2026

الرياضيات

للصف الثالث المتوسط

وداعا لصعوبة المنهج

الجزء الثاني

الرياضيات

اعداد الاستاذ

رشيد عبد الله اللهيبي

هاتف: 07736957649

مرشحات وزارية - شرح مبسط للمادة - ملاحظات وافية للمواضيع

الفصل الرابع : الهندسة الأحداثية

الدرس [4-1] التمثيل البياني في المستوى الاحداثي

[4 – 1 – 1] تمثيل المعادلة الخطية في المستوى الاحداثي

المعادلة الخطية : هي العادلة التي يكون فيها اس المتغير واحد فقط وتكون الصيغة العمة لها بالشكل التالي $ax + by + c = 0$ حيث $a, b, c \in R$ ويكون تمثيلها في المستوى الاحداثي على شكل خط مستقيم.

وتكون علاقة المستقيم مع المحورين حسب نوع المعادلة وحسب الجدول التالي :

المعادلة	العلاقة مع المحورين
$ax + by + c = 0$	المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل
$ax + by = 0$	المستقيم يقطع المحورين في نقطة الاصل (المستقيم يمر في نقطة الاصل)
$y = k, k \in R$	المستقيم يوازي محور السينات X وعمودي على محور الصادات Y ويمر بالنقطة $(0, k)$
$x = h, h \in R$	المستقيم يوازي محور الصادات Y وعمودي على محور السينات X ويمر بالنقطة $(h, 0)$

لتمثيل المعادلات الخطية في المستوى الاحداثي يتبع الخطوات التالية:

1) نجعل المعادلة بدلالة (x أي نجعل y في طرف والمتغير x والثوابت في الطرف الاخر ونتخلص من معامل y ان وجد) $y = \cdots$.
2) نضع جدول مكون من اربع اعمدة العمود الاول للمتغير x والعمود الثاني للمعادلة و الثالث للمخرجات y والرابع للأزواج المرتبة $p(x, y)$.
3) اخذ قيمة افتراضية للـ $x = 0,1$ ونعوضها بالمعادلة ونجد قيمة المتغير y ثم نكون الازواج المرتبة $p(x, y)$.
4) نرسم الازواج المرتبة $p(x, y)$ في المستوي الاحداثي ثم نصل بينهما بخط مستقيم.

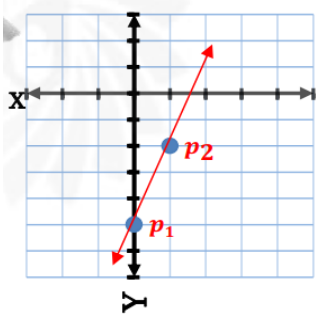
مثال مثل المعادلات التالية في المستوى الاحداثي ؟ ثم بين ما تلاحظه بعد الرسم

1. $y - 3x + 5 = 0$

الحل / نبسط المعادلة بجعل y بطرف والبقية بالطرف الاخر

$y = 3x - 5$

x	$y = 3x - 5$	y	$p(x, y)$
0	$y = 3(0) - 5 \Rightarrow y = 0 - 5 = -5$	-5	$p1(0, -5)$
1	$y = 3(1) - 5 \Rightarrow y = 3 - 5 = -2$	-2	$p2(1, -2)$

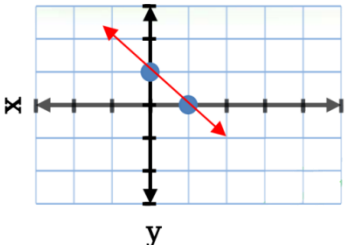


نلاحظ ان المستقيم يقطع محور السينات x ومحور الصادات y ولا يمر بنقطة الاصل.

2. $y + x - 1 = 0$

الحـل /

$y = -x + 1$

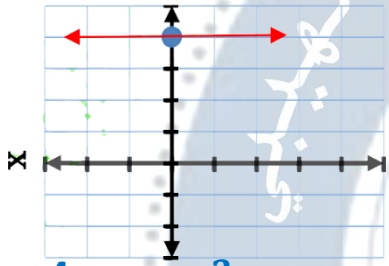


x	$y = -x + 1$	y	$p(x, y)$
0	$y = -(0) + 1 \Rightarrow y = 0 + 1 \Rightarrow y = 1$	1	$p1(0, -5)$
1	$y = -(1) + 1 \Rightarrow y = -1 + 1 \Rightarrow y = 0$	0	$p2(1, -2)$

نلاحظ ان المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل.

3. $y = 4$

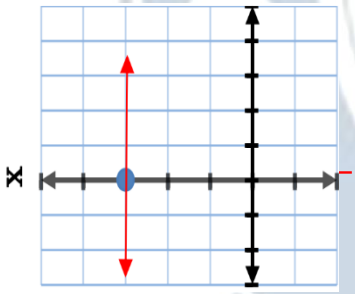
الحـل /



ملاحظة / إذا كانت قيمة y تساوي عدد مطلق. فأنه المستقيم يوازي محور السينات x .

4. $x = y - 3$

الحـل /

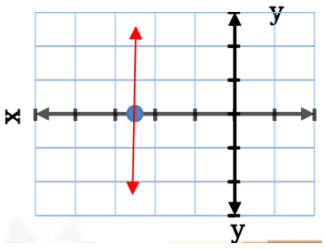


نلاحظ ان المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند النقطة $(-3, 0)$

ملاحظة / اذا كانت قيمة x تساوي عدد مطلق .فانه المستقيم يوازي محور الصادات y.

5. $x = \frac{-5}{2}$

الحـل /



نلاحظ ان المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند النقطة $\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$

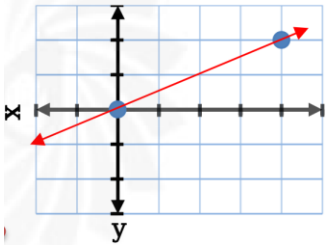
6. $2y - x = 0$

الحـل /

$[2y = x] \div 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

اذا كان معامل y كسر يفضل ان ناخذ قيم x تقبل القسمه على المقام

x	$y = \frac{x}{2}$	y	$p(x, y)$
0	$y = \frac{0}{2} \Rightarrow y = 0$	0	$p1(0, 0)$
4	$y = \frac{4}{2} \Rightarrow y = 2$	2	$p2(4, 2)$

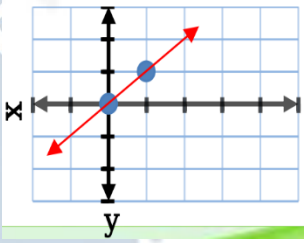


نلاحظ ان المستقيم يمر في نقطة الاصل $(0, 0)$

7. $y = x$

الحـل /

x	$y = x$	y	$p(x, y)$
0	$y = 0 \Rightarrow y = 0$	0	$p1(0, 0)$
1	$y = 1 \Rightarrow y = 1$	1	$p2(1, 1)$



نلاحظ ان المستقيم يمر في نقطة الاصل $(0, 0)$

سؤال مثل المعادلات التالية في المستوى الاحداثي وماذا تلاحظ : **واجب**

❶ $y - x + 1 = 0$	❷ $y + 3x - 2 = 0$	❸ $y = 1 - 3x$	❹ $y = -x + 4$
❺ $y = -x + 4$	❻ $y - x - 3 = 0$	❼ $2x - 4y = 8$	❽ $y + 5 = 0$
❾ $y = -4x$	❿ $x = 4$		

التمثيل البياني للمعادلة التربيعية في المستوي الاحداثي [2 – 1 – 4]

المعادلة التربيعية : هي المعادلة التي يكون فيها اعلى اس للمتغير تربيع (2) وتكون الصيغة العامة لها $f(x) = y =$ $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0, a, b, c \in R$ وتكون تمثيلها في المستوي الاحداثي على شكل U او ∩ .

ملاحظة /

- عندما تكون المعادلة سالبة يكون الرسم على شكل تقاطع.
- عندما تكون موجبة يكون الرسم على شكل اتحاد.

لتمثيل المعادلات التربيعية في المستوي الاحداثي تتبع الخطوات التالية:

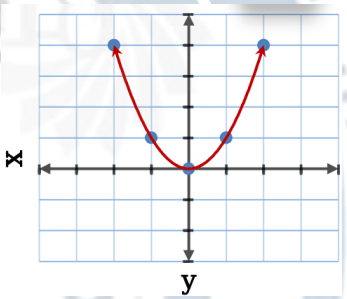
1) نجعل المعادلة بدلالة x (أي نجعل y في طرف والمتغير x والثوابت في الطرف الاخر ونتخلص من معامل y ان وجد) $\cdots = y$
2) نضع جدول مكون من اربع اعمدة, العمود الاول للمتغير x والعمود الثاني للمعادلة و الثالث للمخرجات y والرابع للأزواج المرتبة (x, y)
3) اخذ قيمة افتراضية للمتغير $x = -1, -2, 0, 1, 2$ ونعوضها بالمعادلة ونجد قيمة المتغير y ثم نكون الازواج المرتبة (x, y)
4) نرسم الازواج المرتبة (x, y) في المستوي الاحداثي ثم نصل بخط بين الازواج المرتبة (يعني نصل بين النقاط بخط مقوس) وحسب الملاحظة أعلاه .

سؤال / مثل المعادلات التالية في المستوى الاحداثي :

1. $y = x^2$

الحل /

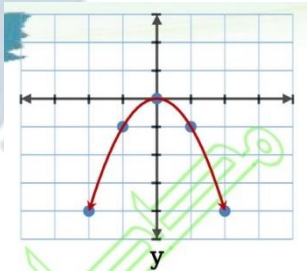
x	$y = x^2$	y	(x, y)
-2	$y = (-2)^2 \Rightarrow y = 4$	4	(-2, 4)
-1	$y = (-1)^2 \Rightarrow y = 1$	1	(-1, 1)
0	$y = (0)^2 \Rightarrow y = 0$	0	(0, 0)
1	$y = (1)^2 \Rightarrow y = 1$	1	(1, 1)
2	$y = (2)^2 \Rightarrow y = 4$	4	(2, 4)



2. $y = -x^2$

الحل /

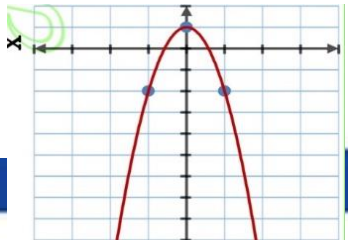
x	$y = -x^2$	y	(x, y)
-2	$y = -(-2)^2 \Rightarrow y = -4$	-4	(-2, -4)
-1	$y = -(-1)^2 \Rightarrow y = -1$	-1	(-1, -1)
0	$y = -(0)^2 \Rightarrow y = 0$	0	(0, 0)
1	$y = -(1)^2 \Rightarrow y = -1$	-1	(1, -1)
2	$y = -(2)^2 \Rightarrow y = -4$	-4	(2, -4)



3. $y = 1 - 3x$

الحل /

x	$y = 1 - 3x^2$	y	(x, y)
-2	$y = -3(-2)^2 = 1-3\,(4)$ $= 1 - 12 \Rightarrow y = -11$	-11	(-2, -11)



-1	$y = -3(-1)^2 = 1-3\,(1) = 1-3 \Rightarrow y = -2$	-2	(-1, -2)
0	$y = 1 - 3(0)^2 = 1 - 3(0) = 1 - 0 \Rightarrow y = 1$	1	(0, 1)
1	$y = 1 - 3(1)^2 = 1 - 3(1) = 1 - 3 \Rightarrow y = -2$	-2	(1, -2)
2	$y = 1 - 3(2)^2 = 1 - 3(4) = 1 - 12 \Rightarrow y = -11$	-11	(2, -11)

سؤال مثل المعادلات في المستوى الاحداثي : **واجب**

❶ $y = x^2 + 4$	❷ $y = -x^2 - 6$	❸ $y = x^2 - 1$	❹ $y = 2x^2 + 3$
❺ $y = 2x^2$	❻ $x^2 + 5y = 1$	❼ $y = 2x^2$	❽ $y - 2x^2 = 0$

تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

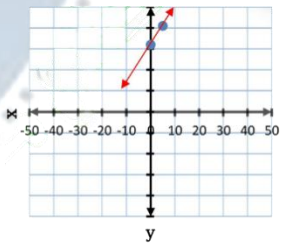
سؤال **درجات الحرارة:** المعادلة $F° = \frac{9}{5}C° + 32$ تبين ان العلاقة بين درجات الحرارة السليزية ودرجات الحرارة الفهرنايتيه لها مثل المعادلة بيانيا

الحـل /

نفترض ان $C° = x$ و $F° = y$ فيكون الزوج المرتب $(C°, F°)$

نأخذ قيم $C°$ الافتراضية من خلال الرسم

$C°$	$F° = \frac{9}{5}C° + 32$	$F°$	$(C°, F°)$
0	$F° = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$	32	(0, 32)
5	$F° = \frac{9}{5}(5) + 32 = 9(1) + 32 = 41$	31	(5, 41)



سؤال **فيزياء :** يمثل القانون $F = 9.8m$ القوة الناتجه على تاثير جاذبية الأرض على جسم حيث F القوة بالنيوتن m كتله الجسم بالكيلو غرام مثل القانون بالمستوى الاحداثي ؟

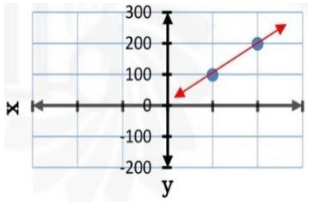
الحـل /

$$F = 9.8m$$

تمثل معادلة خطية نختار قيم للـ m التي تمثل كتلة الجسم وتكون موجبة ولا تساوي صفر (لانـه لا توجد كتلـة لجسم سالبة او صفر)

نختار قيم $m = 20, 10$ او أي قيم انت تختارها <u>لنفرض أن</u> $m = x$ و $F = y$

m	$f = 9.8\,m$	f	(m,f)
10	$f = 98$	98	(-2, 2)
20	$f = 196$	196	(0, 0)



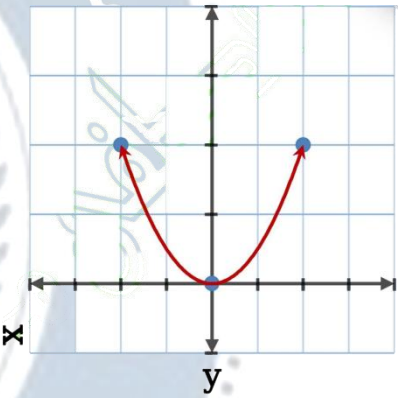
سؤال هندسة: مثلث ثائم الزاوية متساوي الساقين طول ضلعه القائم x وحدة $y = f(x)$ و تمثل مساحته 1- اكتب العلاقة $f(x)$ بدلالة x 2- مثل العلاقة في المستوى الاحداثي؟

