) = 0$

أما $1 - y = 0 \Rightarrow y = 1$

أو $11 + y = 0 \Rightarrow y = -11 \Rightarrow S = \{1, -11\}$

الجواب فرع (b)

[10] $32 + 12x - 9x^2 = 0$

a) $= \left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{4}{3}, \frac{-8}{3}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$

الحل :

$(4 + 3x)(8 - 3x) = 0$

أما $4 + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

أو $8 - 3x = 0 \Rightarrow 8x = 3 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$

$S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$

الجواب فرع (d)

[8] ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 42 ؟

a) $S = \{7, 6\}$ b) $S = \{7, -6\}$

c) $S = \{-7, 6\}$ d) $S = \{-7, -6\}$

الحل

نفرض العدد x ، مربع العدد x^2

$x^2 - x = 42 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0$

$(x - 7)(x + 6) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow S = \{7, -6\}$

الجواب فرع (b)

[9] عددان حاصل ضربهما 54 أحدهما يزيد على الآخر بمقدار 3 فما العددان ؟

a) $S = \{6, 9\}$ b) $S = \{6, -9\}$

c) $S = \{-6, 9\}$ d) $S = \{-6, -9\}$

الحل

نفرض العدد الاول x ، العدد الثاني $x + 3$

$x(x + 3) = 54 \Rightarrow x^2 + 3x - 54 = 0$

$(x + 9)(x - 6) = 0$

أما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow S = \{6, -9\}$

الجواب فرع (b)

[10]عددان حاصل ضربهما 48أحدهما يقل عن الآخر بمقدار 8 فما العددان ؟

a) $S = \{8, 6\}$ b) $S = \{12, -4\}$

c) $S = \{10, 4\}$ d) $S = \{-12, -4\}$

الحل نفرض العدد الاول x , العدد الثاني $x - 8$

$x(x - 8) = 48 \Rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$

$(x - 12)(x + 4) = 0$

أما $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{12, -4\}$

الجواب فرع (b)

[3 – 4] Solving the Quadratic Equations by the Perfect square.

[3 – 4 – 1] Solving the equations by the Perfect square.

You have previaosly learned how to factor the algebraic expression which is as a perfect square. Now, we will use the factoring in solving equations by factoring the complete square to find the solution set of the equation.

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{ax^2} \pm \sqrt{c}\right)^2$$

حيث الإشارة $\pm$ حسب إشارة الحد الوسط (الثاني).

Ex./ What is the expression which represented by the side length of the square area?

Sol./

$x^2 - 20x + 100 = 0$

$(x - 10)^2 = 0 \Rightarrow x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10$

So the side length of the square region area which is allocated to tiger is $10m$.

Ex./ Solving the following equations in R by the complete square:

[1] $4x^2 + 20x + 25 = 0$ *Sol./* $(2x + 5)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0$ $2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$	[2] $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$ *Sol./* $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
[3] $3 - 6\sqrt{3}Z + 9Z^2 = 0$ *Sol./* $\left(\sqrt{3} - 3Z\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} - 3Z = 0$ $3Z = \sqrt{3} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}}{3}$	

[3 − 4 − 2] Solving Equations by Completing the square

يمكن حل المعادلة من الدرجة الثانية بالمربع الكامل كالآتي :

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ حيث $a \neq 0$

2) اذا كان $a \neq 1$ فنقسم المعادلة على a

3) نضيف الى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل x) أي أن : $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$

4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعا كاملا ونبسط الطرف الأيمن .

5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x

Ex./ **Solve the following equations by completing the square:**

[1] $x^2 - 4x - 12 = 0$

Sol./

$x^2 - 4x = 12$

$\left(\frac{1}{2} \times 4\right)^2 = (2)^4 = 4$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 4x + 4 = 12 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 16$ بأخذ الجذر التربيعي الطرفين

$x - 2 = \pm 4 \Rightarrow$

either/ $x - 2 = 4 \Rightarrow x = 4 + 2 = 6$

or/ $x - 2 = -4 \Rightarrow x = -4 + 2 = -2 \Rightarrow S = \{6, -2\}$

[2] $2y^2 - 3 = 3y$

Sol,/

$2y^2 - 3y = 3 \quad \} \div 2 \Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$

$\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{24+9}{16}$

$\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

أما $y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}+3}{4}$

أو $y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3-\sqrt{33}}{4}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{33}+3}{4}, \frac{3-\sqrt{33}}{4}\right\}$

Make sure of your understanding

سؤال: مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار 2cm قدر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح اذا كانت مساحته $36cm^2$ ؟

الحل

نفرض عرض المستطيل x ، طول المستطيل $x+2$

\مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x+2)=36 \Rightarrow x^2+2x=36$

$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2=(1)^2=1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2+2x+1=36+1$

$(x+1)^2=37$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x+1=\pm\sqrt{37} \Rightarrow x+1\approx\pm 6$

أما $x+1\approx 6 \Rightarrow x\approx 6-1\approx 5cm$ عرض المستطيل

أو $x+1\approx -6 \Rightarrow x\approx -6-1=-7$ يهمل

$x+2=5+2=7\ cm$ طول المستطيل

Q1/ Solve the following equations in R by the perfect square:

[1] $x^2+12x+36=0$ Sol./ $(x+6)^2=0 \Rightarrow x+6=0 \Rightarrow x=-6$	[2] $y^2-10y+25=0$ Sol./ $(y-5)^2=0 \Rightarrow y-5=0 \Rightarrow y=5$
[3] $4x^2-4x+1=0$ Sol./ $(2x-1)^2=0 \Rightarrow 2x-1=0$ $2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$	[4] $y^2+2\sqrt{7}\,y+7=0$ Sol./ $(y+\sqrt{7})^2=0 \Rightarrow y+\sqrt{7}=0$ $\Rightarrow y=-\sqrt{7}$
[5] $x^2+16x=-64$ Sol./ $x^2+16x+64=0 \Rightarrow (x+8)^2=0$ $x+8=0 \Rightarrow x=-8$	[6] $\frac{1}{16}-\frac{1}{2}x+x^2=0$ Sol./ $\left(\frac{1}{4}-x\right)^2=0 \Rightarrow \frac{1}{4}-x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Q1/ Solve the following equations in R by the perfect square:

[1] $x^2-10x-24=0$ Sol./ $x^2-10x=24$	[2] $y^2-3=2y$ Sol./ $y^2-2y=3$

$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2 = (1)^2 = 1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - 2y + 1 = 3 + 1$

$(y-1)^2 = 4$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - 1 = \pm 2$

either/ $y - 1 = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3$

or/ $y - 1 = -2 \Rightarrow y = -2 + 1 = -1$

$S = \{3, -1\}$

$\left(\frac{1}{2}\times 10\right)^2 = (5)^2 = 25$ نضيف ل طرفي المعادلة

$x^2 - 10x + 25 = 24 + 25$

$(x-5)^2 = 49$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 5 = \pm 7$

either/ $x - 5 = 7 \Rightarrow x = 7 + 5 = 12$

or/ $x - 5 = -7 \Rightarrow x = -7 + 5 = -2$

$S = \{12, -5\}$

[4] $3y^2 + 2y = 1$

Sol./

$3y^2 + 2y = 1 \ \}\div 3 \Rightarrow y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ نضيف ل طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3+1}{9}$

$\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - \frac{1}{3} = \pm\frac{2}{3}$

either/ $y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

or/ $y - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$

[3] $4x^2 - 3x - 16 = 0$

Sol./

$4x^2 - 3x = 16 \ \}\div 4 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x = 4$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ نضيف لطرفي المعادلة

$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - \frac{3}{5} = \pm\frac{\sqrt{14}}{5}$

either/ $x - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{14}}{5} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{14}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{14}+3}{5}$

or/ $x - \frac{3}{5} = -\frac{\sqrt{14}}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{14}}{5}$

$= \frac{3-\sqrt{14}}{5}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{14}+3}{5}, \frac{3-\sqrt{14}}{5}\right\}$

[6] $5y^2 + 15y - 30 = 0$

Sol./

$5y^2 + 15y = 30 \ \}\div 5 \Rightarrow y^2 + 3y = 6$

$\left(\frac{1}{2}\times 3\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ نضيف ل طرفي المعادلة

$y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 6 + \frac{9}{4}$

$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

either/ $y + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{3}{2}$

$= \frac{\sqrt{33}-3}{2}$

[5] $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$

Sol./

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ نضيف ل طرفي المعادلة

$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{1}{5} + \frac{9}{25} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{5+9}{25}$

$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = 4 + \frac{9}{64}$

$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{265}{64}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - \frac{3}{8} = \pm\frac{\sqrt{265}}{8}$

either/ $x-\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{265}}{8} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{265}}{8}+\frac{3}{8}$ $=\frac{\sqrt{265}+3}{8}$ or/ $x-\frac{3}{8}=-\frac{\sqrt{265}}{8} \Rightarrow x=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{265}}{8}$ $=\frac{3-\sqrt{26}}{8}$ $S=\left\{\frac{\sqrt{265}+3}{8},\frac{3-\sqrt{265}}{8}\right\}$	or/ $y+\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{3}{2}$ $=\frac{-\sqrt{33}-3}{2}$ $S=\left\{\frac{\sqrt{33}-3}{2},\frac{-\sqrt{33}-3}{2}\right\}$

Solve the Exercises

Q1/ Solve the following equations in R by the perfect square:

[1] $x^2+24x+144=0$ Sol./ $(x+12)^2=0 \Rightarrow x+12=0 \Rightarrow x=-12$	[3] $3y^2+36-12\sqrt{3}\,y=0$ Sol./ $3y^2-12\sqrt{3}\,y+36=0$ $(\sqrt{3}\,y-6)^2=0 \Rightarrow \sqrt{\ }\,y-6=0$ $\sqrt{3}\,y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{\sqrt{3}}$
[15] $y^2+4\sqrt{2}\,y+8=0$ Sol./ $(y+2\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow y+2\sqrt{2}=0$ $y=-2\sqrt{2}$	

Q2/ Solve the following equations in R by complete square

[1] $y^2+2\sqrt{3}\,y=3$ Sol./ $\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\right)^2=(\sqrt{3})^2=3$ طرفينضيف المعادلة $y^2+2\sqrt{3}\,y+3=3+3$ $(y+\sqrt{3})^2=6$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $y+\sqrt{3}=\pm\sqrt{6}$ either/ $y+\sqrt{3}=\sqrt{6} \Rightarrow y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ or/ $y+\sqrt{3}=-\sqrt{6} \Rightarrow y=-\sqrt{6}-\sqrt{3}$ $S=\{\sqrt{6}+\sqrt{3},-\sqrt{6}-\sqrt{3}\}$	[2] $x^2-2x=0$ Sol./ $\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2=(1)^2=1$ نضيف ل طرفي المعادلة $x^2-2x+1=1$ $(x-1)^2=1$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x-1=\pm 1$ either/ $x-1=1 \Rightarrow x=1+1=2$ or/ $x-1=-1 \Rightarrow x=-1+1=0$ $S=\{2,0\}$
[3] $x^2-\frac{2}{3}x=4$ Sol./ $\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ نضيف ل طرفي المعادلة	

$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=4+\frac{1}{9}$ $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{37}{9}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x-\frac{1}{3}=\pm\frac{\sqrt{37}}{3}$ either/ $x-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{37}}{3}+\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{37}+1}{3}$ or/ $x-\frac{1}{3}=\frac{-\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{37}}{3}=\frac{1-\sqrt{37}}{3}$ $S=\left\{\frac{\sqrt{37}+1}{3},\frac{1-\sqrt{37}}{3}\right\}$	

Q3/ Solve the following equations in R by complete square, then find the result by nearing to the nearest integer:

[1] $x^2-6x=15$

Sol./

$\left(\frac{1}{2}\times 6\right)^2=(3)^2=9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-6x+9=15+9$

$(x-3)^2=24$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-3\approx\pm 5$

either/ $x-3\approx 5 \Rightarrow x=\approx 5+3\approx 8$

or/ $x-3\approx -5 \Rightarrow x\approx -5+3\approx -2$

$S=\{8,-2\}$

[2] $y(2y+28)=28$

Sol./

$2y^2+28y=28 \ \}\div 2 \Rightarrow y^2+14y=14$

$\left(\frac{1}{2}\times 14\right)^2=(7)^2=49$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2+14y+49=14+49$

$(y+7)^2=63$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y+7=\pm 8$

either/ $y+7=8 \Rightarrow y=8-7=1$

or/ $y+7=-8 \Rightarrow y=-8-7=-15$

$S=\{1,-15\}$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: مدينة بابل : مدينة بابل هي مدينة عراقية كانت تقع على نهرالفرات وكانت عاصمة البابليين أيم حكم حمورابي سنة $(1750-1792)$ قبل الميلاد . اذا كانت المعادلة $x^2-28x+196=0$ تمثل مساحة أحدى القاعات المربعة الشكل اذ x يمثل طول ضلع القاعة . جد طول ضلع القاعة ؟

الحل

$x^2-28x+196=0 \Rightarrow (x-14)^2=0$

$x-14=0 \Rightarrow x=14$ طول ضلع القاعة

سؤال: دب الباندا : المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 مترا وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها . جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح .

الحل

نفرض الطول x , العرض $x-8$ المساحة = الطول × العرض

$x(x-8)=126 \Rightarrow x^2-8x=126$

$\left(\frac{1}{2}\times 8\right)^2=(4)^2=16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-8x+16=126+16$

$(x-4)^2=142$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-4\approx \pm 12$

أما $x-4\approx 12 \Rightarrow x\approx 12+4\approx 16$ الطول

أو $x-4\approx -12 \Rightarrow x\approx -12+4\approx -8$ يهمل

$x-8=16-8=8$ العرض

سؤال: حيتان : تجنح بعض المجموعات من الحيتان الى الشاطئ ولا يوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة ويحاول حماة البيئة ارجاعها الى البحر. حل المعادلة $x^2+20x=525$ بطريقة اكمال المربع لايجاد قيمة xالتي تمثل عدد الحيتان التي جنحن الى أحد شواطئ استراليا .

الحل

$\left(\frac{1}{2}\times 20\right)^2=(10)^2=100$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2+20x+100=525+100$

$(x+10)^2=625$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x+10=\pm 25$

أما $x+10=25 \Rightarrow x=25-10=15$

أو $x+10=-25 \Rightarrow x=-25-10=-35$ يهمل

عدد الحيتان هو 15

فـــــــكر

سؤال: تحد : حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

i) $4x(x-6)=27$

الحل

$4x^2-24x=27 \ \}\div 4 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x=\frac{27}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\times 6\right)^2=(3)^2=9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-6x+9=\frac{27}{4}+9 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2=\frac{27+36}{4}$

$(x-3)^2=\frac{63}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-3\approx\pm\frac{8}{4} \quad \Rightarrow \quad x-3\approx\pm 2$

أما $x-3\approx 2 \quad \Rightarrow \quad x\approx 2+3\approx 5$

أو $x-3\approx -2 \Rightarrow x\approx -2+3\approx 1 \Rightarrow S=\{5,1\}$

ii) $6y^2-48y=6$

الحل

$6y^2-48y=6 \ \}\div 6 \quad \Rightarrow \quad y^2-8y=1$

$\left(\frac{1}{2}\times 8\right)^2=(4)^2=16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-8y+16=1+16$

$(y-4)^2=17$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y-4\approx\pm 4$

أما $x-4\approx 4 \quad \Rightarrow \quad x\approx 4+4\approx 8$

أو $x-4\approx -4 \Rightarrow x\approx -4+4\approx 0 \Rightarrow S=\{8,0\}$

سؤال: أصحح الخطأ : حلت سوسن المعادلة: $4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ بطريقة اكمال المربع وكتبت مجموعة الحل للمعادلة بالشكل الآتي : $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$. اكتشف خطأ سوسن وصححه .

الحل

$$4x^2 - 4\sqrt{3}\,x = -3 \;\}\div 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \sqrt{3}\,x = -\frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$ نضيف الى طرفي المعادلة

$$x^2 - \sqrt{3}\,x + \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

سؤال: حس عددي : هل أن مجموعة الحل للمعادلة : $y^2 - 4y + 1 = 0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة ؟ وضح اجابتك .

الحل

كلا تحتوي على قيمتين متساويتين ومتشابهتين بالإشارة

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-2)^2 = 0$$
$$y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

سؤال: أكتب // مجموعة الحل للمعادلة : $\frac{1}{81} - \frac{2}{9}Z + Z^2 = 0$

الحل

$$\left(\frac{1}{9} - Z\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{9} - Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1}{9}$$

مراجعة الفصل

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R بالمربع الكامل : $9x^2 - 36x + 36 = 0$

الحل

$$(3x-6)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} \Rightarrow \quad x = 2$$

تدريب 1 // حل المعادلة التالية في R بالمربع الكامل : $4x^2 - 28x + 49 = 0$

الحل

$$(2x+7)^2 \Rightarrow 2x + 7 = 0 \Rightarrow 2x = -7$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

مثال 2 // حل المعادلة بطريقة اكمال المربع : $x^2 - 6x = 27$

الحل

$\left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = (3)^2 = 9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$

$(x-3)^2 = 36$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 3 = \pm 6$

أما $x - 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 + 3 = 9$

أو $x - 3 = -6 \quad \Rightarrow \quad x = -6 + 3 = -3$

$S = \{9, -3\}$

تدريب 2 // حل المعادلة بطريقة اكمال المربع : $x^2 - 12x = 28$

الحل

$\left(\frac{1}{2} \times 12\right)^2 = (6)^2 = 36$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 12x + 36 = 28 + 36$

$(x-6)^2 = 64$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 6 = \pm 8$

أما $x - 6 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 8 + 6 = 14$

أو $x - 6 = -8 \quad \Rightarrow \quad x = -8 + 6 = -2$

$S = \{14, -2\}$

الاختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $x^2 + 6x + 9 = 0$

a) $x = 6$ b) $x = -3$

c) $x = 4$ d) $x = 3$

الحل :

$(x+3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

الجواب فرع (b)

[2] $4Z^2 - 20Z + 25 = 0$

a) $Z = -\frac{5}{2}$ b) $Z = -\frac{2}{5}$

c) $Z = \frac{5}{2}$ d) $Z = \frac{2}{5}$

الحل :

$(2Z-5)^2 = 0 \Rightarrow 2Z - 5 = 0$

$2Z = 5 \Rightarrow Z = \frac{5}{2}$

الجواب فرع (c)

[3] $\frac{1}{16} - \frac{1}{2} + x^2$

a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = -\frac{1}{4}$

c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = -\frac{1}{2}$

الحل :

$\left(\frac{1}{4} - x\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} - x = 0 \quad x = \frac{1}{4}$

الجواب فرع (a)

[4] $y^2 - 2y + 3 = 0$

a) $y = -3$ b) $y = 3$

c) $y = -\sqrt{3}$ d) $y = \sqrt{3}$

الحل :

$(y - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}$

الجواب فرع (d)

سؤال: حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

[5] $x^2 - 12x = 13$

a) $S = \{13, 1\}$ b) $S = \{13, -1\}$

c) $S = \{-13, 1\}$ d) $S = \{-13, -1\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 12\right)^2 = (6)^2 = 36$ نضيف ل طرفي المعادلة

$x^2 - 12x + 36 = 13 + 36$

$(x-6)^2 = 49$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 6 = \pm 7$

أما $x - 6 = 7 \Rightarrow x = 7 + 6 = 13$

أو $x - 6 = -7 \Rightarrow x = -7 + 6 = -1$

$S = \{13, -1\}$

الجواب فرع (b)

[6] $4y^2 - 32y = 17$

a) $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-1}{2}, \frac{2}{17}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{17}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-1}{2}, \frac{17}{2}\right\}$

الحل :

$4y^2 - 32y = 17 \ \} \div 4 \Rightarrow y^2 - 8y = \frac{17}{4}$

$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 66$ نضيف ل طرفي المعادلة

$y^2 - 8y + 16 = \frac{17}{4} + 16$

[7] $16Z^2 - 40Z - 11 = 0$

a) $S = \left\{\frac{11}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-11}{4}, \frac{-1}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{11}{4}, \frac{-1}{4}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-11}{4}, \frac{1}{4}\right\}$

الحل :

$16Z^2 - 40Z = 11 \ \} \div 16 \Rightarrow Z^2 - \frac{5}{2}Z = \frac{11}{16}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 - \frac{5}{2}Z + \frac{25}{16} = \frac{11}{16} + \frac{25}{16}$

$\left(Z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{36}{16}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z - \frac{5}{4} = \pm\frac{6}{4}$

أما $Z - \frac{5}{4} = \frac{6}{4} \Rightarrow Z = \frac{6}{4} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$

أو $Z - \frac{5}{4} = -\frac{6}{4} \Rightarrow Z = \frac{5}{4} - \frac{6}{4} = -\frac{1}{4}$

$S = \left\{\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$

الجواب فرع (c)

[8] $y^2 - \frac{1}{3}y = \frac{2}{9}$

a) $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ نضيف طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36}$

$\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{8+1}{36}$

$\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - \frac{1}{6} = \pm\frac{3}{6}$

أما $y - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow y = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

أو $y - \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

الجواب فرع (c)

[9] $Z^2 + 2\sqrt{5}\,Z = 4$

a) $S = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$

b) $S = \{\sqrt{5} - 3, 3 - \sqrt{5}\}$

c) $S = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$

d) $S = \{\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 3\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5}\right)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 + 2\sqrt{5}\,Z + 5 = 4 + 5$

$(Z + \sqrt{5})^2 = 9$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z + \sqrt{5} = \pm 3$

أما $Z + \sqrt{5} = 3 \Rightarrow Z = 3 - \sqrt{5}$

أو $Z + \sqrt{5} = -3 \Rightarrow Z = -3 - \sqrt{5}$

$S = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$

	الجواب فرع (c)

سؤال: حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

[13] $x^2 - 8x = 8$

a) $S \approx \{9, 1\}$ b) $S \approx \{9, -1\}$

c) $S \approx \{-9, 1\}$ d) $S \approx \{-9, -1\}$

الحل

$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 8x + 16 = 8 + 16$

$(x - 4)^2 = 24$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 4 \approx \pm 5$

أما $x - 4 \approx 5 \Rightarrow x \approx 5 + 4 \approx 9$

أو $x - 4 \approx -5 \Rightarrow x \approx -5 + 4 \approx -1$

$S \approx \{9, -1\}$

الجواب فرع (b)

[3 – 5] Using General Law to Solve the Equations.

[3 – 5 – 1] Solve the Equation by Using the Law

يمكن حل المعادلة $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لحل المعادلة بالقانون العام وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية كما يأتي :

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية) : $ax^2 + bx + c = 0$

2) نكتب قيم المعاملات : a معامل x^2 , b معامل x مع اشارته , c الحد المطلق مع اشارته .

3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير .

Ex./ From learn paragraph , what is the width of the aisle which needs to be paved on the two sides of the garden?
Assume that the width of the aisle is x, then the area of the right part of the aisle equals 7x, the area of the front part =5x , the area of the aisle angle = x2 and the sum of the two area of the paving is $45m^2$.

Sol./

نفرض عرض الممر $= x$

فإن مساحة الجزء الأيمن من الممر $= 7x$

مساحة الجزء الممر الأمامي $= 5x$ ومساحة زاوية الممر $= x^2$

ومجموع مساحتي الرصف $45m^2$

$$x^2 + 7x + 5x = 45 \Rightarrow x^2 + 12x - 45 = 0$$

$$a = 1 , b = 12 , c = -45$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \mp \sqrt{(12)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-12 \mp \sqrt{144 + 180}}{2} = \frac{-12 \mp \sqrt{324}}{2}$$

$$x = \frac{-12 \mp 18}{2}$$

either / $x = \frac{-12 + 18}{2} = \frac{6}{2} = 3\ m$ عرض الممر

or / $x = \frac{-12 - 18}{2} = \frac{-30}{2} = -15$ يهمل

Ex./ Find the solution set for the following equations in R by using the general law: $x^2 - 3x - 5 = 0$

Sol./

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

either / $x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$

or / $x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{\frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \frac{3 - \sqrt{9}}{2}\right\}$$

[3 − 5 − 2]	The Discriminative$[\Delta = b^2 - 4ac]$

يمكن معرفة نوع جذري المعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$ باستعمال المميز كالآتي :

1) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac > 0]$ موجب ومربع كامل يكون نوع الجذران حقيقيان نسبيان .

2) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac > 0]$ موجب وليس مربعا كاملا يكون نوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

3) اذا كان المميز يساوي صفر $[b^2 - 4ac = 0]$ يكون نوع الجذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

4) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac < 0]$ سالب يكون نوع الجذران غير حقيقيين (ليس لها حل في R)

Ex./ Determine the equation roots, firstly, then find the solution set if it is possible:

[1] $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Sol./

$a = 2 \ , \ b = 3 \ , \ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

either / $x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

or / $x = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \implies S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

[2] $y^2 - 4y - 9 = 0$

Sol./

$a = 1, \ b = -4 \ , \ c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9) = 16 + 36 = 52$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{52}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2}$$

either / $y = \frac{4 + \sqrt{52}}{2}$

or / $y = \frac{4-\sqrt{52}}{2} \implies S = \left\{\frac{4+\sqrt{52}}{2}, \frac{4-\sqrt{52}}{2}\right\}$

[3] $Z^2 + 8Z = -16$ Sol./ $Z^2 + 8Z + 16 = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = 8\ ,\ c = 16$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$ مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران حقيقيان متساويان (لها جذر حقيقي واحد) $Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-8}{2} = -4$	

Ex./ What is the value of the constant (K) which makes the two roots of the equation $x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ equaled? Check your answer.

Sol./

The two roots of the equation will be equaled when the value of the discriminative expression Δ equals zero.

$a = 1\ ,\ b = -(k+1)\ ,\ c = 4$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+1)]^2 = -4(1)(4) = 0$

$(k+1)^2 - 16 = 0$

$(k+1)^2 = 16$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 1 = \pm 4$

Either / $k + 1 = 4 \Rightarrow k = 4 - 1 = 3$

or / $k + 1 = -4 \Rightarrow k = -4 - 1 = -5$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$k = -5 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Make sure of your understandin

Ex./ Find the solution set for the following equations by using the general law:

[1] $x^2 - 4x - 5 = 0$ Sol./ $a = 1\ ,\ b = -4\ ,\ c = -5$	[2] $y^2 + 5y - 1 = 0$ Sol./ $a = 1\ ,\ b = 5\ ,\ c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

either $x = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} = 5$

or $x = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad S = \{5, -1\}$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

either $y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$ or $y = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right\}$$

[3] $3x^2 - 9x = -2$

Sol./

$3x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow a = 3 \ , \ b = -9 \ , \ c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

either $x = \frac{9 + \sqrt{57}}{6}$ or $x = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$

$$S = \left\{\frac{9 + \sqrt{57}}{6}, \frac{9 - \sqrt{57}}{6}\right\}$$

[4] $4y^2 + 8y = 6$

Sol./

$4y^2 + 8y - 6 = 0\} \div 2 \Rightarrow 2y^2 + 4y - 3 = 0$

$a = 2 \ , \ b = 4, \ c = -3$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

either $y = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ or $y = - - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$S = \left\{-1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$$

[5] $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Sol./

$a = 4 \ , \ b = -12 \ , \ c = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

[6] $2y^2 - 3 = -5y$

Sol./

$2y^2 + 5y - 3 = 0 \Rightarrow a = 2 \ , \ b = 5, \ c = -3$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

either $y = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

or $y = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$

Q2/ Determine the roots of equation in R at firstly, then find the solution set if it is possible:

[1] $2x^2 + 3x = 5$

Sol./

$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow a = 2 , b = 3 , c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

either $x = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1$

or $x = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \Rightarrow S = \left\{1 , -\frac{5}{2}\right\}$

[2] $3x^2 - 7x + 6 = 0$

Sol./

$a = 3 , b = -7 , c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4(3)(6) = 49 - 72 = -23$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

[9] $y^2 - 2y + 1 = 0$

Sol./

$a = 1 , b = -2, c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

[10] $y^2 + 12 = -9y$

Sol./

$y^2 + 9y + 12 = 0 \Rightarrow a = 1 , b = 9 , c = 12$

$\Delta = b^2 - 4ac =$

$\Delta = (9)^2 - 4(1)(12) = 81 - 48 = 33$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2(1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2}$$

either $y = \frac{-9 + \sqrt{33}}{2}$ or $y = \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}$

$$S = \left\{\frac{-9 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}\right\}$$

Q3/ What is the value of the constant (k) which makes the two roots of the equation $x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$ equaled? Check your answer.

Sol./

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 , b = -(k + 2) , c = 36$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k + 2)]^2 = -4(1)(36) = 0$

$(k + 2)^2 - 144 = 0$

$(k + 2)^2 = 144$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 2 = \pm 12$

either / $k + 2 = 12 \Rightarrow k = 12 - 2 = 10$

Or / $k + 2 = -12 \Rightarrow k = -12 - 2 = -14$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 12 \Rightarrow x^2 - (k+2)x + 36 = 0$

$x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = 0$

$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

$k = -14 \Rightarrow x^2 - (k+2)x + 36 = 0$

$x^2 + 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x+6)^2 = 0$

$x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

Q4/ What is the value of the constant (K)) which makes the two roots of the equation $4y^2 + 25 = (k-5)y$ equaled? Check your answer.

Sol./

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$4y^2 - (k-5)y + 25 = 0 \quad a = 4 \;,\; b = -(k-5) \;,\; c = 25$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k-5)]^2 = -4(4)(25) = 0$

$(k-5)^2 - 400 = 0$

$(k-5)^2 = 400$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين $\rightarrow k - 5 = \pm 20$

either / $k - 5 = 20 \Rightarrow k = 20 + 5 = 25$

or / $k - 5 = -20 \Rightarrow k = -20 + 5 = -15$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 25 \Rightarrow y^2 - (k-5)y + 25 = 0$

$y^2 - 20y + 25 = 0 \Rightarrow (y-5)^2 = 0$

$y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

$k = -15 \Rightarrow y^2 - (k-5)y + 25 = 0$

$y^2 + 20y + 25 = 0 \Rightarrow (y+5)^2 = 0$

$y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$

Q5/ What is the value of the constant (K)) which makes the two roots of the equation $Z^2 + 16 = (k+4)Z$ equaled? Check your answer.

Sol./

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$Z^2 - (k+4)Z + 16 = 0$

$a = 1 \;,\; b = -(k+4) \;,\; c = 16$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+4)]^2 = -4(1)(16) = 0$

$(k+4)^2 - 64 = 0$

$(k+4)^2 = 64$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 4 = \pm 8$

أما $k + 4 = 8 \Rightarrow k = 8 - 4 = 4$

أو $k + 4 = -8 \Rightarrow k = -8 - 4 = -12$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 4 \Rightarrow Z^2 - (k+4)Z + 16 = 0$

$Z^2 - 8Z + 16 = 0 \Rightarrow (Z-4)^2 = 0$

$Z - 4 = 0 \Rightarrow Z = 4$

$k = -12 \Rightarrow Z^2 - (k+4)Z + 16 = 0$

$Z^2 + 8y + 16 = 0 \Rightarrow (Z+4)^2 = 0$

$Z + 4 = 0 \Rightarrow Z = -4$

Q6/ Show that the equation $z^2 - 6Z + 28 = 0$ doesn't have a solution set in real numer (R).

Sol./

$a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = 28$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(28) = 36 - 112 = -76$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

Solve the Exercises

Q1/ Find the solution set for the following equations in R by using the general law:

[1] $x^2 - 7x - 14 = 0$

Sol./

$a = 1 \ , \ b = -7 \ , \ c = -14$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 56}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{105}}{2}$$

either $x = \frac{7 + \sqrt{105}}{2}$ or $x = \frac{7 - \sqrt{105}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{7 + \sqrt{105}}{2}, \frac{7 - \sqrt{105}}{2} \right\}$$

[2] $y^2 + 3y - 9 = 0$

Sol./

$a = 1 \ , \ b = 3 \ , \ c = -9$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{45}}{2}$$

either $y = \frac{-3 + \sqrt{45}}{2}$ or $y = \frac{-3 - \sqrt{45}}{2}$

$$S = \left\{\frac{-3 + \sqrt{45}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{45}}{2}\right\}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{10} = \frac{2(4 \pm \sqrt{6})}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$$

أما $x = \frac{4 + \sqrt{6}}{5}$ أو $x = \frac{4 - \sqrt{6}}{5}$

$$S = \left\{\frac{4 + \sqrt{6}}{5}, \frac{4 - \sqrt{6}}{5}\right\}$$

[3] $9x^2 - 8(3x + 2) = 0$

Sol./

$9x^2 - 24x - 16 = 0$

$a = 9, \ b = -24, \ c = -16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 576}}{18} = \frac{24 \pm \sqrt{1152}}{18}$$

$$= \frac{24 \pm 24\sqrt{2}}{18} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{3}$$

either $x = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{3}$ or $x = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{3}$

$$S = \left\{\frac{4 + 4\sqrt{2}}{3}, \frac{4 - 4\sqrt{2}}{3}\right\}$$

[4] $2y^2 - 2 = -10y$

Sol./

$2y^2 + 10y - 2 = 0 \Rightarrow a = 2, \ b = 10, \ c = -2$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 16}}{4} = \frac{-10 \pm \sqrt{116}}{4}$$

$$y = \frac{-10 \pm 2\sqrt{29}}{4} = \frac{2(-5 \pm \sqrt{29})}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

either $y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$ or $y = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{-5+\sqrt{29}}{2} , \frac{-5-\sqrt{29}}{2} \right\}$$

Q2/ Determine the equation roots at firstly, then find the solution set in R if it is possible:

[1] $x^2 + 4x = 5$

Sol./

$x^2 + 4x - 5 = 0 \implies a = 1 \ , \ b = 4 \ , \ c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

either $x = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$

or $x = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \implies S = \{1, -5\}$

[2] $y^2 - 2y - 10 = 0$

Sol./

$a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-10) = 4 + 40 = 44$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{44}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$y = \frac{2 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 1 \pm \sqrt{11}$$

أما $y = 1 + \sqrt{11}$ أو $y = 1 - \sqrt{11}$

$S = \{1 + \sqrt{11}, 1 - \sqrt{11}\}$

Q3/ What is the value of the constant (K) which makes the two roots of the equation $x^2 - (k+6)x + 49 = 0$ equaled? Check your answer

Sol./

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+6) \quad , \quad c = 49$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+6)]^2 - 4(1)(49) = 0$

$(k+6)^2 - 196 = 0$

$(k+6)^2 = 196$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 6 = \pm 14$

either / $k + 6 = 14 \quad \Rightarrow \quad k = 14 - 6 = 8$

or / $k + 6 = -14 \quad \Rightarrow \quad k = -14 - 6 = -20$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 - (k+6)x + 49 = 0$

$x^2 - 14x + 49 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-7)^2 = 0$

$x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7$

$k = -20 \quad \Rightarrow \quad x^2 - (k+6)x + 49 = 0$

$x^2 + 14x + 49 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+7)^2 = 0$

$x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -7$

Q4/ Show that the equation $2Z^2 - 3Z + 10 = 0$ doesn't have a solution set in real numer.

Sol./

$a = 2 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(10) = 9 - 80 = -71$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

الطريقة الثانية :

$p^2 - 30p + 225 = 0 \quad \Rightarrow \quad (p-15)^2 = 0$

$p - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 15$

تدرب وحل مسائل حياتية

سؤال: العاب نارية : في احدى المناسبات اطلقت مجموعة من الألعاب النارية عموديا في الهواء وصلت الى ارتفاع $140m$. احسب الزمن الذي وصلت به الى هذا الارتفاع اذا كانت المعادلة التالية : $5t^2 + 60t = 140$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار الذي وصلت اليه الألعاب النارية بعد t ثانية .

الحل

الطريقة الاولى

$$5t^2 + 60t - 140 = 0 \quad \} \div 5$$
$$t^2 + 12t - 28 = 0$$
$$a = 1 \ , b = 12 \ , \quad c = -28$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(28)}}{2(1)}$$
$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-12 \pm 16}{2}$$

أما $t = \frac{-12 + 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$

أو $t = \frac{-12 - 16}{2} = \frac{-28}{2} = -14$ يهمل

الطريقة الثانية :

$$5t^2 + 60t - 140 = 0 \quad \} \div 5$$
$$t^2 + 12t - 28 = 0 \Rightarrow (t + 14)(t - 2) = 0$$

أما $t + 14 = 0 \Rightarrow t = -14$ يهمل

أو $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ الزمن

سؤال: تجارة : يحسب سامر سعر الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 الف دينار اذا كانت p في المعادلة $p^2 - 30p + 225 = 0$ تمثل مبلغ ربح سامر في البدلة الواحدة بألوف الدنانير فما سعر كلفة البدلة الواحدة ؟

الحل

$$a = 1 \ , \quad b = -30 \ , \quad c = 225$$
$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(225)}}{2(1)}$$
$$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

فـــــــكر

سؤال: تحد : حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R

i) $x^2 + 8x = 10$

الحل

$x^2 + 8x - 10 = 0 \Rightarrow \quad a = 1\ ,\ b = 8\ ,\ c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(-10) = 64 + 40 = 104$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{104}}{2(1)} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{26}}{2}$$

$$= \frac{2(-4 \pm \sqrt{26})}{2} = -4 \pm \sqrt{26}$$

أما $x = -4 + \sqrt{26}$ أو $x = -4 - \sqrt{26}$

$S = \{-4 + \sqrt{26}\ , -4 - \sqrt{26}\}$

ii) $3y^2 - 6y - 42 = 0$

الحل

$3y^2 - 6y - 42 = 0\ \}\div 3 \Rightarrow y^2 - 2y - 14 = 0$

$a = 1\ ,\quad b = -2\ ,\quad c = -14$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-14) = 4 + 56 = 60$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{60}}{2(1)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{15}}{2}$$

$$= \frac{2(1 \pm \sqrt{15})}{2} = 1 \pm \sqrt{15}$$

أما $y = 1 + \sqrt{15}$

أو $y = 1 - \sqrt{15} \quad \Rightarrow \quad S = \{1 + \sqrt{15}\ , 1 - \sqrt{15}\}$

سؤال: أصحح الخطأ : قال سعد أن المعادلة $2x^2 - 3x - 9 = 0$ لي لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية. اكتشف خطأ سعد وصححه .

الحل

$a = 2 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{3 \pm 9}{4}$$

أما $x = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3$

أو $x = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow S = \left\{3, -\frac{3}{2}\right\}$

سؤال: حس عددي : استعملت مروة المقدار المميز لكتابة جذري المعادلة $Z^2 - 8Z + 16 = 0$ دون تحليلها . فسر كيف استطاعت مروة كتابة جذري المعادلة .

الحل

$a = 1 \quad , \quad b = -8 \quad , \quad c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

قيمة المقدار المميز يساوي صفر ولها جذر حقيقي واحد .

سؤال: أكتب // نوع جذري المعادلة $x^2 + 100 = 20x$ باستعمال المقدار المميز دون حلها .

الحل

$x^2 - 20x + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad , \quad b = -20 \quad , \quad c = 100$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-20)^2 - 4(1)(100) = 400 - 400 = 0$

قيمة المقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران حقيقيان متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

مراجعة الفصل

مثال 1 // جد مجموعة الحل للمعادلة باستعمال القانون العام في R : $x^2 - 5x - 7 = 0$

الحل

$a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = -7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2}$$

أما $x = \frac{5 + \sqrt{53}}{2}$ أو $x = \frac{5 - \sqrt{53}}{2}$

$$S = \left\{\frac{5 + \sqrt{53}}{2}, \frac{5 - \sqrt{53}}{2}\right\}$$

تدريب 1 // جد مجموعة حل المعادلة التالية باستعمال القانون العام في R : $x^2 - 3x - 8 = 0$

الحل

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

أما $x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}$ أو $x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}$

$$S = \left\{\frac{3 + \sqrt{41}}{2}, \frac{3 - \sqrt{41}}{2}\right\}$$

مثال 2 // حدد جذور المعادلة : $3x^2 + 5x - 2 = 0$

الحل

$a = 3 \ , \ b = 5 \ , \ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (5)^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

تدريب 2 // حدد جذور المعادلة : $2x^2 - 7x - 3 = 0$

الحل

$a = 2 \ , \ b = -7 \ , \ c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4(2)(-3) = 49 + 24 = 73$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران غير حقيقين .

الاختيار من متعدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد مجموعة الحل للمعادلات باستعمال القانون العام في R :

[1] $x^2 - 3x - 4 = 0$

a) $S = \{4, 1\}$ b) $S = \{4, -1\}$

c) $S = \{-4, 1\}$ d) $S = \{-4, -1\}$

الحل :

$a = 1 , \ b = -3 \ , \ c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

أما $x = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ أو $x = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$S = \{4, -1\}$

الجواب فرع (b)

[2] $y^2 - 5y - 5 = 0$

a) $S = \left\{\frac{3 + 5\sqrt{5}}{2} , \frac{3 - 5\sqrt{5}}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{4} , \frac{3 - 5\sqrt{5}}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} , \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} , \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}\right\}$

الحل :

$a = 1 , \ b = -5 \ , \ c = -5$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 20}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

أما $y = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$ أو $y = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$

$$S = \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} , \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}\right\}$$

الجواب فرع (c)

[3] $2x^2 - 8x = -3$

a) $S = \left\{\frac{4 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 - \sqrt{10}}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{2 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 + \sqrt{10}}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{4 + \sqrt{5}}{4} , \frac{4 - \sqrt{5}}{4}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{2 + \sqrt{5}}{2} , \frac{2 - \sqrt{5}}{2}\right\}$

الحل :

$2x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow a = 2 , \ b = -8 \ , \ c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 24}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2(4 \pm \sqrt{10})}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

أما $x = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$ أو $x = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$

$$S = \left\{\frac{4 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 - \sqrt{10}}{2}\right\}$$

[4] $3x^2 - 6(2x + 1) = 0$

a) $S = \{2 + \sqrt{3} , 2 - \sqrt{3}\}$ b) $S = \{2 + \sqrt{2} , 2 - \sqrt{2}\}$

c) $S = \{2 + \sqrt{6} , 2 - \sqrt{6}\}$ d) $S = \{6 + \sqrt{6} , 6 - \sqrt{6}\}$

الحل :

$3x^2 - 12x - 6 = 0 \ \} \div 3 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$

$a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

أما $x = 2 + \sqrt{6}$ أو $x = 2 - \sqrt{6}$

$S = \{2 + \sqrt{6} , 2 - \sqrt{6}\}$

الجواب فرع (c)	الجواب فرع (a)

سؤال: حدد جذور المعادلة باستعمال المميز :

[6] $2y^2 - 3y - 8 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان

b) جذران حقيقيان غير نسبيين

c) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \emptyset$)

الحل :

$a = 2 \ , \quad b = -3 \ , \quad c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-8) = 9 + 64 = 73$

المميز موجب ليس مربع كامل الجذران حقيقيان غير نسبيين

الجواب فرع (b)

[5] $x^2 - 6x - 7 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان .

b) جذران حقيقيان غير نسبيين .

c) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \emptyset$)

الحل :

$a = 1 \ , \quad b = -6 \ , \quad c = -7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-7) = 36 + 28 = 64$

مقدار المميز موجب ومربع كامل والجذران حقيقيان نسبيان .

الجواب فرع (a)

[7] $8x^2 - 8x + 2 = 0$

a) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

b) جذران حقيقيان غير نسبيين .

c) جذر حقيقي واحد $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \emptyset$)

الحل :

$a = 8 \ , \quad b = -8 \ , \quad c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4(8)(2) = 64 - 64 = 0$

المميز يساوي صفر والجذران حقيقيان متساويان لها جذر حقيقي واحد .

الجواب فرع (a)

[8] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $y^2 - (k+10)y + 16 = 0$ متساويين ؟

a) $k = 2, -18$ b) $k = -2, -18$
c) $k = 6, 14$ d) $k = -6, -14$

الحل

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k+10) \quad , \quad c = 16$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k+10)]^2 - 4(1)(16) = 0$

$(k+10)^2 - 16 = 0$

$(k+10)^2 = 16$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 10 = \pm 4$

أما $k + 10 = 4 \quad \Rightarrow \quad k = 4 - 10 = -6$

أو $k + 10 = -4 \quad \Rightarrow \quad k = -4 - 10 = -14$

الجواب فرع (d)

[3 − 6] Solving the Fractional Equations

نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بتخلص من الكسور. ثم حلها بإحدى طرق التحليل السابقة .

سؤال: اذا كان ثمن شراء التحفية الواحدة $2x + 3$ الف دينار وثمن شراء ست تحفيات $x^2 + 3x - 1$ الف دينار فاذا كان ثمن تحفية واحدة الى ثمن ست تحفيات $\frac{1}{3}$ فما ثمن شراء تحفية واحدة ؟

الحل

$$\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ست تحفيات}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-1} = \frac{1}{3}$$ الطرفين في الوسطين

$x^2 + 3x - 1 = 6x + 9$

$x^2 + 3x - 1 - 6x - 9 = 0$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-5) = 0$

أما $x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$ يهمل

أو $x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

$2x + 3 = 2(5) + 3 = 10 + 3 = 13$ الف

ثمن شراء تحفية واحدة هو 13 ألف دينار

Ex./ Find the solution set for the following equation, then check the correction of the solution. $5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$

الحل

$$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3} \} \cdot 3x$$

$$3x(5x) + 3x\left(\frac{x-2}{3x}\right) = 3x\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$15x^2 + x - 2 = 2x \Rightarrow 15x^2 + x - 2 - 2 = 0$$

$$15x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (5x-2)(3x+1) = 0$$

أما $5x - 2 = 0 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

أو $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$$S = \left\{\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}\right\}$$

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

$$x = \frac{2}{5} \Rightarrow 5\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{\frac{2}{5} - 2}{3\left(\frac{2}{5}\right)} = 2 + \frac{\frac{2-10}{5}}{\frac{6}{5}} = 2 + \frac{-8}{6} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$ الايمن

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow 5\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\frac{-1}{3} - 2}{3\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{5}{3} + \frac{\frac{-1-6}{3}}{-\frac{3}{3}} = -\frac{5}{3} + \frac{-7}{-3} = \frac{-5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$$ الايمن

Ex./ Find the solution set for the equation R: $\frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$

Sol./

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{(x+3)(x-3)} \} \times (x+3)(x-3)$$

$$x(x+3) + 4x(x-3) = 18$$

$$x^2 + 3x + 4x^2 - 12x - 18 = 0$$

$$5x^2 - 9x - 18 = 0 \Rightarrow (x-3)(5x+6) = 0$$

either / $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

or / $5x + 6 = 0 \Rightarrow 5x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{5}$

$$S = \left\{3, -\frac{6}{5}\right\}$$

Ex./ Find the solution set for the equation R: $\frac{2}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

Sol./

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)} \quad \} \times (x+2)(x-2)$$

$$2(x-2) + x(x+2) = x^2 + 4$$

$$2x - 4 + x^2 + 2x = x^2 + 4$$

$$4x - 4 + x^2 = x^2 + 4$$

$$4x - 4 + x^2 - x^2 - 4 = 0$$

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2$$

Make sure of your understanding

Q1/ Find the solution set for each of the following equations and check the correct of solution:

[1] $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{4x^2} \quad \} \cdot 4x^2$

الحل :

$$4x + 2x^2 = 6 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad \} \div 2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$ الطرف الايسر

$$\frac{6}{4x^2} = \frac{6}{4(1)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$ الطرف الايمن

[2] $\frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y}$

الحل :

$$\frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y} \quad \} \times 10y$$

$$10y\left(\frac{y}{2}\right) - 10y\left(\frac{7}{5}\right) = 10y\left(\frac{3}{10y}\right)$$

$$5y(y) - 2y(7) = 3$$

$$5y^2 - 14y - 3 = 0 \Rightarrow (y-3)(5y+1) = 0$$

أما $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

أو $5y + 1 = 0 \Rightarrow 5y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{5}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية:

$$y = 3 \Rightarrow \frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{2} - \frac{7}{5} = \frac{15-14}{10} = \frac{1}{10}$$ الايسر

$$\frac{3}{10y} = \frac{3}{10(3)} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$ الايمن