الحـل /

(ا لارتفاع) × (القاعدة) $\frac{1}{2}$ = مساحة المثلث \ لأنه الدالة تمثل المساحة وهذه قانون مساحة مثلث القائم الزاوية

ثم نكون جدول الدالة التربيعية $f(x) = \frac{1}{2}(x)(x) = \frac{1}{2}x^2$

x	$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$	y	(x, y)
-2	$y = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2$	2	(-2, 2)
0	$y = \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2}(0) \Rightarrow y = 0$	0	(0, 0)
2	$y = \frac{1}{2}(2)^2 = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2$	2	(2, 2)



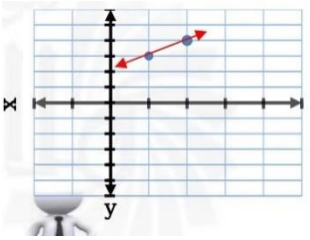
سؤال اعمال : تتقاضى شركه معدات بناء 10 الاف دينار كتامين ويضاف 5 الاف دينار عن كل ساعة اكتب المعادلة التي تعبرعن المسالة ؟ ثم مثلها بيانيا في المستوى الاحداثي ؟

الحـل /

نفرض ان عدد <u>ساعات العمل</u> x ويجب ان تكون قيمها موجبة و نفرض المبلغ الكلي الذي <u>تتقاضاه الشركة</u> y

$y = 5x + 10$

x	$y = 5x + 10$	y	(x, y)
1	$y = 5(1) + 10 \Rightarrow y = 15$	15	(1, 15)
2	$y = 5(2) + 10 \Rightarrow y = 20$	20	(2, 20)

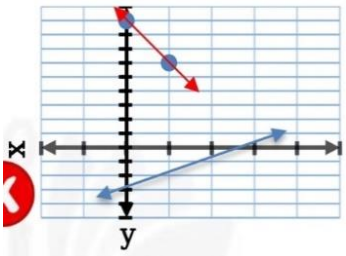


فكـــر

سؤال : **أكتشف الخطأ** : ميل محمد المعادلة الخطية التالية:

$y = -3x + 9$

بالشكل البياني المجاور , اكتشف خطا محمد وصححه ؟



الحـل /

$y = -3x + 9$

x	$y = -3x + 9$	(x, y)
0	$y = -3(0) + 9 = 0 + 9 \Rightarrow y = 9$	(0, 9)
1	$y = -3(1) + 9 = -3 + 9 \Rightarrow y = 6$	(1, 6)

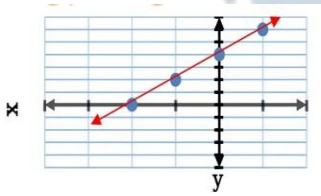
خطأ محمد هو في تعين مستقيم المعادلة والصحيح هو المستقيم باللون الاحمر.

سؤال : **مسألة مفتوحة** : اعط مثال لمعادلة خطية على صورة : $ax + by + c = 0$ لكل حالة $\mathbf{a = 0, b = 0, c = 0}$

الحـل /

❶ $a = 0 \Rightarrow 2y + 3 = 0$
❷ $b = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0$
❸ $c = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 0$

سؤال : **تحدَّ** : شكلت الازواج المرتبة التالية : $(0, 4), (1, 6), (-1, 2)$ مستقيما ما نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات؟



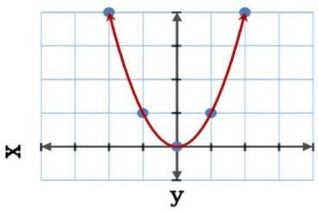
الحـل /

نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي $(-2, 0)$

سؤال : **تبرير** : بين اذا كانت الازواج المرتبة الاتية: تمثل دالة خطية ام تربيعية :

$\{(2, 4), (1, 1), (0, 0), (-1, 1), (-2, 4)\}$

مستقيما ما نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات ؟



الحـل /

تمثل داله تربيعية لان الرسم على شكل U

سؤال حس عددي : $y = x + 1, y = x^2 + 1$ ايهما تمثل دالة تربيعية ؟ وضح ذلك ؟

الحـل /

$y = x^2 + 1$ تمثل دالة تربيعية \\ لان اس المتغير 2

سؤال أكتب : خطوات تبين ان $y = 4x + 3$ معادلة خطية ؟

الحـل /

❶ الدالة تحتوي على x من الدرجة الاولى.

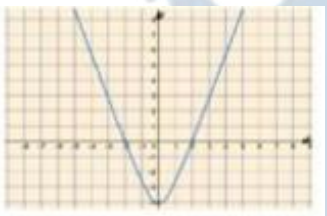
❷ بالتمثيل البياني نجد انها تمثل بمستقيم نقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل.

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال اختر الإجابة الصحيحة:

1. المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{2}$
a) لا يقطع أي من المحورين
b) يوازي محور السينات
c) يوازي محور الصادات √
d) يقطع المحورين

2. أي المعادلات الاتية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانيا جانبيا



a) $y = -3x^2$
b) $y = 2x^2 + 4$
c) $y = x^2 - 4$ √
d) $y = 3x^2 - 4$

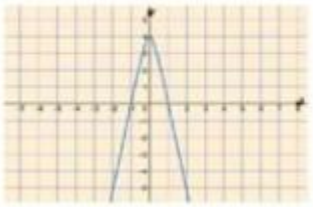
3. أي المعادلات الاتية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانيا جانبيا

a) $y = 3x + 4$
b) $y = 4x + 3$
c) $y = -3 + 4$
d) $y = 3x - 4$ √

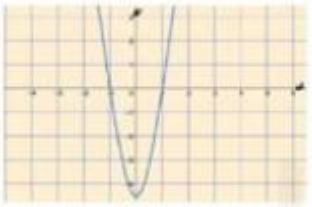
4. أي المعادلات الاتية تعبر عن معادلة خطية :
a) $y = x^2 + 1$
b) $y^2 = x + 1$
c) $y^2 = x^2 + 1$
d) $y = x + 1$ √

5. أي التمثيلات البيانية تعبر عن المعادلة : $y = -x^2 + 4$

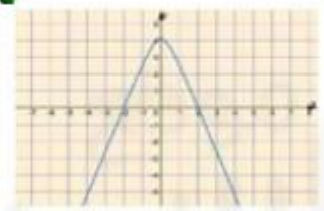
a)



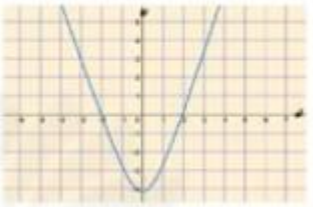
b)



c) ✓



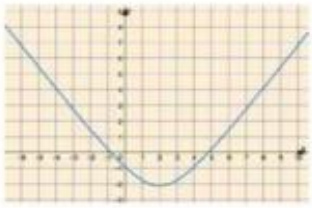
d)



6. لتمثيل المعادلة غير الخطية نحتاج الى :

a) نقطة واحدة على الأقل
b) نقطتان على الأكثر
c) نقطتان فقط
d) ثلاث نقاط على الأقل ✓

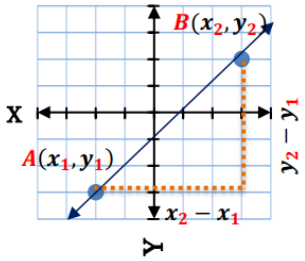
7. ما احداثيا راس المنحني الممثل جانبيا



a) $(2, -1)$
b) $(1, 2)$
c) $(2, -2)$ ✓
d) $(0, 2)$

الدرس [4-2] ميل المستقيم

[4 – 2 – 1] ايجاد ميل المستقيم



الميل : يعرف ميل المستقيم غير الراسي بانه النسبة نين التغير العمودي والتغير الافقي.

التغير العمودي (الصادي) : هو التغير على المحور الصادي ونساوي $y_2 - y_1$.

التغيير الافقي(السيني) : هو التغير على المحور السيني ونساوي $x_2 - x_1$

ونجد الميل بالقانون التالي:

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الصادي(الارتفاع)}}{\text{التغير السيني(المسافة)}} \qquad m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

لايهم ترتيب النقاط ويجوز تقديم B على A $\quad A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$

m : هو ميل المستقيم المار بالنقطتين $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$

ويكون الميل على اربع حالات:-

ناتج الميل	اتجاه حركة المستقيم ونوع الميل
❶ عدد موجب	الميل موجب (المستقيم نحو ا الاعلى) عند التحرك علي المستقيم من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد.
❷ عدد سالب	الميل موجب (المستقيم نحو الاسفل) عند التحرك علي المستقيم من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص.
❸ صفر	الميل صفر (المستقيم افقي) المستقيم يوازي محور السينات قيم y ثابته.
❹ غير محدد (المقام صفر)	الميل غير محدود (المستقيم عمودي) المستقيم يوازي محور الصادات قيم x ثابته.

سؤال

جد ميل المحدد بكل نقطيين مماياتي ثم حدد اتجاه حركته ونوع الميل:

1. $A(5,7)\ ,\ B(-2,1)$

الحـل /

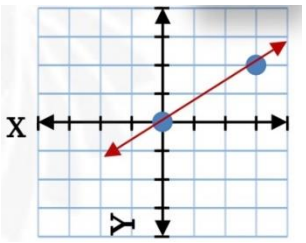
$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \implies m = \frac{1-7}{-2-5} \implies m = \frac{-6}{-7} \implies m = \frac{6}{7}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\frac{6}{7}$ موجب

الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى) عند التحرك على المستقيم من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد.

2. $A(0,0)$, $B(3,2)$

الحـل /



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{2-0}{3-0} \Rightarrow m=\frac{2}{3}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\frac{2}{3}$ موجب

الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى) عند التحرك على المستقيم من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد

3. $(-1,5)$, $(4,2)$

$x_1\ y_1$ $x_2\ y_2$

الحـل /

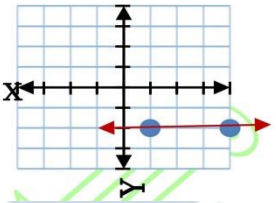
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{5-2}{-1-4} \Rightarrow m=\frac{3}{-5}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\frac{-3}{5}$ سالب

الميل سالب (المستقيم نحو السفل) عند التحرك على المستقيم من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص.

4. $(1,-2)(4,-2)$

الحـل /

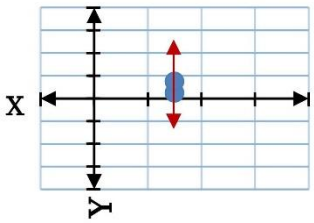


$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{-2-(-2)}{4-1} \Rightarrow m=0$$

الميل صفر (المستقيم افقي) المستقيم يوازي محور السينات قيم y ثابتة .

5. $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$

الحـل /



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} \Rightarrow m=\infty$$

لا يمكن التقسيم على الصفر

الميل غير محدد (المستقيم عمودي) المستقيم يوازي محور الصادات قيم X ثابتة.

سؤال جد ميل المستقيم ثم حدد اتجاه حركته ونوع الميل: **واجب**

❶ (-2, -2), (-4, 1)	❷ (-4, 4), (2, -5)	❸ (5, 0), (0, 2)	❹ (4, 3), (4, -3)
❺ (-6, -1), (-2, -1)	❻ (4, 4), (2, 3)	❼ (6, 2), (0, 2)	❽ (-2, 4), (5, 5)
❾ (-2, -3), (2, 4)			

[4 – 1 – 1] تقاطع المستقيم مع المحورين في المحور الاحداثي

يمكن ان نمثل معادلة المستقيم من خلال ايجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين من خلال ايجاد المقطع السيني والمقطع الصادي وتكوين زوج مرتب (X, y).

المقطع السيني : هو قيمة x من تقاطع المستقيم مع محور السينات $y = 0$ أي ونقطه التقاطع $(x, 0)$.

المقطع الصادي: هو قيمة y من تقاطع المستقيم مع محور الصادات $x = 0$ أي ونقطه التقاطع $(0, y)$.

سؤال / جد المقطع السيني والصادي للمستقيمات التالية:

1. $3x + 5y = 15$

الحـل /

المقطع الصادي $(0, y)$	المقطع السيني $(x, 0)$
تكتب المعادلة:	تكتب المعادلة
$3x + 5y = 15$	$3x + 5y = 15$
نعوض قيمة $X = 0$	نعوض قيمة $y=0$
$3(0) + 5y = 15$	$3x + 5(0) = 15$
$[5x = 15](\div 5)$	$[3x = 15](\div 3)$
هو المقطع الصادي $Y = 3$	هو المقطع السيني $x = 5$
النقطة $(0, 3)$	النقطة $(5, 0)$

2. $y + 2 = 5x - 4$

الحـل /

$y - 5x = -4 - 2$
$y - 5x = -6$

المقطع الصادي $(0, y)$	المقطع السيني $(x, 0)$
$y - 5x = -6$	$y - 5x = -6$
نعوض قيمة $X = 0$	نعوض قيمة $y = 0$
$y - 5(0) = -6$	$(0) - 5x = -6$
$y - 0 = -6$	$[-5x = -6] \div (-5)$
هو المقطع الصادي $Y = -6$	هو المقطع السيني $x = \frac{6}{5}$
النقطة $(0, -6)$	النقطة $(\frac{6}{5}, 0)$

3. $y = \frac{-1}{2}x + 4$

الحـل /

$y + \frac{1}{2}x = 4$

المقطع الصادي $(0, y)$	المقطع السيني $(x, 0)$
$y + \frac{1}{2}x = 4$ نعوض قيمة $X = 0$ $y + \frac{1}{2}(0) = 4$ $Y = 4$ هو المقطع الصادي النقطة $(0, 4)$	$y + \frac{1}{2}x = 4$ نعوض قيمة $y = 0$ $(0) + \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x = 4\right](\times 2)$ $x = 8$ هو المقطع السيني النقطة $(8, 0)$

4. $y = -\frac{3}{2}x$

الحـل /

$y + \frac{3}{2}x = 0$

المقطع الصادي $(0, y)$	المقطع السيني $(x, 0)$
$y + \frac{3}{2}x = 0$ نعوض قيمة $X = 0$ $y + \frac{3}{2}(0) = 0$ $y + 0 = 0$ $Y = 0$ هو المقطع الصادي النقطة $(0, 0)$	$y + \frac{3}{2}x = 0$ نعوض قيمة $y = 0$ $(0) + \frac{3}{2}x = 0$ $\left[\frac{3}{2}x = 0\right]\left(\times \frac{2}{3}\right)$ $x = 0$ هو المقطع السيني النقطة $(0, 0)$

5. $x = -2$

الحـل /

∴ المقطع السيني هو 2- وتقطه التقاطع (0, 2-)ويكون المستقيم يوازي محور الصادات.