[4] $\frac{y+1}{2y^2}=\frac{3}{4}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$2y^2(3)=4(y+1) \Rightarrow 6y^2=4y+4$

$6y^2-4y-4=0 \} \div 2 \Rightarrow 3y^2-2y-2=0$

$a=3 \ , \quad b=-2 \ , \quad c=-2$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{6}$$

$$y=\frac{2\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{2\pm2\sqrt{7}}{6}=\frac{2(1\pm\sqrt{7})}{6}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$$

أما $y=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ أو $y=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية:

$$y=\frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{y+1}{2y^2}=\frac{\frac{1+\sqrt{7}}{3}+1}{2\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1+\sqrt{7}+3}{3}}{2\left(\frac{1+2\sqrt{7}+7}{9}\right)}=\frac{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}{2\left(\frac{8+2\sqrt{7}}{9}\right)}=\frac{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}{\frac{16+4\sqrt{7}}{9}}$$

$$=\frac{4+\sqrt{7}}{3}\times\frac{9}{16+4\sqrt{7}}=\frac{4+\sqrt{7}}{1}\times\frac{3}{4(4+\sqrt{7})}=\frac{3}{4}$$

[3] $\frac{x+4}{2}=\frac{-3}{2x}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$2x(x+4)=-3(2) \Rightarrow 2x^2+8x=-6$

$2x^2+8x+6=0 \} \div 2 \Rightarrow x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

أما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow S\{-3,-1\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

عندما : $x=-3$

الطرف الأيسر $\frac{x+4}{2}=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$

الطرف الأيمن $\frac{-3}{2x}=\frac{-3}{2(-3)}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$

[6] $\frac{1}{y^2-6}=\frac{2}{y+3}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$2y^2-12=y+3 \Rightarrow 2y^2-12-y-3=0$

$2y^2-y-15=0 \Rightarrow (2y+5)(y-3)=0$

أما $2y+5=0 \Rightarrow 2y=-5 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}$

أو $y-3=0 \Rightarrow y=3$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

عندما : $y=3$

الطرف الايسر $\frac{1}{y^2-6}=\frac{1}{(3)^2-6}=\frac{1}{9-6}=\frac{1}{3}$

الطرف الايمن $\frac{2}{y+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

[5] $\frac{9x-14}{x-5}=\frac{x^2}{x-5} \} \cdot (x-5)$

الحل :

$9x-14=x^2 \Rightarrow x^2-9x+14=0$

$(x-7)(x-2)=0$

أما $x-7=0 \Rightarrow x=7$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

التحقق : عندما $x=7$

الأيسر $\frac{9x-14}{x-5}=\frac{9(7)-14}{7-5}=\frac{63-14}{2}=\frac{49}{2}$

الطرف لأيمن $\frac{x^2}{x-5}=\frac{(7)^2}{7-5}=\frac{49}{2}$

Q2/ Find the solution set for each of the following equations in R:

[1] $\frac{y-4}{y+2}-\frac{2}{y-2}=\frac{17}{y^2-4}$

Sol./

$\frac{y-4}{y+2}-\frac{2}{y-2}=\frac{17}{(y+2)(y-2)}$ $\}\times(y+2)(y-2)$

$(y-2)(y-4)-2(y+2)=17$

$y^2-4y-2y+8-2y-4-17=0$

$y^2-8y-13=0$

$a=1\ ,b=-8\ ,\quad c=-13$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(-13)}}{2(1)}$

$=\frac{8\pm\sqrt{64+52}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{116}}{2}$

$y=\frac{8\pm2\sqrt{29}}{2}=\frac{2(4\pm\sqrt{29})}{2}=4\pm\sqrt{29}$

أم $y=4+\sqrt{29}$ أو $y=4-\sqrt{29}$

[2] $\frac{9}{x^2-x-6}-\frac{5}{x-3}=1$

Sol./

$\frac{9}{(x-3)(x+2)}-\frac{5}{x-3}=1$ $\}\times(x-3)(x+2)$

$9-5(x+2)=x^2+2x-3x-6$

$9-5x-10=x^2-x-6$

$-1-5x=x^2-x-6$

$x^2-x-6+1+5x=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

أما $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{-5,1\}$

[3] $\frac{12}{y^2-16}+\frac{6}{y+4}=2$

Sol./

$\frac{12}{(y+4)(y-4)}+\frac{6}{y+4}=2$ $\}\times(y+4)(y-4)$

$12+6(y-4)=2(y+4)(y-4)$

$12+6y-24=2(y^2-16)$

$6y-12=2y^2-32$

$2y^2-32-6y+12=0 \Rightarrow 2y^2-6y-20=0$

$(y-5)(2y+4)=0$

أما $y-5=0 \Rightarrow y=5$

أو $2y+4=0 \Rightarrow 2y=-4 \Rightarrow y=-\frac{4}{2}=-2$

$S=\{5,-2\}$

[4] $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$

Sol./

$\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x-1}$

$=\frac{8+7x+3x^2}{(x+1)(x-1)}$ $\}\times(x+1)(x-1)$

$2x(x-1)+3x(x+1)=8+7x+3x^2$

$2x^2-2x+3x^2+3x-8-7x-3x^2$

$2x^2-6x-8=0 \Rightarrow (x-4)(2x+2)=0$

أما $x-4=0 \Rightarrow x=4$

أو $2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{2}=-1$

$S=\{4,-1\}$

Solve the Exercises

Q1/ Find the solution set for each of the following equations and check the correct of solution:

[1] $\frac{4}{6x^2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{x} \quad \} \cdot (6x^2)$

Sol./

$4+2x^2=6x \Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \ \} \div 2$

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0$

either $x-2=0 \Rightarrow x=2$

or $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{2,1\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

عندما : $x=2$

$\frac{4}{6x^2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6(2)^2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{24}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1+2}{6}$

$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ الطرف الأيسر

$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ الطرف الأيمن

عندما : $x=1$

$\frac{4}{6x^2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6(1)^2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2+1}{3}$

$=\frac{3}{3}=1$ الطرف الأيسر

$\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$ الطرف الأيمن

[2] $\frac{3y}{4}-\frac{6}{12y}+\frac{1}{4}=0$

Sol./

$\frac{3y}{4}-\frac{2}{4y}+\frac{1}{4}=0 \quad \} \times 4y$

$3y^2-2+y=0 \Rightarrow 3y^2+y-2=0$

$(y+1)(3y-2)=0$

either $y+1=0 \Rightarrow y=-1$

or $3y-2=0 \Rightarrow 3y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$

$S=\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية:

عندما : $y=-1$

$\frac{3y}{4}-\frac{6}{12y}+\frac{1}{4}=\frac{3(-1)}{4}-\frac{2}{4(-1)}+\frac{1}{4}$

$=\frac{-3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$

$=\frac{0}{4}=0$ الطرف الأيمن

[13] $\frac{9x+22}{x^2}=1$ الطرفين في الوسطين

Sol./

$x^2=9x+22 \Rightarrow x^2-9x-22=0$

$(x-11)(x+2)=0$

iether $x-11=0 \Rightarrow x=11$

or $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow S=\{11,-2\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية:

عندما : $x=-2$

$\frac{9x+22}{x^2}=\frac{9(-2)+22}{(-2)^2}=\frac{-18+22}{4}=\frac{4}{4}=1$

الطرف الأيمن

$\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{9}{(1+2)^2}=\frac{9}{9}=1$ الطرف الأيسر

$\frac{3y}{y+2}=\frac{3(1)}{1+2}=\frac{3}{3}=1$ الطرف الأيمن

[14] $\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{3y}{y+2}$

Sol./

$\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{3y}{y+2} \quad \} \cdot (y+2)^2$

$9=3y(y+2) \Rightarrow 3y^2+6y-9=0 \ \} \div 3$

$y^2+2y-3=0 \Rightarrow (y+3)(y-1)=0$

iether $y+3=0 \Rightarrow y=-3$

or $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=\{-3,1\}$

التحقق من صحة الحل : عندما : $y=1$

Q2/ Find the solution set for each of the following equations in R:

[1] $\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x-3}=1$

Sol./

$\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x-3}=1 \quad \}\cdot(x-4)(x-3)$

$3(x-3)-2(x-4)=(x-4)(x-3)$

$3x-9-2x+8=x^2-3x-4x+12$

$x-1=x^2-7x+12$

$x^2-7x+12-x+1=0$

$x^2-8x+13=0 \implies a=1, b=-8, c=13$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(13)}}{2(1)}$

$=\frac{8\pm\sqrt{64-52}}{2}$

$x=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(4\pm\sqrt{3})}{2}=4\pm\sqrt{3}$

Either / $x=4+\sqrt{3}$ or $x=4-\sqrt{3}$

$S=\{4+\sqrt{3}, 4-\sqrt{3}\}$

[2] $\frac{y-5}{y+5}-\frac{y+5}{y-5}=\frac{4y^2-24}{y^2-25}$

Sol./

$\frac{y-5}{y+5}-\frac{y+5}{y-5}$

$=\frac{4y^2-24}{(y+5)(y-5)} \quad \}\times(y+5)(y-5)$

$(y-5)^2-(y+5)^2=2y^2-24$

$y^2-10y+25-(y^2+10y+25)=4y^2-24$

$4y^2-24-y^2+10y-25+y^2+10y+25=0$

$4y^2+20y-24=0 \quad \}\div4$

$y^2+5y-6=0 \implies (y+6)(y-1)=0$

iether $y+6=0 \implies y=-6$

or $y-1=0 \implies y=1 \implies S=\{-6,1\}$

[3] $\frac{6-x}{x^2+x-12}-\frac{2}{x+4}=1$

Sol./

$\frac{6-x}{(x+4)(x-3)}-\frac{2}{x+4}=1 \quad \}\times(x+4)(x-3)$

$6-x-2(x-3)=x^2-3x+4x-12$

$6-x-2x+6=x^2+x-12$

$12-3x=x^2+x-12$

$x^2+x-12-12+3x=0$

$x^2+4x-24=0$

$a=1, b=4, c=-24$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(-24)}}{2(1)}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{16+96}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{112}}{2}$

$x=\frac{-4\pm4\sqrt{7}}{2}=-2\pm2\sqrt{7}$

iether / $x=-2+\sqrt{7}$ or $x=-2-\sqrt{7}$

[4] $\frac{4+8y}{y^2-9}+\frac{6}{y+3}=3$

Sol./

$\frac{4+8y}{(y+3)(y-3)}+\frac{6}{y+3}=3 \quad \}\times(y+3)(y-3)$

$4+8y+6(y-3)=3(y+3)(y-3)$

$4+8y+6y-18=3(y^2-9)$

$14y-14=3y^2-27$

$3y^2-27+14-14y=0 \implies 3y^2-14y-13=0$

$a=3, \quad b=-14, \quad c=-13$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4(3)(-13)}}{2(3)}$

$=\frac{14\pm\sqrt{196+156}}{6}=\frac{14\pm\sqrt{352}}{6}$

$y=\frac{14\pm4\sqrt{22}}{6}=\frac{2(7\pm2\sqrt{22})}{6}=\frac{7\pm2\sqrt{22}}{3}$

iether $y=\frac{7+2\sqrt{22}}{3}$ or $y=\frac{7-2\sqrt{22}}{3}$

	$S = \left\{\frac{7+2\sqrt{22}}{3}, \frac{7-2\sqrt{22}}{3}\right\}$

تدرب وحل مسائل الحياتية

سؤال: نقل مسافرين : تقطع طائرة الخطوط الجوية العراقية المسافة 350km بين مدينة بغداد واربيل بسرعة معينة ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار 10 km/h لتمكنت الطائرة من قطع المسافة بزمن يقل 10 دقائق عن الزمن الأول . جد سرعة أولاً .

الحل

نفرض السرعة الأولى $= V$

السرعة الثانية $= V + 10$

الزمن الأول $= \frac{35}{V}$, الزمن الثاني $= \frac{350}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $= \frac{1}{6}$

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

$$\frac{350}{V} - \frac{350}{V+10} = \frac{1}{6} \quad \} \times 6V(V+10)$$

نحول الزمن من دقائق الى ساعة $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

$$2100(V+10) - 210V = V(V+10)$$

$$\cancel{2100V} + 21000 - \cancel{2100V} = V^2 + 10V$$

$$V^2 + 10V - 21000 = 0$$

$$(V+150)(V-140) = 0$$

أما $V + 150 = 0 \Rightarrow V = -150$ يهمل

أو $V - 140 = 0 \Rightarrow V = 140\ km/h$ السرعة

[20] رياضة : اذا أراد راكب دراجة قطع مسافة 60km بين مدينتين A, B بسرعة معينة ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لتمكن من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول . جد سرعته أولا .

الحل

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

نفرض السرعة الأولى $= V$

السرع الثانية $= V + 10$

الزمن الأول $= \frac{6}{V}$, الزمن الثاني $= \frac{60}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $= 1$

$$\frac{60}{V} - \frac{60}{V+10} = 1 \quad \} \times V(V+10)$$

$$60(V+10) - 60V = V(V+10)$$

$$\cancel{60V} + 600 - \cancel{60V} = V^2 + 10V$$

$$V^2 + 10V - 600 = 0$$

$$(V+30)(V-20) = 0$$

أما $V + 30 = 0 \Rightarrow V = -30$ يهمل

أو $V - 20 = 0 \Rightarrow V = 20\ km/h$ سرعته

سؤال: سباق : شارك نوفل في سباق ثلاثي وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري واستغرق ساعتين لأنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاور على اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة . جد معدل السرعة التقريبية في سباق السباحة .

	المسافة km	السرعة km/h	الزمن
السباحة	$d_s = 1$	x	t_s
ركوب الدراجة	$d_b = 20$	$5x$	t_b
الجري	$d_r = 4$	$x + 4$	t_r

ملاحظة : أستعمل معادلة الزمن الأجمالي الذي أستغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو :

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

الحل

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

$$t_s = \frac{1}{x} \ , \qquad t_b = \frac{20}{5x} = \frac{4}{x} \ , t_r = \frac{4}{x+4} \ , T(x) = 2$$

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x+4} = 2 \quad \} \cdot x(x+4)$$

$$x + 4 + 4(x+4) + 4x = 2x(x+4)$$

$$x + 4 + 4x + 16 + 4x = 2x^2 + 8x$$

$$9x + 20 = 2x^2 + 8x$$

$$2x^2 + 8x - 9x - 20 = 0$$

$$2x^2 - x - 20 = 0 \implies a = 2 \, , b = -1 \, , c = -20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-20)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 160}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{161}}{4} \approx \frac{1 \pm 13}{4}$$

أما $x \approx \frac{1 + 13}{4} \approx \frac{14}{4} \approx \frac{7}{2} \approx 3.5 \approx 4$

أو $x \approx \frac{1 - 13}{4} \approx \frac{-12}{4} \approx -3$ يهمل

السرعة تقريباً هي : $x \approx 4 \, km/h$

فكـــــر

سؤال: تحد : جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

i) $\frac{3}{x+5}+\frac{4}{5-x}=\frac{x^2-15x+14}{x^2-25}$

الحل

$$\frac{3}{x+5}-\frac{4}{x-5}=\frac{x^2-15x+14}{(x+5)(x-5)} \quad \}\times(x+5)(x-5)$$
$$3(x-5)-4(x+5)=x^2-15x+14$$
$$3x-15-4x-20=x^2-15x+14$$
$$-x-35=x^2-15x+14$$
$$x^2-15x+14+x+35=0$$
$$x^2-14x+49=0$$
$$(x-7)^2=0 \Rightarrow x-7=0 \Rightarrow x=7$$

سؤال: أصحح الخطأ : استعمل نمير المقدار المميز لبيان جذور المعادلة : $\frac{2}{x-7}\times\frac{1}{x-1}=1$
فقال نمير أن للمعادلة جذران نسبيان حقيقيان . اكتشف خطأ نمير وصححه .

الحل

$$\frac{2}{x^2-x-7x+7}=1$$
$$\frac{2}{x^2-8x+7}=1$$ الطرفين في الوسطين
$$x^2-8x+7=2 \Rightarrow x^2-8x+7-2=0$$
$$x^2-8x+5=0 \Rightarrow a=1\ ,b=-8\ ,c=5$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(-8)^2-4(1)(5)=64-20=44$$

المميز موجب وليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

سؤال: أكتب // مجموعة الحل في R

$$\frac{1}{x+6}-\frac{5}{x-6}=2$$

الحل

$$\frac{1}{x+6}-\frac{5}{x-6}=2 \quad \}\times(x+6)(x-6)$$
$$x-6-5(x+6)=2(x+6)(x-6)$$
$$x-6-5x-30=2(x^2-36)$$
$$-4x-36=2x^2-72$$
$$2x^2-72+4x+36=0$$
$$2x^2+4x-36=0 \quad \}\div 2$$
$$x^2+2x-18=0 \quad \Rightarrow a=1\,,b=2\,,c=-18$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-18)}}{2(1)}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+72}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{76}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{19}}{2}=$$
$$x=-1\mp\sqrt{19}$$

أما $x=-1+\sqrt{19}$ أو $x=-1-\sqrt{19}$

$$S=\{-1+\sqrt{19},-1-\sqrt{19}\}$$

مراجعة الفصل

مثال // جد مجموعة الحل للمعادلة في R وتحقق من صحة

الحل :

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{12}{x^2-1}$$

الحل :

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}$$
$$=\frac{12}{(x+1)(x-1)} \quad \}\times(x+1)(x-1)$$
$$x(x+1)+3x(x-1)=12$$
$$x^2+x+3x^2-3x-12=0$$
$$4x^2-2x-12=0 \quad \Rightarrow (2x-4)(2x+3)=0$$

أما $2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2}=2$

أو $2x+3=0 \quad \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

$$S=\left\{2,-\frac{3}{2}\right\}$$

تدريب // جد مجموعة الحل للمعادلة في R وتحقق من صحة

الحل :

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}=\frac{32}{x^2-16}$$

الحل :

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}$$
$$=\frac{32}{(x+4)(x-4)} \quad \}\cdot(x+4)(x-4)$$
$$2x(x+4)+x(x-4)=32$$
$$2x^2+8x+x^2-4x-32=0$$
$$3x^2+4x-32=0 \quad \Rightarrow \quad (x+4)(3x-8)=0$$

أما $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

أو $3x-8=0 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

$$S=\left\{-4,\frac{8}{3}\right\}$$

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة الأصلية:

عندما : $x = 2$

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{2}{2-1}+\frac{3(2)}{2+1}=\frac{2}{1}+\frac{6}{3}$$

الطرف الايسر $= 2+2=4$

الطرف الايمن $\frac{12}{x^2-1}=\frac{12}{(2)^2-1}=\frac{12}{3}=4$

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة الأصلية:

عندما : $x = -4$

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}=\frac{2(-4)}{-4-4}+\frac{-4}{-4+4}=\frac{-8}{-8}-\frac{4}{0}$$

غير ممكن

الاختيار من متعدد

سؤال : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R :

[1] $\frac{2}{12x^2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4x}$

a) $S=\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$ b) $S=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

c) $S=\left\{2,-\frac{1}{2}\right\}$ d) $S=\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$

الحل :

$$\frac{1}{6x^2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4x} \quad \}\times 12x^2$$

$2-2x^2=3x \Rightarrow 2x^2+3x-2=0$

$(x+2)(2x-1)=0$

أما $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

أو $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$S=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

الجواب فرع (b)

[2] $\frac{5}{6}-\frac{7}{6y}+\frac{y}{3}=0$

a) $S=\left\{1,-\frac{7}{2}\right\}$ b) $S=\left\{-1,-\frac{7}{2}\right\}$

c) $S=\left\{1,\frac{7}{2}\right\}$ d) $S=\left\{-1,\frac{7}{2}\right\}$

الحل :

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{6y}+\frac{y}{3}=0 \quad \}\times 6y$$

$5y-7+2y^2=0 \Rightarrow 2y^2+5y-7=0$

$(2y+7)(y-1)=0$

أما $2y+7=0 \Rightarrow 2y=-7 \Rightarrow y=-\frac{7}{2}$

او $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=\left\{1,-\frac{7}{2}\right\}$

الجواب فرع (a)

[3] $\frac{8x}{5}=\frac{5}{8x}$

a) $S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{8}{5}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{5}{8},\frac{8}{5}\right\}$

c) $S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{5}{8}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{8}{5},-\frac{8}{5}\right\}$

الحل : الطرفين في الوسطين

$64x^2=25 \Rightarrow x^2=\frac{25}{64} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{64}}$

$x=\pm\frac{5}{8} \Rightarrow S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{5}{8}\right\}$

الجواب فرع (d)

[4] $\frac{1+2y}{3y+9}=\frac{y}{2}$

a) $S=\left\{1,\frac{1}{3}\right\}$ b) $S=\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$

c) $S=\left\{2,\frac{1}{3}\right\}$ d) $S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

الحل : الطرفين في الوسطين

$y(3y+9)=2(1+2y) \Rightarrow 3y^2+9y=2+4y$

$3y^2+9y-2-4y=0 \Rightarrow 3y^2+5y-2=0$

$(y+2)(3y-1)=0$

أما $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

أو $3y-1=0 \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

$S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $\frac{16x-64}{x^2}=1$

a) $x=-8$ b) $x=8$ c) $x=-6$ d) $x=6$

الحل : الطرفين في الوسطين

$x^2=16x-64 \Rightarrow x^2-16x+64=0$

$(x-8)^2=0 \Rightarrow x-8=0 \Rightarrow x=8$

الجواب فرع (b)

سؤال: جد مجموعة حل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

[6] $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-1}=1$

a) $S=\{2+\sqrt{7},2-\sqrt{7}\}$ b) $S=\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\}$

c) $S=\{1+\sqrt{7},1-\sqrt{7}\}$ d) $S=\{2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}$

الحل :

$\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-1}=1 \}\times(x-2)(x-1)$

$2(x-1)-3(x-2)=(x-2)(x-1)$

$2x-2-3x+6=x^2-x-2x+2$

$-x+4=x^2-3x+2$

$x^2-3x+2+x-4=0 \Rightarrow x^2-2x-2=0$

$a=1, \quad b=-2, \quad c=-2$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-2)}}{2(1)}$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

أما $x=1+\sqrt{3}$ أو $x=1-\sqrt{3}$

$S=\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\}$

الجواب فرع (b)

[7] $\frac{y-6}{y+6}-\frac{y+6}{y-6}=\frac{24y^2+6}{y^2-36}$

a) $y=-\frac{1}{3}$ b) $y=-\frac{1}{2}$ c) $y=\frac{1}{3}$ d) $y=\frac{1}{2}$

الحل :

$\frac{y-6}{y+6}-\frac{y+6}{y-6}$

$=\frac{24y^2+6}{(y+6)(y-6)} \}\times(y+6)(y-6)$

$(y-6)^2-(y+6)^2=24y^2+6$

$y^2-12y+36-(y^2+12y+36)=24y^2+6$

$y^2-12y+36-y^2-12y-36=24y^2+6$

$-24y=24y^2+6$

$24y^2+24y+6=0\} \div 6 \Rightarrow 4y^2+4y+1=0$

$(2y+1)^2=0 \Rightarrow 2y+1=0$

$2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

الجواب فرع (b)

[8] $\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{x^2+12x+81}{x^2-9}$ a) $x=-9$ b) $x=9$ c) $x=-8$ d) $x=8$

الحل

$\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{x^2+12x+81}{(x+3)(x-3)} \}\times(x+3)(x-3)$

$x(x-3)-x(x+3)=x^2+12x+81$

$x^2-3x-x^2-3x=x^2+12x+81 \Rightarrow -6x=x^2+12x+81$

$x^2+12x+81+6x=0 \Rightarrow x^2+18x+81=0$

$(x+9)^2=0 \Rightarrow x+9=0 \Rightarrow x=-9$

الجواب فرع (a)

[9] $\frac{3y}{y-4}+\frac{y}{y-2}=\frac{5y^2-4y+8}{y^2-6y+8}$

a) $S=\{4,-2\}$ b) $S=\{-4,-2\}$ c) $S=\{-4,2\}$ d) $S=\{4,2\}$

الحل

$\frac{3y}{y-4}+\frac{y}{y-2}=\frac{5y^2-4y+8}{(y-4)(y-2)}\ \}\times(y-4)(y-2)$

$3y(y-2)+y(y-4)=5y^2-4y+8$

$3y^2-6y+y^2-4y=5y^2-4y+8$

$4y^2-10y=5y^2-4y+8 \Rightarrow 5y^2-4y+8-4y^2+10y=0$

$y^2+6y+8=0 \Rightarrow (y+4)(y+2)=0$

أما $y+4=0 \Rightarrow y=-4$

أو $y+2=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow S=\{-4,-2\}$

الجواب فرع (b)

الدرس [6 – 3] : خطة حل المسألة (كتابة المعادلة):

تعلم // تقطع باخرة شحن مسافة 240km بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة ولو زادت سرعتها 10 km/h لتمكنت من قطع المسافة بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول . جد سرعة الباخرة أولا .