6. $y = 4$

الحـل

∴ المقطع الصادي هو 4 وتقطه التقاطع $(0, 4)$ويكون المستقيم يوازي محور الصادات.

7. $3y = -6$

الحـل :

$(3y = -6)(\div 3)$

$y = -2$

∴ المقطع الصادي هو -2 وتقطه التقاطع $(0, -2)$ ويكون المستقيم يوازي محور الصادات.

سؤال : جد المقطع السيني والمقطع الصادي للمستقيمات التالية: واجب

❶ $3x + 6y = 18$	❷ $y = -x + 8$	❸ $5x = y - 8$	❹ $2x + 6y = 12$
❺ $y + 4 = 2x - 4$	❻ $2x + 4y = 12$	❼ $3y - 7x = 9$	❽ $y = -3.5x + 2$
❾ $0 = y + 3$	❿ $y = -4x$	⓫ $y = -5x$	⓬ $x = 4$
⓭ $x = -4$	⓮ $y - x = 4$	⓯ $y = \frac{-3}{4}x - 5$	⓰ $y = \frac{-3}{2}x$

تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

سؤال : درجات الحرارة : يمثل الجدول المجاور تغير درجات الحرارة بالزمن بالساعات جد ميل المستقيم و اشرح ما يعنية ؟

درجات الحرارة	الزمن (بالساعات)
-2	1
1	2
4	3
10	5

الحـل /

نختار اي نقطتين من الجدول $(1 - 2)$ و $(1, -2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{1 - (-2)}{2 - 1} \Rightarrow m = \frac{1 + 2}{1} \Rightarrow m = 3$$

بما ان ميل المستقيم 3 موجب اذان درجات الحرارة تزداد 3 درجات كل 1 ساعه .

سؤال : فيزياء: يمثل الجدول المجاور كمية السائل المتدفق من حوض خلال فترة زمنية جد ميل المستقيم الذي يمثلة الجدول وفسر ما يعنية ؟

كمية السائل المتسرب	
الزمن (بالثانية)	حجم السائل m^3
10	40
13	52
16	64
19	76

الحـل /

نختار اي نقطتين من الجدول $(52 - 13)$ و $(10, -40)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{52 - 40}{13 - 10} \Rightarrow m = \frac{12}{3} \Rightarrow m = 4$$

4

يتدفق الماء بمعدل $4m^3$ في الثانية الواحدة

سؤال نبات : اذا كان طول نبته 30cm في غضون شهرين تنمو بمقدار ثابت 4cm أخرى :

1. اكمل الجدول
2. ما ميل المستقيم الذي تمثلة العلاقة بين طول النبتة والزمن.
3. اكتب الدالة الخطية التي يمثلة الجدول
4. مثل الداله في المستوى الاحداثي.

الحـل /

نختار اي نقطتين من الجدول $(34-2)$ و $(0,-30)$

1.

الزمن	0	2	4
طول النبتة	30	34	38

2.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m=\frac{34-30}{2-0}\Rightarrow m=\frac{4}{2}\Rightarrow m=2$$

3. تكون الدالة الخطية من خلال الجدول $y=2x+30$ حيث المدخلات الزمن والمخرجات طول النتيجة .

4.

x	$y=2x+30$	y	(x,y)
0	$y=2(0)+30$	30	(0, 30)
2	$y=2(0)+30$	34	(2, 34)

فكـــر

سؤال تحدِّ : جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بنقطتين $(1,6),(-5,a)$ يساوي $\frac{1}{2}$:

الحـل /

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\quad m=\frac{1}{2}$, $(1,6),(-5,a)$

$\frac{1}{2}=\frac{a-6}{-5-1}\Rightarrow \frac{1}{2}\overset{\nearrow\searrow}{=}\frac{a-6}{1-6}\Rightarrow 2(a-6)=-6\Rightarrow 2a-12=-6\Rightarrow$

$2a=-6+12\Rightarrow [2a=6]\div 2\Rightarrow a=3$

سؤال تفكير ناقد/ هل يمكن تحديد ميل مستقيم بالنقطتين $(7,3)$ و $(7,-3)$ ؟

الحـل /

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\quad (7,-3),(7,3)$

$m = \frac{3-(-3)}{7-7} \Rightarrow m = \frac{6}{0} \Rightarrow m = \infty$ غير معروف

اذن لا يمكن تحديد الميل لهذا المستقيم.

سؤال / اكتشف الخطأ / ميل المستقيم يمر في النقطتين $(3,-1)$ و $(0,3)$ هو $\frac{3-0}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$

اكتشف الخطأ وصححه ؟

الحـل /

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(0,3),(3,-1)$

$m = \frac{3-(-1)}{3-0}$

$m = \frac{3+1}{3} \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

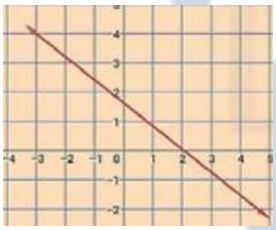
الخطأ هو في تعريف القانون حيث التغير السيني بالبسط والتغير الصادي في المقام وليس العكس.

سؤال / مسائل مفتوحة / اذكر نقطتين على مستقيم يكون ميلة يساوي ؟

الحـل /

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(1,2),(4,1)$

$m = \frac{1-2}{4-1} \Rightarrow m = \frac{-1}{3}$



سؤال / تفكير ناقد / من الشكل البياني المجاور حدد اتجاه المستقيم ؟

الحـل /

من المخطط $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, (2,0),(0,2)$

$$m = \frac{2-0}{0-2} \Rightarrow m = \frac{2}{-2} \Rightarrow m = -1$$

بما ان الميل السالب اذا المستقيم يتجه نحو الاسفل

سؤال / أكتب / بأسلوبك ماذا يعني الميل يساوي صفر والميل غير محدد الجواب ؟

الحـل /

الميل يساوي صفر : المستقيم // محور السينات / الميل غير محدد // محور الصادات

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة:

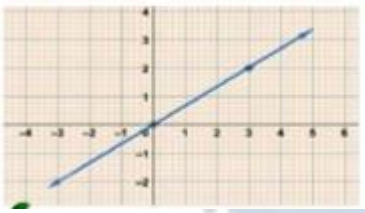
1. أي ميل يعبر عن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-1,3),(5,-2)$
a) $\frac{5}{6}$ b) $-\frac{6}{5}$
c) $\frac{-5}{6}$ √ d) $\frac{6}{5}$

2. المستقيم الموازي لمحور الصادات يكون ميله :
a) صفرا b) غير معروف √
c) سالب d) موجب

3. المقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته $3x-5y=15$ هو :
a) -5 b) 3
c) 5 d) -3 √

4. نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $x+y=6$ مع محور السينات هي :
a) $(0,6)$ b) $(-6,0)$
c) $(6,0)$ √ d) $(0,0)$

5. اي المستقيمات الاتية تعبر عن المستقيم الممثل جانبيا :



a) $2x-3y=0$ √ b) $3y+2x=0$
c) $3y-2x=0$ √ d) $2x+3y=0$

6. المستقيم الموازي لمحور السينات يكون ميله :
a) صفرا √ b) غير معروف
c) سالب d) موجب

7. ما ميل المستقيم $3x-2y=-6$:
a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$
c) 3 d) $\frac{3}{2}$ √

8. ميل المستقيم المار بالنقطتين $(5,-3),(8,-3)$:
a) صفرا √ b) غير معروف
c) سالب d) موجب

الدرس [4-3] معادلة المستقيم

هناك ثلاث حالات في كتابة معادلة المستقيم :

[4 – 3 – 1]	كتابة معادلة المستقيم بمعرفة نقطتين منة

عندما يكون في السؤال النقطتين $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ والمطلوب كتابة معادلة المستقيم نستخدم المعادلة التالية : $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ حيث $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ يمثل ميل المستقيم.

سؤال : جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين لكل مما يأتي:

1. $(-3,1),(2,-1)$

الحل /

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-1}{x-(-3)}=\frac{-1-1}{2-(-3)}$$
$$\frac{y-1}{x+3}=\frac{-2}{5}$$
$$-2(x+3)=5(y-1)$$
$$-2x-6=5y-5$$
$$2x+5y=-6+5$$

معادلة المستقيم المطلوبة $2x+5y=-1$

2. $\left(\frac{1}{2},3\right),\left(\frac{3}{2},-1\right)$

الحل /

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-3}{x-\frac{1}{2}}=\frac{-1-3}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{y-3}{x-\frac{1}{2}}=\frac{-4}{\frac{2}{2}}\Rightarrow\frac{y-3}{x-\frac{1}{2}}=\frac{-4}{1}$$

$$1(y-3)=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$y-3=-4x+4\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$y-3=-4x+2\Rightarrow 4x+y=2+3$$

معادلة المستقيم المطلوبة $4x+y=5$

3. $(0,0),(-3,7)$

الحـل /

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-0}{x-0}=\frac{7-0}{-3-0}$$
$$\frac{y_z}{x^z}=\frac{7}{-3}$$
$$7x=-3y$$

معادلة المستقيم المطلوبة $7x+3y=0$

سؤال

جد معادلة المستقيم للنقاط الاتية : واجب

❶ $(-3,2),(3,1)$	❷ $(0,2),(2,-4)$	❸ $(0,7),(-5,0)$	❹ $(3,-2),(1,5)$

[4 – 3 – 2]	كتابة معادلة مستقيم بمعرفة ميلة ونقطة منه

عندما يعطي في السؤال نقطة (x_1,y_1) وميل m نستخدم المعادلة التالية:
$y-y_1=m(x-x_1)$ وتسمى المعادلة ميل- نقطة.

سؤال اكتب معادلة المستقيم إذا علمت ان ميلة ونقطة منة:

1. $m=-6,(0,0)$

الحـل /

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-0=-6(x-0)$$
$$y=-6x$$

معادلة المستقيم المطلوبة $y+6x=0$

2. $m=\frac{-2}{5},(4,6)$

الحـل /

$$Y-y_1=m(x-x_1)$$
$$\left[y-6=\frac{-2}{5}(x-4)\right](\times 5)$$
$$5(y-6)=5\left(\frac{-2}{5}(x-4)\right)\Rightarrow 5y-30=-2(x-4)$$
$$5y-30=-2x+8$$
$$5y+2x=8+30$$

معادلة المستقيم المطلوبة $5y+2x=38$

3. $m=-3(-3,7)$

الحـل /

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-7=-3(x-(-3))$$
$$y-7=-3(x+3)$$
$$y-7=-3x-9$$
$$y+3x=7-9$$

معادلة المستقيم المطلوبة $y+3x=-2$

سؤال اكتب معادلة المستقيم اذا علمت ميلة ونقطه منه : واجب

❷ $m=\frac{1}{5},(0,-3)(2)$	❶ $m=\frac{1}{3},(-1,-3)(1)$

سؤال جد معادلة المستقيم إذا علمت ان ميلة واحد مقطعية:

1. ميله 3/2 ومقطعه الصادي 5-

الحـل / النقطة (5-) لان المقطع الصادي يساوي 5- والمقطع السيني يساوي 0 لأنه لم يعطى في السؤال

$m = \frac{3}{2}, (0, -5)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-5) = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow \left[y + 5 = \frac{3}{2}x\right] (\times 2)$

$2(y + 5) = 2\left(\frac{3}{2}x\right) \Rightarrow 2y + 10 = 3x$

معادلة المستقيم المطلوبة $2y - 3x = -10$

2. ميله $\frac{1}{2}$ ومقطعه الصادي 1-

الحـل / النقطة (-1,5) لان المقطع السيني يساوي 1- والمقطع الصادي يساوي 0 لأنه لم يعطى في السؤال

$m = \frac{1}{2}, (-1, 0)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{1}{2}(x - (-1)) \Rightarrow \left[y = \frac{1}{2}(x + 1)\right] (\times 2)$

$2(y) = 2\left(\frac{1}{2}(x + 1)\right) \Rightarrow 2y = x + 1$

معادلة المستقيم المطلوبة $2y - x = 1$

سؤال / جد معادله المستقيم اذ علمت مقطعه ونقطه منه: واجب

❷ ميله $\frac{1}{5}$ ومقطعه السيني يساوي -3	❶ ميله $\frac{-1}{5}$ ومقطعه السيني يساوي 3

سؤال / استعمل معادلة ميل المستقيم لكل مما يأتي وجد الميل والنقطة المار بها:

1. $y - 3 = -5(x - 2)$

الحـل /

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore m = -5 \quad , \quad (2, 3)$

بالمقارنة مع المعادلة الاصلية تكتب الميل والنقطة

2. $y + 7 = \frac{2}{5}x$

الحـل /

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-7) = \frac{2}{5}(x - 0)$

نرتب المعادلة حسب المعادلة الاصلية ثم نقارنه لايجاد الميل والنقطة. المتغير الغير موجود نفرضه 0

$\therefore m = \frac{2}{5}, (0, -7)$

3. $y + 1 = -x + 4$

الحـل /

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - (-1) = -1(x - (4))$
$\therefore m = -1, (4, -1)$

عندما يكون بين العددين عملية جمع انتبه فأن العدد الثاني هو اشارته سالبه

4. $\frac{3}{5}y = \frac{5}{2}(x + 2)$

الحـل /

$\left[\frac{3}{5}y = \frac{5}{2}(x + 2)\right]\left(\times \frac{5}{3}\right)$
$\frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}y\right) = \frac{5}{3}\left(\frac{5}{2}(x + 2)\right)$
$y - 0 = \frac{25}{6}(x + 2)$
$y - 0 = \frac{25}{6}(x - (-2))$
$y - y_1 = m(x - x_1)$

نضرب طرفي المعادلة في مقلوب $\frac{3}{5}$ متغير y فيكون المقلوب $\frac{5}{3}$ لكي نتخلص منه

بالمقارنة مع المعادلة الاصلية تكتب الميل والنقطة $\therefore m = \frac{25}{6}, (-2, 0)$

5. $2y - 3x = 8$

الحـل /

$[2y - 8 = 3x](\div 2)$
$y - 4 = \frac{3x}{2}$
$y - 4 = \frac{3}{2}(x - 0)$
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$m = \frac{3}{2}$, $(0, 4)$

بالمقارنة مع المعادلة الاصلية تكتب الميل والنقطة

[4 – 3 – 3]	كتابة معادلة مستقيم إذا علم ميلة ومقطعة الهادي

عندما يكون في السؤال الميل والمقطع الصادي نستخدم المعادلة $y = mx + K$ حيث K هو المقطع الصادي وتسمى المعادلة ميل - مقطع صادي .

سؤال اكتب معادلة المستقيم إذا علمت ان ميلة 6- ومقطعة الصادي 5

الحـل /

$y = mx + K$
$y = -6x + 5$
$6x + y = 5$ معادلة المستقيم المطلوبة

سؤال استعمل معادلة الميل لكل مستقيم لإيجاد ميلة ومقطعه الصادي

1. $y + x = 5$

الحـل /

نرتب المعادلة بجعل y في طرف و x والثوابت في الطرف الثاني

$$y = -1x + 5$$

بالمقارنه مع المعادله الاصليه نكتب الميل والمقطع الصادي $y = mx + K$

$$\therefore m = -1 \quad , K = 5$$

2. $5x = 7y + 8$

الحـل /

$$7y = 5x - 8$$
$$[7y = 5x - 8](\div 7)$$

نقسم على 7 معامل y

$$y = \frac{5x}{7} - \frac{8}{7}$$

بالمقارنه مع المعادله الاصليه نكتب الميل والمقطع الصادي $y = mx + K$

$$m = \frac{5}{7}, K = \frac{-8}{7}$$

3. $2x + 3y = 6$

الحـل /

$$3y = -2x + 6$$
$$[3y = -2x + 6](\div 3)$$

نقسم على 3 معامل y

$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{6}{3} \Rightarrow y = \frac{-2x}{3} + 2$$

بالمقارنه مع المعادله الاصليه نكتب الميل والمقطع الصادي $y = mx + K$

$$m = \frac{-2}{3}, K = 2$$

عند المقارنه.. المتغير الغير موجود نعوض عنه ب 0

4. $y = 0$

الحـل /

$y = 0x + 0$

بالمقارنه مع المعادله الاصليه نكتب الميل والمقطع الصادي $y = mx + K$

$m = 0, K = 0$

5. $\frac{1}{3}y = -5x - 1$

الحـل /

$|\frac{1}{3}y = -5x - 1](\times 3)$

$y = -15x - 3$

بالمقارنه مع المعادله الاصليه نكتب الميل والمقطع الصادي $y = mx + K$

$m = -15, K = -3$

6. $y = x$

الحـل /

$y = 1x + 0$

بالمقارنه مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والمقطع الصادي $y = mx + K$

$m = 1, k = 0$

7. $y = 1$

الحـل /

$y = 0x + 1$ عند المقارنه .. المتغير الغير موجود نعوض عنه ب 0

$y = mx + K$

$m = 0, k = 1$

سؤال : استعمل معادله ميل لكل مستقيم لايجاد ميله ومقطعه الصادي: واجب

❶ $5y = -2x - 1$	❷ $-y = 7x$	❸ $y + 7 = 3x + 5$	❹ $2x - 4y = 8$

سؤال : مستقيم يمر في النقطة (-1 , 5) وميله $\frac{-2}{5}$ جد مقطعة الصادي ومعادلته ؟

الحـل / نجد معادلة المستقيم بواسطة المعادلة ميل- نقطة

$m = \frac{-2}{5}, (5, -1)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-1) = \frac{-2}{5}(x - 5)$

$y + 1 = \frac{-2}{5}x + \frac{2}{5}(5)$

$$y+1=\frac{-2}{5}x+2$$

معادلة المستقيم المطلوبة $y=\frac{-2}{5}x+2-1$

بالمقارنه مع معادله ميل- مقطع صادي نكتب المقطع الصادي

$$y=\frac{-2}{5}x+1$$
$$y=mx+K$$
$$\therefore K=1$$

سؤال: مستقيم يمر بالنقطة $(1,-4)$ وميلة $\frac{-1}{2}$ جد معادلتة ومقطعة الصادي ؟

الحـل / نجد معادلة المستقيم بواسطة المعادلة ميل- نقطة

$$m=\frac{-1}{2},(1,-4)$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-4)=\frac{-1}{2}(x-1)$$
$$y+4=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}-4$$
$$\frac{1}{2}-\frac{4}{1}=\frac{1-8}{2}=\frac{-7}{2}$$

معادلة المستقيم المطلوبة $y=\frac{-1}{2}x-\frac{7}{2}$

بالمقارنه مع معادله ميل- مقطع صادي نكتب المقطع الصادي

$$y=\frac{-1}{2}x-\frac{7}{2}$$
$$y=mx+K$$
$$\therefore K=\frac{-7}{2}$$

سؤال: مستقيم يمر بالنقطة $(0,3)$ الذي ميله $\frac{-2}{3}$ جد معادلته ومقطعه الصادي؟ واجب

تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

سؤال **دراجات هوائية** : يقطع راكب دراجة هوائية 20 كيلو متر في ساعتين ويقطع 50 كيلو ميتر في خمس ساعات، ما المعادلة الخطية التي نربط بين المسافة والزمن ؟

الحـل /

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-20}{x-2}=\frac{50-20}{5-2}\Rightarrow\frac{y-20}{x-2}=\frac{30}{3}$$

$$\frac{y-20}{x-2}=\frac{10}{1}\Rightarrow y-20=10(x-2)\Longrightarrow y-20=10x-20$$

$$y-10x=20-20\Rightarrow \mathbf{y-10x=0}$$

سؤال **صحة** : في دراسة حديثة توصلت الى ان الشخص يفقد 2 ساعة من عمره عند استهلاكه علبة سكائر واحدة اكتب المعادلة التي تمثل ذلك , ومثلها بيانيا ؟

الحـل /

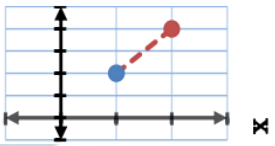
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-2}{x-1}=\frac{4-2}{2-1}\Rightarrow\frac{y-2}{x-1}=\frac{2}{1}\Rightarrow y-2=2(x-1)$$

$$y-2=2x-2\Rightarrow y=2x+2-2$$

$$\mathbf{y=2x}$$

3	2	1	السكائر
6	4	2	الوقت



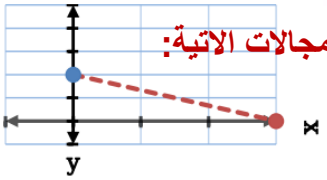
سؤال **هندسة**: يريد شخص تسديد مبلغ قدره 30 مليون , بدفعات شهرية متساوية مقدارها 1. 5 مليون المعادلة الخطية الاتية $y=-1.5x+30$ حيث y القيمة الباقية من المبلغ x , عدد الاشهر استعمل معادلة الميل - المقطع لتحديد ميلة ومقطعة؟

الحـل /

بالمقارنة

$$y=-1.5x+30$$
$$y=mx+k$$
$$\therefore m=-1.5, K=30$$

سؤال



استعمل المعلومات في الشكل المجاور وجد معادلة المستقيم في المجالات الاتية:

① نقطتان ② ميل ونقطة ③ ميل ومقطعة الصادي ؟

الحـل /

① نجد معادلة المستقيم من نقطتان

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{x-3}=\frac{2-0}{0-3}\Rightarrow\frac{y}{x-3}=\frac{2}{-3}$$

$$2(x-3)=-3y\Rightarrow 2x-6=-3y$$

$$2x+3y=6$$

② نجد الميل باستخدام القانون

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{2-0}{0-3}\Rightarrow m=\frac{2}{-3}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{2}{-3}(x-3)$$

$$y=\frac{-2}{3}x+2\Rightarrow\left[y+\frac{2}{3}x=2\right](\times 3)$$

$$3y+2x=6$$

③ نجد الميل باستخدام القانون

من خلال الرسم يكون

مقطعه الصادي $K=2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2-0}{0-3} \Rightarrow m = \frac{2}{-3}$$

$$y = mx + k$$

$$y = \frac{-2}{3}x + 2$$

$$\left[y = \frac{-2}{3}x + 2\right](\times 3)$$

$$3y = -2x + 6$$

$$3y + 2x = 6$$

سؤال : ينمو ناب الفيل طول حياته بمعدل $1cm$ لكل شهر .افرض انك بدات بمراقبة فيل عندما كان طول نابه $100cm$, اكتب على صوره ميل – النقطة معادلة تمثل نمو ناب الفيل بعد n شهر من المراقبة. ؟

الحـل / نكون الجدول التالي :

الزمن\شهر	0	1	2	..	n
نمو الناب	100	101	102	..	$100 + n$

والمطلوب هو المعادلة بعد n من المراقبه
اذا سوف نستخدم النقطتين $(0, 100), (1, 101)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{101 - 100}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

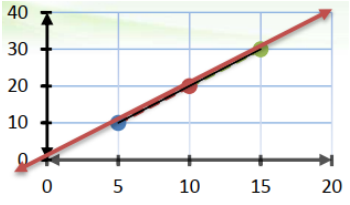
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 100 = 1(x - 0)$$

$$y - 100 = x \Rightarrow y = x + 100$$

$$y = n + 100$$

سؤال : فيزياء : التمثيل البياني المجاور يبين كمية المياه المتسربة من خلال مده زمنية محدده. اكتب على صورة نقطتين معادلة تمثل تسرب المياه بعد من الزمن ؟



الحـل /

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-10}{x-5}=\frac{20-10}{10-5}\Rightarrow\frac{y-10}{x-5}=\frac{10}{5}\Rightarrow\frac{y-10}{x-5}=\frac{2}{1}$$
$$y-10=2(x-5)\Rightarrow y-10=2x-10$$
$$y=2x-10+10\Rightarrow y=2x$$

تدرب و حل التمرينـــات

سؤال هل يوجد مستقيم ميله 4 ويمر بالنقطتين $(8,-2),(5,7)$ ان وجد فاكتب معادلته والا علل اجابتك ؟

الحـل / نعوض النقطتين $(8,-2),(5,7)$ في القانون الاتي لا يجاد الميل

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$m=\frac{-2-7}{8-5}$$
$$m=\frac{-9}{3}\Rightarrow m=-3$$

لا يوجد مستقيم ميله 4 يمر بالنقطتين السابقتين لان المستقيم المار بالنقطتين ميله هو 3

سؤال مستقيم تقاطعه الافقي النضير الجمعي لتقاطعه العمودي ويمر في النقطه $(2,3)$ اكتب معادله الميل ـ النقطه لهذا المستقيم ؟

الحـل / نفترض ان تقاطعه العمودي في a فتصبح النقطه $(a,0)$
بما ان التقاطع الافقي هو نظير العمودي فيكون $-a$ وتصبح النقطه$(0,-a)$ نجد الميل من النقطتين السابقتين

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m=\frac{-a-0}{0-a}\Rightarrow m=\frac{-a}{-a}\Rightarrow m=1$$
$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-3=1(x-2)$$
$$y-3=x-2\Rightarrow y=x-2+3\Rightarrow y=x+1$$

نكتب معادله ميل-نقطه ثم نعوض الميل والنقطه $(2,3)$ لكي نجد المعادله .

سؤال معادله مستقيم ميله $\frac{3}{5}$ ويمر بالنقطه $(-1,7)$

كتب احمد المعادلـه بشكل $y-7=\frac{5}{3}(x+1)$ وكتب محمد المعادلـه بشكل $y-7=\frac{3}{5}(x+1)$ ايهما اجابتـه صحيحة ؟

الحـل /

نعوض النقطه $(-1,7)$ والميل $m=\frac{3}{5}$ في القانون الاتي :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 7 = \frac{3}{5}(x - (-1))$$
$$y - 7 = \frac{3}{e}(x + 1)$$

اذن اجابة محمد هي الصحيحة.

سؤال / مساله من واقع الحياه يمكن تمثيلها بمعادله الخط المستقيم ؟

الحـل /

يصرف احد طلاب الثالث متوسط في اليوم الواحد 5 الاف دينار اكتب معادله ميل-نقطه لما يصرفه لـ n من الأيام.

مراجعة الفصـل

- حالات كتابة معادلة المستقيم

الحالات	المعطيات في السؤال	قانون المعادلة
❶ نقطتان	$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
❷ميل ــ نقطة	$A(x_1, y_1), m$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
❸متل ــ مقطعة الصادي	K, m	$y = mx + k$

- حالات ايجاد ميل المستقيم

معطيات السؤال	القانون
❶ نقطتان $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
❷ معادلة المستقيم ومقطعه الصادي	نجد الميل بالمقارنة مع $y = mx + k$
❸ نقطة ومعادلة المستقيم	نجد الميل بالمقارنة مع $y - y_1 = m(x - x_1)$

ملاحظة / في موضوع سابق من الجزء الاول / الفصل الاول / التطبيقات / هو كيفية كتابة قاعدة الاقتران عندما يعطي الازواج المرتبة يمكن ان نستفاد من معادلة المستقيم $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ في كتابة قاعدة الاقتران باختيار أي زوجين مرتبين.