أفهم : ما المعطيات في السؤال ؟

باخرة شحن تقطع المسافة 240km بين المدينة A والمدينة B

بسرعة معينة وتطعها بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول في حالة زادت سرعتها بمقدار 10 km/h .

ما المطلوب من المسألة ؟ إيجاد سرعة الباخرة أولاً

خطط : أكتب معادلة تمثل المسألة ثم حلها لإيجاد سرعة الباخرة أولاً

الحل

نفرض سرعة الباخرة الأولى $V =$ ، الزمن الأول $= \frac{240}{V}$

سرعة الباخرة الثانية $V + 10 =$ ، الزمن الثاني $= \frac{240}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $= 2$

$$\frac{240}{V} - \frac{240}{V+10} = 2 \quad \} \times V(V+10)$$

$$240(V+10) - 240V = 2V(V+10)$$

$$240V + 2400 - 240V = 2V^2 + 20V$$

$$2V^2 + 20V - 2400 = 0 \quad \} \div 2$$

$$V^2 + 10V - 1200 = 0 \implies (V+40)(V-30) = 0$$

أما $V + 40 = 0 \implies V = -40$ يهمل

أو $V - 30 = 0 \implies V = 30 \text{ km/h}$ سرعة الباخرة

تحقق من صحة الحل :

$$\frac{240}{V} = \frac{240}{30} = 8h$$ الزمن الأول

$$\frac{24}{V+10} = \frac{240}{30+10} = \frac{240}{40} = 6h$$ الزمن الثاني

مســـــائـــــتل

سؤال: نافورة : زرعت منطقة مربعة الشكل طول ضلعها $4m$ بالورد وسط حديقة فندق مربعة الشكل فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها $84m^2$. ما طول ضلع الحديقة ؟

الحل

نفرض طول ضلع الحديقة $= x$ ومساحة الحديقة $= x^2$

مساحة المنطقة المزروعة $4 \times 4 = 16$

مساحة الحديقة – مساحة المنطقة المزروعة $= 84$

$x^2 - 16 = 84 \Rightarrow x^2 = 84 + 16$

$x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$ أما $x = -10$ يهمل

أو $x = 10\ m$ طول ضلع الحديقة

التحقق :

$x^2 - 16 = (10)^2 - 16 = 100 - 16 = 84$

سؤال: أسد بابل : هو تمثال لأسد عثر عليه في مدينة بابل الأثرية في العراق في سنة 1776 وهو مصنوع من حجر البازلت الأسود الصلب وموضوع على منصة منتصف منطقة مستطيلة الشكل طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$ ومساحتها $15m^2$. فما أبعادها ؟

الحل

نفرض العرض $= x$ والطوال $x + 2$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x + 2) = 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x + 5)(x - 3) = 0$

أما $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ يهمل

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3m$ العرض

$x + 2 = 3 + 2 = 5m$ الطول

التحقق :

$3 \times 5 = 15\ m^2$ المساحة

سؤال: الأسد : وهو من اقوى الحيوانات الموجودة على وجه الأرض ويلقب الأسد بملك الغابة نسبة الى قوته بين الحيوانات في الغابة اذا كانت المعادلة $x^2 - 30x = 175$ تمثل المساحة التي يبسط الأسد سيطرته عليها بالكيلومترات . ما طول ضلع المنطقة

الحل

$x^2 - 30x - 175 = 0 \Rightarrow (x - 35)(x + 5) = 0$

أما $x - 35 = 0 \Rightarrow x = 35\ km$ طول ضلع المنطقة

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ يهمل

التحقق :

$x^2 - 30x = (35)^2 - 30(35)$

$= 1225 - 1050 = 175$

سؤال: ألعاب نارية : في أحدى المناسبات أطلقت مجموعة من الألعاب النارية عموديا في الهواء وصلت الى ارتفاع 140 . احسب الزمن الذي وصلت به الى هذا الارتفاع اذا كانت المعادلة الآتية : $2t^2 - 30t = 200$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار التي تصل اليه الألعاب النارية بعد t ثانية .

الحل

$2t^2 - 30t - 200 = 0 \ \} \div 2$

$t^2 - 15t - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t-20)(t+5) = 0$

أما $t - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 20\ s$

أو $t + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -5$ يهمل

التحقق :

$2t^2 - 30t = 2(20)^2 - 30(20)$

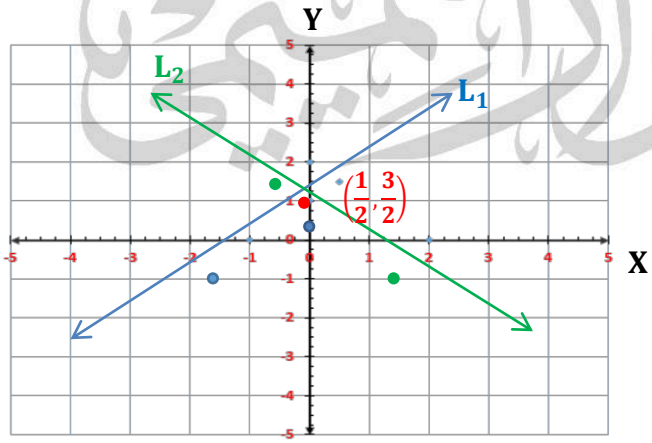
$= 800 - 600 = 200$

اختبار الفصل

سؤال : جد مجموعة حل المعادلتين بيانيا في R

$[1]\ y = 1 + x$ ———— (1)

$y = 2 - x$ ———— (2)



الحل : نرمز للمعادلة $(1)\ y = 1 + x$ بالرمز L_1

$y = 1 - 0 \Rightarrow y = 1$

$0 = 1 + x \Rightarrow x = -1$

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
−1	0	(−1, 0)

نرمز للمعادلة $(2)\ y = 2 - x$ بالرمز L_2

$y = 2 - 0 \Rightarrow y = 2$

$0 = 2 - x \Rightarrow x = 2$

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

[2] $y + x = 0$ ——— (1)

$y - x = 0$ ——— (2)

الحل : نرمز للمعادلة (1) $y + x = 0$ بالرمز L_1

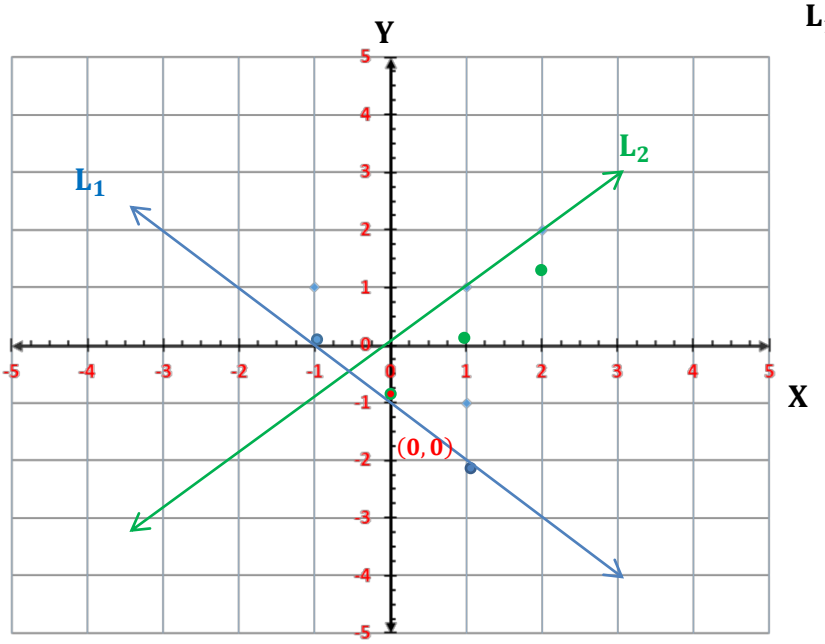
x	y	(x, y)
1	−1	(1, −1)
−1	1	(−1, 1)

$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$
$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

نرمز للمعادلة (2) $y - x = 0$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$



مجموعة حل النظام : $\{(0, 0)\}$

[3] $y - x - 5 = 0$ ——— (1)

$y + x - 1 = 0$ ——— (2)

الحل : نرمز للمعادلة (1) $y - x - 5 = 0$ بالرمز L_1

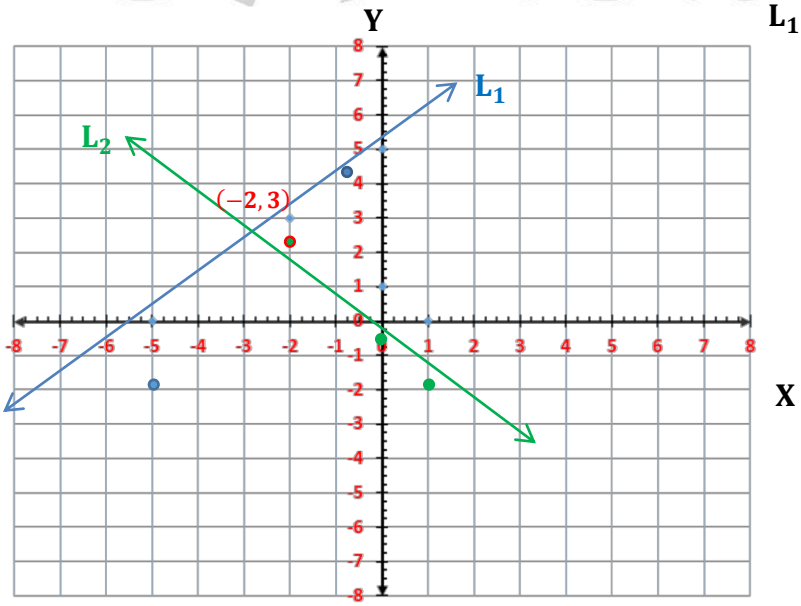
x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
−5	0	(−5, 0)

$y - 0 - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$
$0 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

نرمز للمعادلة (2) $y + x - 1 = 0$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)

$y + 0 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
$0 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



مجموعة حل النظام : $\{(-2, 3)\}$

سؤال: جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي :

[4] $2x + y = 1$ ——— (1)
$x - y = 8$ ——— (2)

الحل :

$2x + \cancel{y} = 1$ ——— (1)
$x - \cancel{y} = 8$ ——— (2) بالجمع

$3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$

نعوض قيمة $x = 3$ في معادلة (1)

$2(3) + y = 1 \Rightarrow 6 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 6$
$= -5$

مجموعة حل النظام : $\{(3, -5)\}$

[5] $4x - 2y = -4$ ——— (1)
$x + y = 6$ ——— (2) $\} \times 2$

الحل :

$4x - \cancel{2y} = -4$ ——— (1)
$2x + \cancel{2y} = 12$ ——— (2) بالجمع

$6x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

نعوض قيمة $x = \frac{4}{3}$ في معادلة (2)

$\frac{4}{3} + y = 6 \Rightarrow y = 6 - \frac{4}{3} = \frac{18 - 4}{3} = \frac{14}{3}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)\right\}$