اختيار من متعدد

سؤال / اختر الإجابة الصحيحة:

1. معادله المستقيم المار بالنقطتين $(-1,-7),(-2,-3)$ هي :

a) $y-4x=-11$ b) $y-4x=11$
c) $4y+x=-11$ d) $y+4x=-11$ √

2. المستقيم الذي معادلته $y+x=0$ ميله واحدى نقاطه هما :

a) $m=-1,(4,4)$ b) $m=1,(4,4)$
c) $m=-1,(4,-4)$ √ d) $m=1,(-4,-4)$

3. استعمال معادله المستقيم $y=mx+k$ وجد قيمه k,m للمستقيم $7y-3x=21$:

a) $m=\frac{3}{7},k=-3$ b) $m=\frac{7}{3},k=3$
c) $m=\frac{3}{7},k=-3$ d) $m=\frac{3}{7},k=3$ √

4. أي النقاط التاليه تقع على المستقيم الذي معادلته $y+4x=0$:

a) $(1,4)$ b) $(4,-1)$
c) $y+x-2=0$ d) $(1,-4)$ √

5. معادله المستقيم الذي ميله (-1) ومقطعه الصادي يساوي (-2) هو:

a) $y+x-2=0$ b) $y+x+2=0$ √
c) $y+x-2=0$ d) $y-x-2=0$

6. ما هي على صورة الميل-التقاطع معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(1,6),(-1,-2)$:

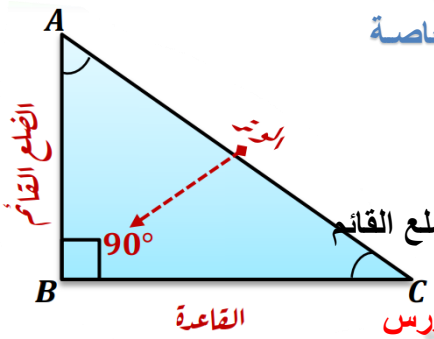
a) $y=-3x+6$ b) $y=4x-2$
c) $y=4x+2$ √ d) $y=2x+4$

7. ثمن وجبة طعام في احد المطاعم 25 الف دينار مضاف اليها 3 الاف دينار لكل نوع إضافي من المقبلات أي المعادلات تمثيل ثمن وجبة طعام مع (x) من المقبلات :

a) $y=25x+3$ b) $y=25x-3$
c) $y=3x+25$ √ d) $y=3x-25$

الدرس [4-6] النسب المثلثية

دراستنا في هذه الدرس على المثلث القائم الزاوية. سنتعرف على بعض المفاهيم الخاصة به



فيه الزاويه $B<)$ قائمه وقياسها $90°$ الزاويتان زاويتان حداتان مجموعهما $90°$

فية الضلع $\overline{AC}$ يمثل الوتر حيث هو دائما يقابل الزاويه القائمه والضلع $\overline{AB}$ يمثل الضلع القائم

والضلع $\overline{BC}$ يمثل القاعده// و هناك علاقه تربط بين اضلاع المثلث وهي علاقة فيثاغورس

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ تستخدم لايجاد احد الاضلاع المجهوله في المثلث القائم الزوايا

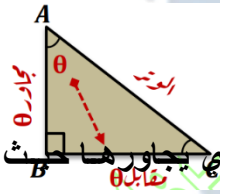
ملاحظة / المفاهيم اعلى والعلاقات خاصه فقط في المثلث قائم الزاويه و لا يمكن ان تطبق على اي مثلث غير قائم الزاويه اولاً النسب المثلثية.

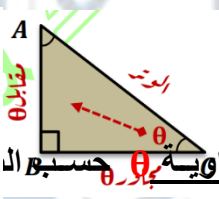
[4 – 6 – 1] النسبه المثلثية

النسبه المثلثية: هي النسبة التي تقارن بين طول ضلعين من اضلاع المثلث القائم الزاوية.

هناك ثلاث نسب مثلثيه اساسيه في المثلث القائم الزاويه $sin\ \theta$ و $cos\ \theta$ و $tan\ \theta$ والذي تعتمد على الزوايا الحاده θ ما علاقتها بالاضلاع

هناك موقعين للزاويه الحاده في الاعلى والاسفل

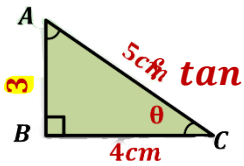




يتم تعيين مقابل الزاوية θ حسب الضلع الذي يقابلها ومجاور الزاوية θ حسب الضلع الذي يجاورها حيث الوتر ثابت في كلا الحالتين موقع الزاوية .

1. جيب θ ويرمز له بالرمز $sin\ \theta$ يقرا (ساين الثيتا) وهو النسبه بين الضلع المقابل للزاويه والوتر ويعطي بالعلاقه $\sin\theta = \frac{\text{مقابل}\theta}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$
2. جيب تمام θ و نرمز له $cos\ \theta$ يقرا (كوساين الثيتا) و هو النسبه بين الضلع والوتر ويعط بالعلاقة $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}\theta}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$
3. ظل θ ويرمز له بالرمز $\tan\theta$ ويقرا (تان الثيتا) وهو النسبه بين الضلع المقابل للزاويه والضلع المجاور ويعط بالعلاقة $\tan\theta = \frac{\text{مقابل}\theta}{\text{مجاور}\theta} = \frac{3}{5}$

سؤال من الشكل المجاور. جد قيم النسب المثلثية الثلاثة $sin\ \theta$ و $cos\ \theta$ و $tan\ \theta$



الحل / نستعمل نظرية فيثاغورس لا يجاد الضلع المجهول $\overline{AB}$

نعوض اطوال الاضلاع المعلومة من المثلث

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

$(5)^2 = (4)^2 + (AB)^2$

$25 = 16 + (AB)^2$

$25 - 16 = (AB)^2 \Rightarrow 9 = (AB)^2$

بجذر الطرفين التربيعي $\sqrt{9} = \sqrt{(AB)^2}$

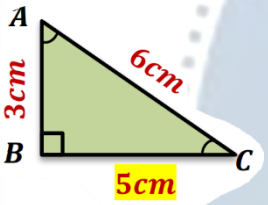
نعوض قيمة الضلع في المثلث $AB = 3$

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}\theta}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}\theta}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}\theta}{\text{مجاور}\theta} = \frac{3}{5}$$

سؤال في المثلث ABC القائم الزاوية في B فية $AB = 3cm$ و $AC = 6cm$ جد $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan C$ ؟



الحل /

نرسم المثلث ثم نحدد الحرف B على الزاوية القائمة وبعد ذلك نحدد الزوايا $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ ثم نحدد اطوال الاضلاع المعطاة في السؤال

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ $\quad (6)^2 = (BC)^2 + (3)^2$

$36 = (BC)^2 + 9$

$36 - 9 = (BC)^2$

$25 = (BC)^2$

$BC = 5$

$$\sin A = \frac{\text{مقابل}A}{\text{الوتر}} = \frac{5}{6}$$

$$\cos A = \frac{\text{مجاور}A}{\text{الوتر}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

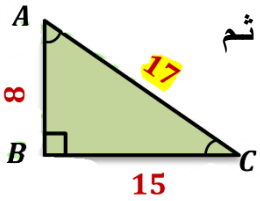
$$\tan C = \frac{\text{مقابل}c}{\text{مجاور}c} = \frac{5}{3}$$

سؤال في المثلث ABC القائم الزاوية في B فيه $AB = 8cm$ و $BC = 15cm$ جد $\tan A, \cos C, \sin C$ ؟ واجب

سؤال في المثلث ABC القائم الزاوية في B اذ كان $\tan A = \frac{15}{8}$ جد $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan C$ ؟

الحـل /

نرسم المثلث ثم نحدد الحرف B على الزاوية القائمة من خلال المعطيات $\tan A = \frac{15}{8} = \frac{\text{مقابل A}}{\text{مجاور A}}$ ثم نحدد مقابل ومجاور A .



$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$

$$(AC)^2 = (15)^2 + (8)^2$$

$$(AC)^2 = 225 + 64$$

$$(AC)^2 = 289$$

$$AC = 17$$

$$\sin A = \frac{\text{مقابل A}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$$

$$\cos A = \frac{\text{مجاور A}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$$

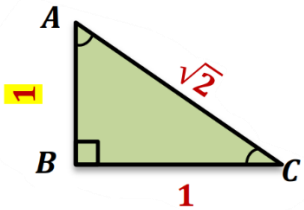
$$\tan C = \frac{\text{مقابل c}}{\text{مجاور c}} = \frac{8}{15}$$

سؤال / في المثلث ABC القائم الزاوية في B اذ كان $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ جد $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan C$ ؟ واجب

سؤال / في المثلث ABC القائم الزاوية في B اذ كان $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ جد $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan C$ ؟

الحـل /

نرسم المثلث ثم نحدد الحرف B على الزاوية القائمة من خلال المعطيات $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{مقابل A}}{\text{مجاور A}}$ ثم نحدد مقابل A والوتر.



$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$

$$(\sqrt{2})^2 = (1)^2 + (AB)^2$$

$$2 = 1 + (AB)^2$$

$$2 - 1 = (AB)^2$$

$$(AB)^2 = 1$$

$$AB = 1$$

$$\sin A = \frac{\text{مقابل A}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos C = \frac{\text{مجاور C}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

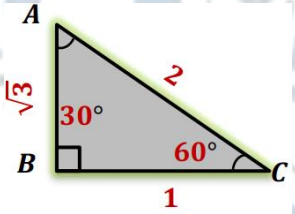
$$\tan A = \frac{\text{مقابل A}}{\text{مجاور A}} = \frac{1}{1} = 1$$

[2 – 6 – 4] النسبة المثلثية للزوايا الخاصة

النسبة المثلثية للزوايا الخاصة: الزوايا الخاصة في هذه المرحلة هي $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$

والجدول المجاور يبين قيم النسب المثلثية لهذه الزوايا. **حفظ**

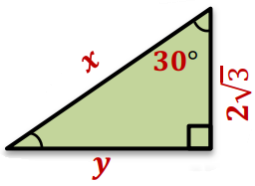
ويمكن حفظ الزاويتين $30°$ و $60°$ المتعاكستين من خلال المثلث ادناه



الزوايا / النسب	$30°$	$60°$	$45°$	$90°$	$0°$
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1
$\tan$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1	غير معرف	0

ملاحظة / عندما يكون في المثلث ضلعين مجهولات وزاوية خاصة معلومة لا يمكن ان نستخدم نظرية فيثاغورس بل نستخدم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

سؤال / من الشكل المجاور جد قيمة x, y ؟



الحل /

في البداية نحدد القيمة المجهولة الذي نريد ان نجدها نجد x أولا : تسئل نفسك ما هي علاقة x بالنسبة للزاوية $30°$؟

نعم هي الوتر للزاوية

ثم تسئل نفسك ؟ ما هي علاقة الضلع المعلوم $2\sqrt{3}$ بالنسبة للزاوية نعم مجاور ماهي النسبة المثلثية التي تربط الوتر المجاور هي $\cos 30°$. وبنفس الطريقة للقيمة الذي تكون نسبيتها $\tan 30°$.

$$\cos 30° = \frac{\text{مجاور } 30°}{\text{الوتر}} = \frac{2\sqrt{3}}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{x}$$

$$\sqrt{3}x = 2(2\sqrt{3})$$

$$\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

$$x = 2(2)$$

$$x = 4$$

$$\tan 30° = \frac{\text{مقابل } 30°}{\text{مجاور } 30°} = \frac{y}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$$

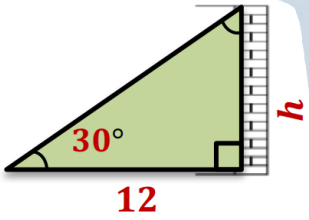
$$\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$y = 2$$

سؤال : وقف رجل امام بناية على بعد $12m$ من قاعدتة ونظر الى قمة البناية بزاوية مقدارها $30°$ جد ارتفاع البناية؟

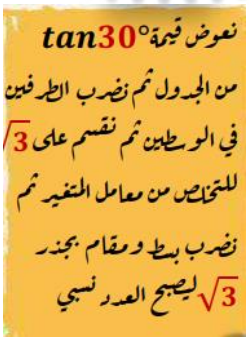
الحل /

نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات من فرض ارتفاع العمارة اي رمز وليكن h الذي يمثل المقابل بالنسبة الزاوية المجاور الذي يمثل $12m$ فتكون النسبة الذي تربط بين المقابل



والمجاور هي $\tan 30° = \frac{\text{مقابل } 30°}{\text{مجاور } 30°}$

$$\tan 30° = \frac{\text{مقابل } 30°}{\text{مجاور } 30°} = \frac{h}{12}$$



$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h}{12}\Rightarrow \sqrt{3}h=12$$

$$\frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$h=\frac{12}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow h=\frac{12^{4}\sqrt{3}}{3}$$

ارتفاع البناية $h=4\sqrt{3}$

سؤال / طائرة ورقية ارتفاعها $3\sqrt{3}m$ عن سطح الارض اذا كان الخيط المتصل بها يصنع زاوية مقدارها 60° مع الارض جد طول الخيط ؟

الحـل /

نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات من فرض طول الخيط اي رمز وليكن L الذي يمثل الوتر بالنسبة للزاوية والمقابل الذي يمثل $3\sqrt{3}m$ فتكون النسبة الذي تربط بين المقابل هي $\sin 60^\circ=\frac{\text{مقابل }60^\circ}{\text{الوتر}}$

$$\sin 60^\circ=\frac{\text{مقابل }60^\circ}{\text{الوتر}}=\frac{3\sqrt{3}m}{L}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{L}\Rightarrow \sqrt{3}L=2(3\sqrt{3})$$

$$\frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{3}}=\frac{2(3\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

طول الخيط $L=2(3)\Rightarrow L=6$

سؤال / اذا كان شخص ينظر الى قمه عمارة امامه ارتفاعها $6\sqrt{3}m$ بزاويه 60° مع الارض جد بعد الشخص عن قاعدة العمارة ؟ واجب $ANS=6$

[3 – 6 – 4] علاقات النسب المثلثية

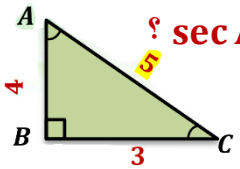
علاقات النسب المثلثية : سنقتصر في هذا البند على مقلوب النسب المثلثية الاساسية .

سوف نتعرف على مقلوب كل نسبه مثلثية لتكون لنا علاقات جديدة

1. مقلوب $\sin\theta$ هو $\csc\theta$ ويقرا (كوسيكن الثيتا) ويعطى بالعلاقة الاتية $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}\theta}$
2. مقلوب $\cos\theta$ هو $\sec\theta$ ويقرا (سيكن الثيتا) ويعطى بالعلاقة الاتية $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}\theta}$
3. مقلوب $\tan\theta$ هو $\cot\theta$ ويقرا (كوتان الثيتا) ويعطى بالعلاقة الاتية $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\text{المجاور}\theta}{\text{المقابل}\theta}$

علاقات النسب المثلثية $\cot\theta,\sec\theta,\csc\theta$ تأخذ مقلوب قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة أي مقلوب الجدول الذي تعرفنا علية سابقا

سؤال : من الشكل المجاور جد قيم النسب المثلثية $\sin A$ و $\cos C$ و $\cot C$ و $\sec A$ ؟



الحل /

نستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد الضلع المجهول $\overline{AC}$

$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$

$$(AC)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$(AC)^2 = 9 + 16$$

$$(AC)^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

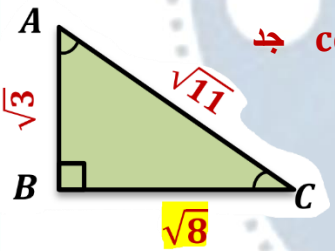
$$\sin A = \frac{\text{مقابل A}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos C = \frac{\text{مجاور C}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Cot } C = \frac{\text{المجاور C}}{\text{المقابل C}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Sec } A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور A}} = \frac{5}{4}$$

سؤال : المثلث ABC قائم الزوايا في B إذا كان $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ جد $\csc A$ و $\cot C$ و $\sec A$



الحل /

نرسم المثلث ثم نحدد الحرف B على الزاوية القائمة من خلال المعطيات $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ $\text{Cot } A = \frac{\text{مجاور A}}{\text{مقابل A}}$ نحدد مجاور A والوتر

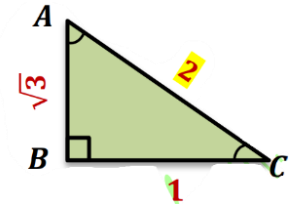
$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$
$$(\sqrt{11})^2 = (BC)^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$11 = (BC)^2 + 3$$
$$11 - 3 = (BC)^2$$
$$8 = (BC)^2$$
$$BC = \sqrt{8}$$

$$\csc A = \frac{\text{الوتر}}{\text{مقابل A}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{8}}$$

$$\text{Cot } A = \frac{\text{مجاور A}}{\text{مقابل A}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

$$\text{Sec}\, A = \frac{\text{الوتر}}{\text{مجاور A}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$

سؤال / المثلث ABC قائم الزوايا في B إذا كان $\cos A = \sqrt{3}$ جد $\csc A$ و $\sec A$ و $\sin A$ و $\tan A$ ؟



الحل /

نرسم المثلث ثم نحدد الحرف B على الزاوية القائمة من خلال المعطيات $\text{Cot}\, A = \frac{\sqrt{3}}{1} =$

$\frac{\text{مجاور A}}{\text{مقابل A}}$ نحدد المجاور والمقابل A

$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$
$$(AC)^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$(AC)^2 = 1 + 3$$
$$(AC)^2 = 4$$
$$AC = 2$$

$$\csc A = \frac{\text{الوتر}}{\text{مقابل A}} = \frac{2}{1}$$

$$\sec A = \frac{\text{الوتر}}{\text{مجاور A}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

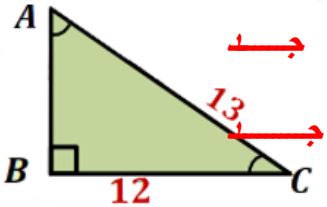
$$\cos A = \frac{\text{مجاور A}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A = \frac{\text{مقابل A}}{\text{مجاور}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan A = \frac{\text{مقابل A}}{\text{مجاور}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

واجبات

1. من الشكل المجاور جد النسب المثلثية $\cot C, \sec C, \cot A, \csc A$



2. في المثلث ABC القائم الزاوية في B اذ كان $\sec A = \sqrt{2}$ جد $\cot C, \csc A, \cos C, \sin A$
3. المثلث ABC القائم الزاوية في B اذ كان $\tan C = 1$ جد $\cot C, \csc C, \cos A, \sin C$
4. المثلث ABC القائم الزاوية في B اذ كان $\sin A = \frac{1}{2}$ جد $\cot C, \tan A, \cos A, \sec A$

ملاحظة / عندما يكون السؤال هو جد القيمة فالمقصود هو تعويض قيم النسب المثلثية من خلال الجدول الخاص الزوايا.

سؤال / جد القيمة العددية للمقادير التالية :

1. $(\sin 45°)(\sec 45°) - (\tan 60°)(\cot 30°) + 2\csc 90°$

الحـل /

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) - (\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) + 2(1)$
$= 1 - 3 + 2 \Rightarrow 3 - 3 = 0$

$\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{2}}{1}$
$\csc 90° = \frac{1}{\sin 90°} = \frac{1}{1}$
$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

2. $(\tan 60°)^2 + (\cot 45°)^2 + (\sec 30°)^2 + (\sin 45°)^2$

الحـل /

$= (\sqrt{3})^2 + (1)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
$= 3 + 1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{1} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$
$= \frac{24+8+3}{6} = \frac{35}{6}$
$\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = \frac{1}{1} = 1$
$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

سؤال / جد القيمة العددية للمقدار التالي $(tan\,45°)(sin\,60°)(sin\,30°)^2$ ؟ واجب

$ANS = \frac{2\sqrt{3}+1}{4}$

ملاحظة / عندما يكون السؤال هو اثبت ان فالمقصود هو اثبات الطرف الاول يساوي الطرف الثاني من خلال تعويض قيم النسب المثلثية من الجدول الخاص.

سؤال: اثبت ان:

1. $(\cos 60°)^2 - (\sin 60°)^2 = -\frac{1}{2}$

الحل /

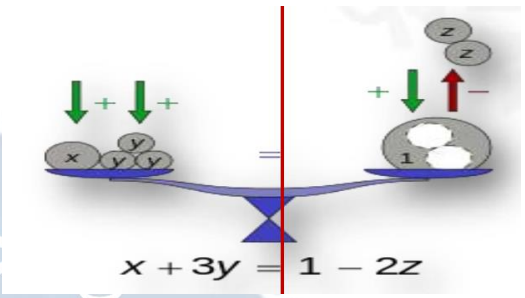
$ط_1 = (\cos 60°)^2 - (\sin 60°)^2$

$ط_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$ط_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \Rightarrow b_1 = \frac{1-3}{4}$

$ط_1 = \frac{-2^{-1}}{4^2} \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2}$

$ط_1 = -\frac{1}{2}$



وهو المطلوب $ط_1 = ط_2$

2. $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = \sin 90°$

الحل /

$ط_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$ط_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow b_1 = \frac{3+1}{4}$

$ط_1 = \frac{4}{4} \Rightarrow b_1 = 1$

$ط_1 = \sin 90° = 1$

وهو المطلوب $ط_1 = ط_2$

3. $(\cos 45° - \csc 45°)(\tan 45°)(\csc 90°) = -\cos 45°$

الحل /

$ط_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1}\right)(1)(1)$

$ط_1 = \left(\frac{1-\sqrt{2}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$

$ط_1 = \frac{1-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow ط_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$ط_1 = -\cos 45°$

$ط_1 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow ط_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

وهو المطلوب $ط_1 = ط_2$

4. $\frac{\cot 45° + \sin 90°}{2\sec 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل /

$ط_1 = \frac{1+1}{2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow b_1 = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{3}}}$

$ط_1 = \frac{2}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{4^2}$

$ط_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ط_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وهو المطلوب $ط_1 = ط_2$

5. $\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$

الحـل /

$ط_1 = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} \Rightarrow ط_1 = \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}}{2}}$

$ط_1 = \sqrt{\frac{\frac{2-1}{2}}{2}} \Rightarrow ط_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} \Rightarrow ط_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$

$ط_1 = \sqrt{\frac{1}{4}} \xrightarrow{\text{بالجذر التربيعي}} ط_1 = \frac{1}{2}$

$ط_1 = \sin 30^\circ = 1$

وهو المطلوب $ط_1 = ط_2$

6. $(\cos 30^\circ - \csc 45^\circ)(\sin 60^\circ + \sec 45^\circ) = -\frac{5}{4}$

الحـل /

$ط_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{1}\right)$

$ط_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2$

$ط_1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{1}$

$ط_1 = \frac{3-8}{4}$

$ط_1 = \frac{-5}{4}$

$ط_1 = -\frac{5}{4}$

وهو المطلوب $ط_1 = ط_2$

واجبات

سؤال / اثبت ان :

❶ $2\sin 30^\circ \sec 30^\circ = \csc 60^\circ$

❷ $(\csc 30^\circ)^2 + (\cot 30^\circ)^2 = 7$

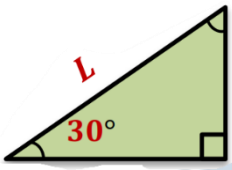
❸ $2\sin 45^\circ \cos 45^\circ = \sin 90^\circ$

❹ $\cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}$

❺ $\sin 45^\circ \sec 45^\circ + \csc 45^\circ \sin 45 = 2$

تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

سؤال / **رياضة**: عمل جهاز رياضي مائل لتمرين السير بزاوية قدرها 30° فاذا كان طرف الجهاز يرتفع $1.5m$ هل سطح الارض فما طول حزام الجهاز ؟



الحـل /

نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات ونفر طول الحزام اي رمز وليكن L الذي يمثل الوتر بالنسبة للزوايا والمقابل الذي يمثل $1.5m$ فتكون النسبة التي تربط بين الوتر والمقابل هي $\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل } 30^\circ}{\text{الوتر}}$

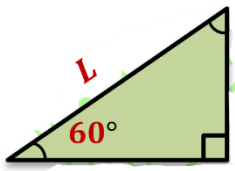
$$\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل } 30^\circ}{\text{الوتر}} = \frac{1.5m}{L}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{L}$$

$$L = 2(1.5)$$

$L = 3m$ طول حزام الجهاز

سؤال / **تزلج على الجليد**: في موقع للتزلج على أحد التلال كان ارتفاع التلة الرئيسية $500m$ وزاويه ميلها عن مستوى الارض 60° ما طول سطح التزلج ؟



الحـل /

نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات ونفر طول الحزام اي رمز وليكن L الذي يمثل الوتر بالنسبة للزوايا والمقابل الذي يمثل $500m$ فتكون النسبة التي تربط بين الوتر والمقابل هي $\sin 60^\circ = \frac{\text{مقابل } 60^\circ}{\text{الوتر}}$

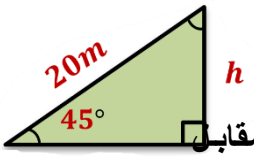
$$\sin 60^\circ = \frac{\text{مقابل } 60^\circ}{\text{الوتر}} = \frac{500}{L}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{500}{L} \Rightarrow \sqrt{3}L = 2(500)$$

$$\sqrt{3}L = 1000 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{3}} = \frac{1000}{\sqrt{3}}$$

طول سطح التزلج $L = \frac{1000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow L = \frac{1000\sqrt{3}}{3} m$

سؤال / **سلم اطفاء الحرائق:** سلم اطفاء طوله $20m$ يرتكز احد طرفيه على بنايه والاخر على ارض افقيه بزاويه $45°$ جد ارتفاع نقطه ارتكاز طرف السلم على البناية (ارتفاع البناية)؟



الحل /

نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات ونفر ارتفاع البنايـة اي رمـز ولـيكن h الـذي يمثـل المقابـل بالنسبة للزوايا والوتر الذي يمثل $20m$ طول السلم فتكون النسبة التي تربط بين الوتر والمقابل هي

$$\sin 45° = \frac{\text{مقابل } 45°}{\text{الوتر}}$$

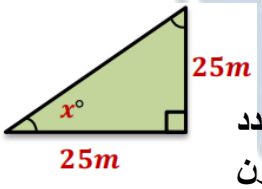
$$\sin 45° = \frac{\text{مقابل } 45°}{\text{الوتر}} = \frac{h}{20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{20} \Rightarrow \sqrt{2}h = 20$$

$$h = \frac{20}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{(2)(10)}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{(\sqrt{2}\times\sqrt{2})(10)}{\sqrt{2}}$$

$h = 10\sqrt{2}m$ ارتفاع البناية

سؤال / **حديقة:** وقفت بنان على بعد $25m$ من قاعده الشجر ارتفاعها $25m$ فما قياس الزاويه التي تشكلها مع قمة الشجرة ؟



الحل /

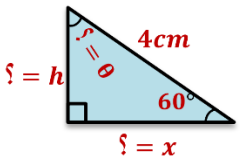
نرسم مثلث قائم الزوايا ونحدد عليه المعطيات ونفر طول الحزام اي رمز ولـيكن X ثم نحدد المقابـل $25m$ الـذي يمثـل طـول الشـجرة والمجـاور $25m$ الـذي يمثـل بعـد الشـجرة فتكـون النسبة التي تربط بين الوتر والمقابل هي $\sin X° = \frac{\text{مقابل } X°}{\text{الوتر}}$

$$\sin X° = \frac{\text{مقابل } X°}{\text{الوتر}} = \frac{25}{25}$$

$$\tan x° = \frac{25}{25}$$
$$\tan x° = 1$$
$$\therefore x° = 45°$$

فكـــر

سؤال : تحدِ: من الشكل المجاور جد القيام المؤشرة باستعمال النسب المثلثية؟



الحـل /

- نجد مقابل الزاوية $60°$ لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ فتكون النسبة المثلثية

$$\sin 60° = \frac{\text{مقابل } 60°}{\text{الوتر}} = \frac{h}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow [2h = 4\sqrt{3}] \div 2$$

$$h = 2\sqrt{3}$$

- نجد مجاور الزاوية $60°$ لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ فتكون النسبة المثلثية

$$\cos 60° = \frac{\text{مجاور } 60°}{\text{الوتر}} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow [2x = 4] \div 2$$

$$x = 2$$

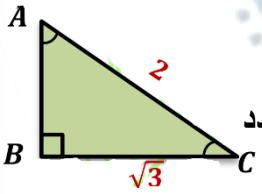
- نجد الزاوية θ لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ والمقابل وجدناه 2 فتكون النسبة المثلثية

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل } \theta}{\text{الوتر}} = \frac{2}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{4} \xrightarrow{\text{نختصر}} \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 30°$$

سؤال : مسائل مفتوحة: مثلث ABC قائم الزاوية في B اذا كان $sin\ A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ كيف تجد قيمه الزاوية C ؟



الحـل /

نرسم المثلث ثم نحدد الحرف B على الزاوية القائمة من خلال المعطيات $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{مقابل } A}{\text{الوتر}}$ نحدد مقابل A والوتر.

الطريقة الاولى : من خلال المعطيات المثلث المجاور C يساوي $\sqrt{3}$ والوتر يساوي 2 فتكون النسبة:

$$\cos C = \frac{\text{مجاور } C}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore C = 30°$$

الطريقة الثانية : من خلال المعطيات $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ من الجدول الخاص يكون قياس الزاوية $A = 60°$ ومن خلال مجموع زوايا المثلث تساوي:

$180^\circ = A + B + C \setminus 180^\circ$
$180^\circ = 60^\circ + 90^\circ + C \Rightarrow 180^\circ = 150^\circ + C$
$C = 180^\circ - 150^\circ \Rightarrow C = 30^\circ$

سؤال: **تبرير**: اذا كانت جيب زاويه وجيب تمام الزاوية متساوين في مثلث قائم الزاوية ما نوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه؟

الحـل /

هذا يدل على انه في المقابل يساوي المجاور اذا الضلعين متساويين كيف يكون المثلث نوعه متساوي الساقين $\sin =$ $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} \Rightarrow \cos$.