[6] $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ——— (1) $\} \times 6$
$x + y = 2$ ——— (2) $\} \times 3$

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 6 ومعادلة (2) في العدد 3

$2x + 3y = 6$ ——— (1)
$\mp 3x \mp \cancel{3y} = \mp 6$ ——— (2) بالطرح

$-x = 0 \Rightarrow x = 0$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$0 + y = 2 \Rightarrow y = 2$

مجموعة حل النظام : $\{(0, 2)\}$

سؤال: حل المعادلة التالية في R باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين :

[7] $9x^2 - 25 = 0$

الحل :

$(3x + 5)(3x - 5) = 0$

أما $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

أو $3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$

[8] $3y^2 - 12 = 0$

الحل :

$3(y^2 - 4) = 0 \} \div 3 \Rightarrow y^2 - 4 = 0$
$(y + 2)(y - 2) = 0$

أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \{2, -2\}$

[9] $(7 - Z)^2 - 1 = 0$

الحل :

$(7 - Z + 1)(7 - Z - 1) = 0$
$(8 - Z)(6 - Z) = 0$

أما $8 - Z = 0 \Rightarrow Z = 8$

أو $6 - Z = 0 \Rightarrow Z = 6 \Rightarrow S = \{8, 6\}$	

سؤال: حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[10] $x^2 = 49$ الحل : $x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7$ $S = \{7, -7\}$	[11] $81 - y^2 = 0$ الحل : $y^2 = 81 \Rightarrow y = \pm\sqrt{81} \Rightarrow y = \pm 9$ $S = \{9, -9\}$
[12] $Z^2 = \frac{36}{9}$ $Z = \pm\sqrt{\frac{36}{9}} \Rightarrow Z = \pm\frac{6}{3} = \pm 2$ $S = \{2, -2\}$	

سؤال: حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[13] $x^2 + 9x + 18 = 0$ الحل : $(x + 6)(x + 3) = 0$ أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ $S = \{-6, -3\}$	[14] $Z^2 - 2Z - 48 = 0$ الحل : $(Z - 8)(Z + 6) = 0$ أما $Z - 8 = 0 \Rightarrow Z = 8$ أو $Z + 6 = 0 \Rightarrow Z = -6$ $S = \{8, -6\}$
[15] $3x^2 - x - 10 = 0$ الحل : $(x - 2)(3x + 5) = 0$ أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ أو $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$ $S = \left\{2, -\frac{5}{3}\right\}$	[16] $7Z^2 - 18Z - 9 = 0$ الحل : $(Z - 3)(7Z + 3) = 0$ أما $Z - 3 = 0 \Rightarrow Z = 3$ أو $7Z + 3 = 0 \Rightarrow 7Z = -3 \Rightarrow Z = -\frac{3}{7}$ $S = \left\{3, -\frac{3}{7}\right\}$

سؤال: ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3 ؟

الحل

نفرض العدد $= x$, أربعة أمثاله $= 4x$

مربع العدد $= x^2$

$4x - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{3, 1\}$

سؤال: حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار 4m ومساحته $48m^2$. ما أبعاد المسبح ؟

الحل

نفرض عرض المسبح $= x$ ، مثلي عرضه $= 2x$

طول المسبح $= 2x + 4$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$x(2x+4) = 48 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 48 = 0$

$(x+6)(2x-8) = 0$

أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ يهمل

أو $2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8$

$x = \frac{8}{2} = 4m$ العرض

$2x + 4 = 2(4) + 4 = 8 + 4 = 12m$ الطول

سؤال: حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

[1] $x^2 - 16x + 64 = 0$

الحل

$(x-8)^2 = 0 \Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

[2] $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}Z + \frac{1}{4}Z^2 = 0$

الحل

$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}Z\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2}Z = 0$

$\frac{1}{2}Z = \frac{1}{3} \Rightarrow 3Z = 2 \Rightarrow Z = \frac{2}{3}$

سؤال: حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $x^2 - 14x = 32$

الحل

$\left(\frac{1}{2} \times 14\right)^2 = (7)^2$

$= 49$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 14x + 49 = 32 + 49$

$(x-7)^2 = 81$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 7 = \pm 9$

أما $x - 7 = 9 \Rightarrow x = 9 + 7 = 16$

أو $x - 7 = -9 \Rightarrow x = -9 + 7 = -2$

$S = \{16, -2\}$

[2] $5Z^2 + 6Z = 9$

الحل

$5Z^2 + 6Z = 9 \ \} \div 5 \Rightarrow Z^2 + \frac{6}{5}Z = \frac{9}{5}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$= \frac{9}{25}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 + \frac{6}{5}Z + \frac{9}{25} = \frac{9}{5} + \frac{9}{25}$

$\left(Z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{45+9}{25}$

$\left(Z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{25}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z + \frac{3}{5} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{5}$

$Z + \frac{3}{5} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{5}$

أما $Z + \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{5} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}-3}{5}$

أو $Z + \frac{3}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Z = \frac{-\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{5}$

$Z = \frac{-\sqrt{3}-3}{5} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{3}-3}{5}, \frac{-\sqrt{3}-3}{5}\right\}$

سؤال: جد مجموعة حلول المعادلات التالية باستعمال القانون العام في R

[24] $x^2 - 3x - 7 = 0$

الحل

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 28}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

أما $x = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$ أو $x = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$

$$S = \left\{\frac{3 + \sqrt{37}}{2} , \frac{3 - \sqrt{37}}{2}\right\}$$

[25] $3y^2 - 12y = -3$

الحل

$3y^2 - 12y + 3 = 0$

$a = 3 \ , \ b = -12 \ , \ c = 3$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 36}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{108}}{6}$$

$$y = \frac{12 \pm 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2 \pm \sqrt{3})}{6} = 2 \pm \sqrt{3}$$

أما $y = 2 + \sqrt{3}$

أو $y = 2 - \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $S = \{2 + \sqrt{3} , 2 - \sqrt{3}\}$

[26] $5Z^2 + 6Z = 9$

الحل

$5Z^2 + 6Z - 9 = 0 \Rightarrow a = 5 \ , \ b = 6 \ , \ c = -9$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(5)(-9)}}{2(5)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 180}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{216}}{10}$$

$$Z = \frac{6 \pm 6\sqrt{6}}{10} = \frac{2(3 \pm 3\sqrt{6})}{10} = \frac{3 \pm 3\sqrt{6}}{5}$$

أما $Z = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{5}$ أو $Z = \frac{3 - 3\sqrt{6}}{5}$

$$S = \left\{\frac{3 + 3\sqrt{6}}{5} , \frac{3 - 3\sqrt{6}}{5}\right\}$$

سؤال: حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا

[1] $2x^2 + 8x + 8 = 0$

الحل

$a = 2\ ,\ \ b = 8\ ,\ \ c = 8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(2)(8) = 64 - 64 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$$

[2] $y^2 - 6y - 9 = 0$

الحل

$a = 1\ ,\ \ b = -6\ ,\ \ c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-9) = 36 + 36 = 72$

مقدار المميز موجب وليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيان .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{72}}{2(1)} = \frac{6 \pm 6\sqrt{2}}{4}$$

$$y = \frac{2(3 \pm 3\sqrt{2})}{4} = \frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

أما $y = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}$ أو $y = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}$

$$S = \left\{\frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}\right\}$$

[3] $4Z^2 - 3Z + 7 = 0$

الحل

$a = 4\ ,\ \ b = -3\ ,\ \ c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(4)(7) = 9 - 112 = -103$

مقدار المميز سالب ونوع الجذران غير حقيقيان وليس لها حل في R

سؤال: ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+6)x+9=0$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة.

الحل

يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$a=1 \quad , \quad b=-(k+6) \quad , \quad c=9$

$b^2-4ac=0$

$[-(k+6)]^2-4(1)(9)=0$

$(k+6)^2-36=0$

$(k+6)^2=36$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k+6=\pm 6$

أما $k+6=6 \Rightarrow k=6-6=0$

أو $k+6=-6 \Rightarrow k=-6-6=-12$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

عندما : $k=0$

$x^2-(k+6)x+9=0 \Rightarrow x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

عندما : $k=-12$

$x^2-(k+6)x+9=0 \Rightarrow x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$

سؤال: جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل

[31] $\frac{6x}{5}=\frac{5}{6x}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$36x^2=25 \Rightarrow x^2=\frac{25}{36} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{36}}$

$x=\pm\frac{5}{6}$

أما $x=\frac{6}{5}$ أو $x=-\frac{6}{5}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

عندما : $x=\frac{5}{6}$

الطرف الايسر $\frac{6x}{5}=\frac{6\left(\frac{5}{6}\right)}{5}=\frac{5}{5}=1$

الطرف الايمن $\frac{5}{6x}=\frac{5}{6\left(\frac{5}{6}\right)}=\frac{5}{5}=1$

[32] $\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{y}$

الحل :

$\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{y} \}\times 6y^2$

$1+3y^2=6y \Rightarrow 3y^2-6y+1=0$

$a=1 \ , \quad b=-6 \ , \quad c=1$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(6)^2-4(3)(1)}}{2(3)}$

$=\frac{6\pm\sqrt{36-12}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{24}}{6}$

$y=\frac{6\pm 2\sqrt{6}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$

أما $y=\frac{3+\sqrt{6}}{3}$ أو $y=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$

الطرفين في الوسطين $[33]\quad \frac{Z+4}{Z^2}=\frac{1}{2}$

الحل :

$Z^2=2Z+8 \quad\Rightarrow\quad Z^2-2Z-8=0$

$(Z-4)(Z+2)=0$

أما $Z-4=0 \quad\Rightarrow\quad Z=4$

أو $Z+2=0 \quad\Rightarrow\quad Z=-2$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم Z في المعادلة الأصلية

الطرف الايمن $Z=4 \quad\Rightarrow\quad \frac{Z+4}{Z^2}=\frac{4+4}{(4)^2}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

عندما : $y=\frac{3+\sqrt{6}}{3}$

$$\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{6\left(\frac{9+6\sqrt{6}+6}{9}\right)}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2\left(\frac{15+6\sqrt{6}}{3}\right)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2(5+2\sqrt{6})}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{10+4\sqrt{6}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{10+4\sqrt{6}}\times\frac{10-4\sqrt{6}}{10-4\sqrt{6}}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{10-4\sqrt{6}}{100-96}+\frac{1}{2}=\frac{10-4\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{6-2\sqrt{6}}{2}=3-\sqrt{6}$$ الطرف الايسر

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}=\frac{3}{3+\sqrt{6}}\times\frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}=\frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6}$$

$$=\frac{3(3-\sqrt{6})}{3}=3-\sqrt{6}$$ الطرف الايمن

سؤال: جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R :

[1] $\frac{2y}{y+2}+\frac{y}{2-y}=\frac{7}{y^2-4}$

الحل

$$\frac{2y}{y+2}-\frac{y}{y-2}=\frac{7}{(y+2)(y-2)}\ \}\times(y+2)(y-2)$$

$$2y(y-2)-y(y+2)=7$$

$$2y^2-4y-y^2-2y=7$$

$$y^2-6y-7=0 \Rightarrow (y-7)(y+1)=0$$

أما $y-7=0 \Rightarrow y=7$

أو $y+1=0 \Rightarrow y=-1$

[2] $\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x-2}=1$

الحل

$$\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x-2}=1\ \}\times(x-5)(x-2)$$

$$4(x-2)-3(x-5)=(x-5)(x-2)$$

$$4x-8-3x+15=x^2-2x-5x+10$$

$$x+7=x^2-7x+10$$

$$x^2-7x+10-x-7=0$$

$$x^2-8x+3=0 \Rightarrow a=1\ ,\ b=-8\ ,\ c=3$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{64-12}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{52}}{2}$$

$$x=\frac{8\pm2\sqrt{13}}{2}=4\pm\sqrt{13}$$

أما $x=4+\sqrt{13}$ أو $x=4-\sqrt{13}$

* تدريس منهج انكليزي لمدارس المتميزين وكلية بغداد / وعربي للمدارس الاعتيادية

* تحتوي الملزمة على شرح مفصل وحلول جميع امثلة الكتاب والتمارين