سؤال: **اكتب**: مساله تستعمل فيها نسبة الجيب لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية . ثم حلها ؟

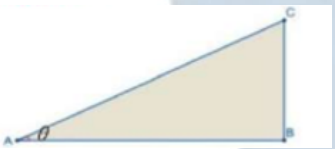
الحـل /

سبق وتطرقنا الى هذه المسائل في سياق شرح الدرس **راجع مثال 6.**

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة:

1. من الشكل المجاور النسبية المثلثية $\sin\theta$ تكتب :



a) $\frac{AB}{AC}$ b) $\frac{BC}{AB}$
c) $\frac{BC}{AC}$ √ d) $\frac{AB}{AC}$

2. ABC مثلث قائم الزاوية في B اذا $\cos A = \frac{3}{5}$ كانت فان $\tan C$ يساوي:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{4}{3}$ √ d) $\frac{3}{4}$

3. اذا كانت $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ فان قيمه الزاوية θ يساوي :

a) 45° b) 60°
c) 90° d) 30° √

4. القيمه العددية للمقدار: $\sin 30^\circ \cos 30^\circ$ تساوي:

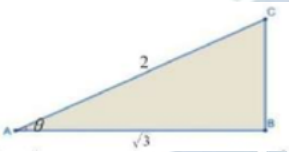
a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ √ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

5. مقلوب النسبة $\cos\theta$ هي:
a) $\sin\theta$ b) $\sec\theta$ √ c) $\csc\theta$ d) $\cot\theta$

6. القيمة العددية للمقدار $(\sec 60°)^2 - (\tan 60°)^2$ تساوي:
a) -1 b) 0 c) 2 d) 1 √

7. ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل المجاور ، القيمة العددية للمقدار $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$ يساوي:



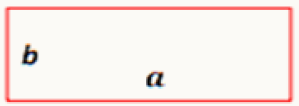
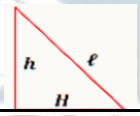
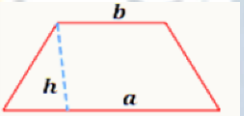
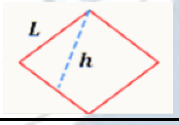
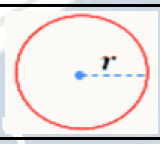
a) -1 b) 0 c) 2 d) 1 √

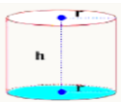
8. اذا كانت $\csc\theta = 2$ فان قيمة الزاوية θ هي:
a) 45° b) 60° c) 90° d) 30° √

نهاية الفصل الرابع

الفصل الخامس : الهندسة والقياس

جدول مراجعة لبعض قوانين (المحيط والمساحة والمساحة الجانبية والكلية و الحجم للأشكال المجسمة) للأشكال الهندسية التي درستها سابقاً

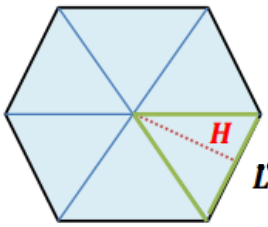
اسم الشكل	رسم الشكل	المحيط	المساحة
المستطيل		$P = 2(a + b)$ او مجموع أضلاعه الأربعة	$A = a \times b$ او الطول × في العرض
المربع		$P = 4 \times L$ او مجموع أضلاعه الأربعة	$A = L \times L = L^2$ او طول الضلع × نفسه
المثلث القائم		$P = h + H + \ell$ او مجموع أضلاعه الثلاثة	$A = \frac{1}{2}(H \times h)$ او نصف القاعدة ×الارتفاع
المثلث متساوي الاضلاع		$P = L + L + L$ او مجموع أضلاعه الثلاثة	$A = \frac{\sqrt{3}}{4}(L)^2$ او مربع الضلع × $\frac{\sqrt{3}}{4}$
شبة المنحرف		$P = a + b + c + d$ او مجموع أضلاعه الأربعة	$A = \frac{1}{2}(a + b) \times h$ او نصف القاعدتين × الارتفاع
المعين		$P = 4 \times L$ او مجموع أضلاعه الأربعة	$A = L \times h$ او طول الضلع × الارتفاع
الدائرة		$P = 2r\pi$ او2 × نصف القطر × النسبية الثابته	$A = r^2\pi$ او مربع نصف القطر × النسبية الثابته

اسم الشكل	رسم الشكل	المساحه الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
الاسطوانة		$L.A = 2r\pi \times h$ او محيط القاعدة × الارتفاع	$T.A = 2r\pi \times h + 2r^2\pi$ او المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	$V = r^2\pi \times h$ او مساحه القاعدة ×الارتفاع

انتبـاه :

المحيط واطوال الاضلاع وحدة قياس واحدة $\dots, m, cm$// المساحات وحدتين قياس $\dots, m^2, cm^2$ الحجوم نلات وحدات قياس $\dots, m^3, cm^3$

الدرس [1-5] المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)



[5 – 1 – 1] اولاً : المضلعات المنتظمة

المضلع المنتظم / وهو الشكل الهندسي الذي تكون جميع اطوال أضلاعه متساوية لذلك يسمي بالمنتظم

في هذا الدرس سوف نتعلم ايجاد المساحة والمحيط لهذه المضلعات وحسب القوانين التالية:

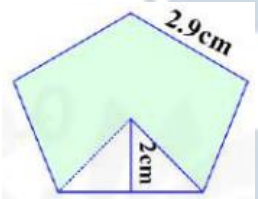
1. محيط المضلع المنتظم= عدد الاضلاع × طول المضلع او مجموعه اطوال الاضلاع $P = n \times L$
2. مساحة المضلع المنتظم = مساحة المثلث الذي راسه مركز المضلع وقاعدته ضلع المضلع (المثلث القائم) عدد اضلاع $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$

حيث ان:

n =عدد اضلاع المضلع المنتظم، L =طول الضلع، H (العامد)= العمود النازل من مركز المضلع على احد اضلاعه بصور قائمة

مساحة المثلث القائم: $A = \frac{1}{2} L \times H$ لإيجاد اي ضلع مجهول في المثلث القائم نستخدم نظريه فيثاغورس الذي درستها في الفصل الرابع الذي تنص على ان $(\text{الوتر})^2 = (\text{القاعده})^2 + (\text{الضلع القائم})^2$

سؤال / جد محيط ومساحة المضلع المنتظم التالي:



الحـل /

نكتب المعطيات $n = 5, L = 2.9\text{cm}, H = 2\text{cm}$

نكتب قانون المحيط ثم نعوض المعطيات $P = n \times L$

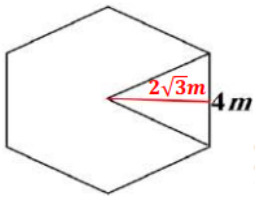
$$P = 5 \times 2.9 = 14.5\text{cm}$$

نكتب قانون المساحة ثم عوض المعطيات $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$

$$A = \frac{1}{2} \times 2.9 \times 2 \times 5$$

$$A = 2.9 \times 5 = 14.5\text{cm}^2$$

سؤال / جد محيط ومساحة المضلع المنتظم التالي:



الحـل /

نلاحظ ان عدد الاضلاع الخارجي للشكل هي اضلاع

نكتب المعطيات $n = 6, L = 4\text{m}, H = 2\sqrt{3}\text{m}$

نكتب قانون المحيط ثم نعوض المعطيات $P = n \times L$

$$P = 6 \times 4 = 24\text{m}$$

نكتب قانون المساحة ثم عوض المعطيات $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$

$$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6$$
$$A = 4 \times \sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}m^2$$

سؤال جد مساحة المربع الذي فيه طول العامد $4cm$ ؟

الحـل /

نكتب المعطيات $n = 4, L = 2 \times 4 = 8cm, H = 4m$

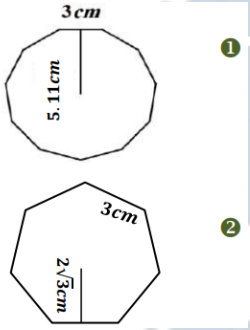
نكتب قانون المساحة ثم عوض المعطيات $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$

$$A = \frac{1}{2} \times {}^{4}8 \times 4 \times 4$$
$$A = 4 \times 4 \times 4 = 64cm^2$$

او بطريقة قانون مساحة المربع

$$A = L \times L$$
$$A = 8 \times 8 = 64cm^2$$

سؤال جد مساحة ومحيط المضلع المنتظمة التالية: **واجب**

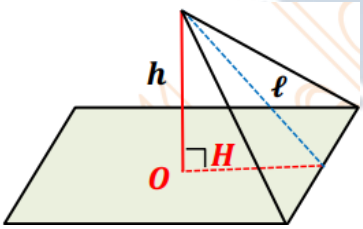


1. $P = 33cm, A = 84.33cm$
2. $P = 14\sqrt{3}cm, A = 21\sqrt{3}cm$

[5 – 1 – 2] المجسمات (الهرم والمخروط)

سوف نقسم المجسمات الى نوعين: الاول: الهـرم و الثانية: المخـــروط

النوع الأول / الهرم : هو مجسم له في الاقل ثلاثة اوجه مثلثة الشكل ولـه قاعدة واحدة تعبر عن شكل مضلع (شكل القاعدة يحدد اسم الهرم)



حيث ان h = الارتفاع H = العامد ℓ = الارتفاع الجانبي

لا تنسى لإيجاد اي مجهول من الرموز اعلان استخدم نظرية

فيثاغورس للمثلث القائم الزوايا

$$(\ell)^2 = (h)^2 + (H)^2$$

سوف نتعلم كيف ايجاد المساحة الجانبية والمساحة الكلية والحجم من خلال القوانين ادناه:

المساحه الجانبيه للهرم	المساحه الكليه للهرم	الحجم للهرم
$A = \frac{1}{2} P \times \ell$	T. $A = \frac{1}{2} P \times \ell + b$ مساحة القاعدتين + المساحه الجانبيه = المساحه الكليه	$V = \frac{1}{3} b \times h$

حيث ان $b =$ هي مساحه قاعده الهرم تأخذ قانون مساحه الشكل الهندسي للقاعدة مثلا لو كانت قاعده الهرم مربعه فتأخذ قانون المساحة للمربع $P =$ هي محيط قاعده الهرم وايضا تأخذ قانون محيط الشكل الهندسي القاعدة.

سؤال: جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لهرم منتظم ارتفاعه الجانبي $8cm$ وقاعدته المربعة طول ضلعها $3cm$ ؟

الحـل /

نكتب المعطيات $\ell = 8cm, L = 3cm$ قاعدة الهرم المربعة

$P = 4 \times L$ محيط المربع

L. $A = \frac{1}{2}P \times \ell$ نكتب قانون المساحة الجانبية

$$A = \frac{1}{2} \times (4 \times 3) \times 8 = \frac{1}{2} \times 12 \times {}^{4}8$$

$$L, A = 12 \times 4 = 48cm^2$$

$$A = \frac{1}{2} \times (4 \times 3) \times 8 = \frac{1}{2} \times 12 \times {}^{4}8$$

$$L, A = 12 \times 4 = 48cm^2$$

$b = L \times L$ مساحة المربع

T. $A = \frac{1}{2}P \times \ell + b$ او مساحة القاعده + المساحة الجانبية = المساحة الكلية

المساحة الكلية $= 48 + (3 \times 3) = 48 + 9$

المساحة الكلي $= 57cm^2$

توصيات حول حل امثلة الهرم/

- معرفه نوع قاعده الهرم لغرض استخراج المحيط والمساحة / كتابة معطيات سؤال على جه لتكون امامك.
- الرسم غير مطلوب إذا كان السؤال على شكل المعطيات.

سؤال: جد حجم المساحة الجانبية و الكلية للهرم الذي مساحة قاعدته $54\sqrt{3}cm^2$ ومحيط قاعدته $36cm$ وارتفاعه الجانبي $9cm$ ؟

الحـل /

$$b = 54\sqrt{3}cm^2, p = 36cm, h = 3\sqrt{6}cm, \ell = 9cm$$

$V = \frac{1}{3}b \times h$ نعوض المعطيات بقانون الحجم

$$V = \frac{1}{3} \times 54\sqrt{3} \times 3\sqrt{6} \qquad \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$V = 54\sqrt{18} = 54 \times 3\sqrt{2} = 162\sqrt{2}cm^3$$

$L.A = \frac{1}{2}P \times \ell$ نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية

$A = \frac{1}{2} \times 36^{18} \times 9$

$\sqrt{3} \approx 1.7$
$54\sqrt{3} = 54 \times 1.7$

$L.A = 18 \times 9 = 162cm^2$

مساحة القاعده + المساحة الجانبية = المساحة الكلية

المساحة الكلية $= 162 + 54\sqrt{3}$

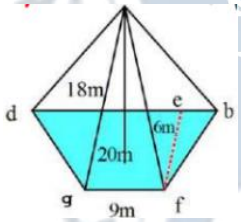
المساحة الكلية $= 162 + 91.8 = 253.8cm^2$

سؤال: جد حجم الهرم المجاور الذي قاعدته شبه منحرف ؟

الحـل /

$h = 20m, ef = 6cm, gf = 9cm, db = 18cm$

$V = \frac{1}{3}b \times h$



مساحة شبة المنحرف $b = \frac{1}{2}(db + gf) \times ef$

$b = \frac{1}{2}(18 + 9) \times {}^{3}6$

نعوضها بقانون الحجم $b = 27 \times 3 = 81cm^2$

$V = \frac{1}{3} \times 81 \times 20$

$V = \frac{1}{3} \times {}^{27}81 \times 20 = 27 \times 20$

$V = 540cm^3$

سؤال: جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مضلع ثماني منتظم طول ضلعة $1.16cm$ وارتفاعه $2cm$ الجانبي؟

الحـل /

$n=8, L=1.16, \ell=2cm$

$L.A = \frac{1}{2}P \times \ell$ ← محيط الثماني $P = n \times L$

$$\text{L. A} = \frac{1}{2} \times (8 \times 1.16) \times 2$$

$$\text{L. A} = \frac{1}{2} \times (9.28) \times 2 \Rightarrow \text{L. A} = 9.28\text{cm}^2$$

الأستاذ رشيد عبد الله اللهيبي
مدرس رياضيات

سؤال / جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية للهرم الذي قاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعة 6cm وارتفاعه $\sqrt{33}cm$ والارتفاع الجانبي 6cm ؟

الحـل /

قاعدته مثلث متساوي الاضلاع $h = \sqrt{33}\text{cm}, L = 6\text{cm}, \ell = 6\text{cm}$

$$V = \frac{1}{3} b \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \times (^{3}9\sqrt{3}) \times \sqrt{33}$$

$$V = 3\sqrt{99} = 9\sqrt{11}\text{cm}^3$$

مساحة المثلث $b = \frac{\sqrt{3}}{4} \times L^2$

$b = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times {}^{9}36$

$= 9\sqrt{3}cm^2$

محيط المثلث $P = 3 \times L$

$$L.A = \frac{1}{2} P \times \ell$$

$$L.A = \frac{1}{2} \times (3 \times 6) \times 6$$

$$L.A = \frac{1}{2} \times 18 \times 6 = 54\text{cm}^2$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعده

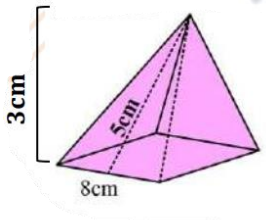
المساحة الكلية $= 54 + 9\sqrt{3}$

$9\sqrt{3} \approx 9 \times 1.7 \approx 15.3$

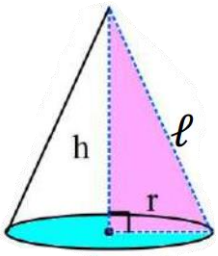
المساحة الكلية $\approx 69.3\text{cm}^2$

واجبات

1. هرم قاعدته مربعة طول ضلعها 12cm وارتفاعه8cm و ارتفاعه الجانبي 10cm جد الحجم والمساحة الجانبية و الكلية؟
2. جد حجم هرم ارتفاعه 8cm وقاعدته خماسي منتظم مساحته 24cm^2 ؟
3. جد حجم هرم قاعدته مثلث منتظم وطول ضلعة 6m وارتفاعه 13m ؟
4. جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة طول ضلعها 8cm وارتفاعها الجانبي 7.2cm ؟
5. جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية للهرم المجاور الذي قاعدته مرب



ANS:
1. $384cm^3, 240cm^2, 384cm^2$
2. $64cm^3$
3. $39\sqrt{3}m^3$
4. $115.2cm^2$
5. $64cm^3, 80cm^2, 144cm^2$



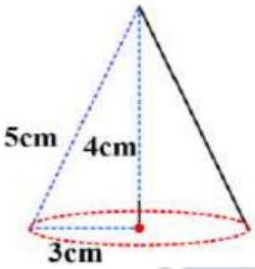
النوع الثاني / المخروط : هو مجسم له قاعدة واحدة فقط وتكون عبارة عن دائرة وله راس واحد.

حيث ان: h = الارتفاع ℓ = الارتفاع الجانبي (مولد المخروط)
r = نصف قطر الدائرة
لإيجاد اي مجهول من الرموز أعلاه نستخدم نظريه فيتاغورس
الخاصة بالمثلث القائم الزاوية $(\ell)^2 = (h)^2 + (r)^2$.
سوف نتعلم كيف ايجاد المساحة الجانبية والمساحة الكلية والحجم. من خلال القوانين أدناه :

المساحة الجانبية للمخروط	المساحة الكلية للمخروط	حجم المخروط
$L.A = \frac{1}{2}(2r\pi) \times \ell$ $L.A = r\pi \times \ell$ الارتفاع الجانبي × نصف محيط الدائرة = المساحة الجانبية	$T.A = r\pi \times \ell + r^2\pi$ مساحة الدائرة + الجانبية = المساحة الكلية	$V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$ الارتفاع × ثلث مساحة الدائرة = الحجم

حيث ان: π = النسبة الثابتة وقيمتها $\frac{22}{7}$ او 3.14 و $r^2\pi$ و مساحة الدائرة و $2r\pi$ محيط الدائرة

المخروط لا يحتاج الى تحديد شكل القاعدة لان قاعدته فقط الدائرة بينما الهرم تكون قاعدته شكلها مضلع (مثلث,مربع ,خماسي .....,).



سؤال : استخدم الشكل المجاور لا يجاد المساحة الجانبية والمساحة الكلية والحجم؟

الحل /
نستخرج المعطيات من الرسم الذي يمثل هرم لان قاعدته دائرية

$$r = 3cm, h = 4cm, \ell = 5cm$$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية $L.A = r\pi \times \ell$

$$L.A = 3\pi \times 5$$
$$L.A = 15\pi cm^2$$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الكلية $T.A = r\pi \times \ell + r^2\pi$

$$T.A = 15\pi + 3^2\pi$$
$$T.A = 15\pi + 9\pi$$
$$T.A = 24\pi cm^2$$

نعوض المعطيات بقانون الحجم $V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$

$$V = \frac{1}{3} \times 3^2\pi \times 4$$
$$V = \frac{1}{3} \times {}^3 9\pi \times 4$$
$$V = 3\pi \times 4 = 12\pi cm^3$$

سؤال جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لمخروط دائري قائم قطر قاعدته $35m$ وارتفاعه الجانبي $20m$ واكتب الجواب بدلالة π؟

الحـل /

$r = \frac{35}{2} = 17.5m, \ell = 20m$ لان المعطى قطر وليس نصف قطر

$L.A = r\pi \times \ell$ نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية

$L.A = 17.5\pi \times 20$

$(1.5)^2 = 17.5 \times 17.5$
ثم نرفع الفوارز ونضرب ضرب عمودي ثم نرجعها

$L.A = 350\pi cm^2$

$T.A = r\pi \times \ell + r^2\pi$

$T.A = 350\pi + (17.5)^2\pi$

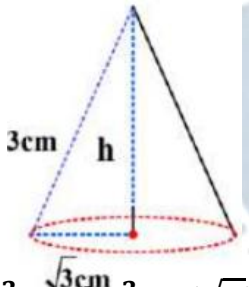
$T.A = 350\pi + 306.25\pi$

$T.A = 656.25\pi cm^2$

سؤال استخدم الشكل المجاور لا يجاد المساحة الجانبية والمساحة الكلية والحجم ؟

الحـل / نستخرج المعطيات من الرسم الذي يمثل هرم لان قاعدته دائرية

$r = \sqrt{3}cm, h = ?, \ell = 3cm$



نلاحظ ان الارتفاع h مجهول فلا نستطيع إيجاد حجم المخروط

لو كان المطلوب المساحة الجانبية و الكلية فقط فلا نحتاج للارتفاع

نستخدم نظرية فيثاغورس لا يجاد الارتفاع $(\ell)^2 = (h)^2 + (r)^2$

$3^2 = (h)^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9 = h^2 + 3 \Rightarrow h^2 = 9 - 3$

$h^2 = 6 \overset{\text{بجذر الطرفين}}{\Longrightarrow} h = \sqrt{6}cm$

$V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$ نعوض المعطيات بقانون الحجم

$V = \frac{1}{3} \times (\sqrt{3})^2\pi \times \sqrt{6}$

$V = \frac{1}{3} \times 3\pi \times \sqrt{6} = \sqrt{6}\pi cm^3$

$L.A = r\pi \times \ell$ نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية

$L.A = \sqrt{3}\pi \times 3 = 3\sqrt{3}\pi cm^2$

$T.A = r\pi \times \ell + r^2\pi$ نعوض المعطيات بقانون المساحة الكلية

$T.A = 3\sqrt{3}\pi + (\sqrt{3})^2\pi = 3\sqrt{3}\pi + 3\pi$

$T.A = 5.1\pi + 3\pi = 8.1\pi cm^2$

سؤال : جد المساحة السطحية والحجم للمخروط اذا علمت ان مساحة قاعدته $9\pi cm^2$ وارتفاعه الجانبي $5cm$؟

الحـل /

$r = ?, h = ?, \ell = 5cm, r^2\pi = 9\pi cm^2$

المقصود من المساحة السطحية هي نفسها المساحة الجانبية

$L.A = r\pi \times \ell$

ملاحظة / عندما يكون r مجهول ومعطى في السؤال مساحة او محيط الدائرة نستخرجه من خلالها في هذه السؤال المعطى هو مساحة القاعدة (الدائرة)

$r^2\pi = 9\pi \xrightarrow{\div\pi} r^2 = 9 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} r = 3cm$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الكلية $L.A = 3\pi \times 5$

$L.A = 15\pi = 15\pi cm^2$

والان نجد حجم المخروط $V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$

سوف نجد h باستخدام نظرية فيثاغورس $(\ell)^2 = (h)^2 + (r)^2$

$5^2 = (h)^2 + 3^2 \Rightarrow 25 = h^2 + 9$

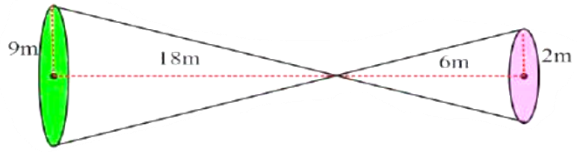
$h^2 = 25 - 9 \Rightarrow h^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} h = 4cm$

نعوض المعطيات بقانون الحجم $V = \frac{1}{3} \times 3^2\pi \times 4$

$V = \frac{1}{3} \times {}^{3}9\pi \times 4$

$V = 12\pi cm^3$

سؤال : جد حجم الشكل المركب المجاور ؟



الحـل /

نلاحظ ان الشكل عباره عن مخروطين كبير وصغير ولإيجاد حجم الشكل يجب علينا ايجاد حجم الكبير والصغير ونجمعهما معاً

$$V_{\text{كبير}} = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h \qquad , r = 9m, h = 18m$$

$$V_{\text{كبير}} = \frac{1}{3} \times 9^2\pi \times 18 = \frac{1}{3} \times {}^{27}81\pi \times 18$$

$$V_{\text{كبير}} = 27\pi \times 18 = 486\pi cm^3$$

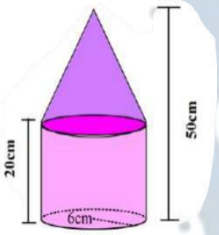
$$V_{\text{صغير}} = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h \qquad , r = 2m, h = 6m$$

$$V_{\text{صغير}} = \frac{1}{3} \times 2^2\pi \times 6 = \frac{1}{3} \times 4\pi \times {}^{2}6$$

$$V_{\text{صغير}} = 4\pi \times 2 = 8\pi cm^3$$

$$V_{\text{الشكل}} = V_{\text{كبير}} + V_{\text{صغير}} = 486\pi + 8\pi = 494\pi cm^3$$

سؤال : جد حجم المركب المجاور؟



الحـل / نلاحظ ان الشكل عباره عن مخروط واسطوانة ، ولإيجاد حجم الشكل يجب علينا ايجاد حجم المخروط والاسطوانة ونجمعهما معاً

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h \quad , r = 6cm, h = 30cm$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times 6^2\pi \times 30$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times 36\pi \times {}^{10}30$$

$$V_{\text{مخروط}} = 360\pi cm^3$$

$$V_{\text{اسطوانة}} = r^2\pi \times h \qquad , r = 6cm, h = 20cm$$

$$V_{\text{اسطوانة}} = 6^2\pi \times 20$$

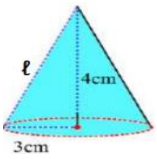
$$V_{\text{اسطوانة}} = 36\pi \times 20$$

$$V_{\text{اسطوانة}} = 720\pi cm^3$$

$$V_{\text{الشكل}} = V_{\text{مخروط}} + V_{\text{اسطوانة}} = 360\pi + 720\pi$$

$$V_{\text{الشكل}} = 1080\pi cm^3$$

واجبات



1. جد الحجم والمساحة الجانبية والمساحة الكلية للشكل المجاور؟
   Ans: $12\pi cm^3, 15\pi cm^2, 24\pi cm^2$
2. مخروط دائري قائم مساحة قاعدته $225\pi cm^2$ ومحيط قاعدته $30\pi cm$ وارتفاعه $20cm$ وارتفاعه الجانبي $25cm$ جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية؟ Ans: $1500\pi cm^3, 375\pi cm^2, 600\pi cm^2$
3. جد حجم الشكل المجاور

ملاحظة: عندما تجد حجم المخروطين لا تجمع بل اطرح لان المخروط الصغير داخل الكبير

Ans: $\frac{128}{3}\pi m^3$

مسائـل حياتيـة

سؤال : علوم : نموذج بركاني علي شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته $3cm$ اذا كان حجم النموذج $203cm^3$ تقريبا, ما ارتفاعه؟

الحـل /

$r = 3cm, V = 203\pi cm^3, h = ?$

من خلال قانون حجم المخروط سوف نجد الارتفاع، لان الحجم معطى

بعوض المعطيات ت بقانون حجم $V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$

$$203\pi = \frac{1}{3} \times 3^2\pi \times h$$

$$203\pi = \frac{1}{3} \times {}^3 9\pi \times h$$

نقسم الطرفين على 3π $[203 = 3\pi h] \div 3\pi$

$$\frac{203}{3\pi} = \frac{3\pi h}{3\pi}$$

$$h = \frac{203}{3\pi}$$

$$h = \frac{203}{9.42} \approx 21.5cm$$

$3\pi = 3 \times 3.14 \approx 9.42$

نعوض بقيمة π اذا كان المطلوب نصف القطر او الارتفاع

سؤال : بناء : يبلغ ارتفاع برج العرب $321m$ ويمثل هرماً مقوساً, احسب المساحة التقريبية لقاعدته اذا كان حجم الهرم $1904000cm^3$؟

الحـل /

$$V = 1904000cm^3, h = 321m$$

الشكل يميل هرم اذن نجد مساحة القاعدة b من خلال قانون حجم الهرم

$$V = \frac{1}{3} \times b \times h$$

$$1904000 = \frac{1}{3} \times b \times 321$$

$$1904000 = \frac{1}{3} \times b \times {}^{107}321$$

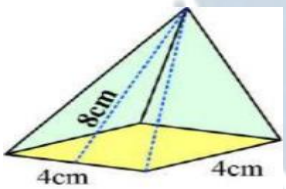
$$[1904000 = 107b] \div 107$$

$$\frac{1904000}{107} = b$$

$$b \approx 17794m^2$$

هي مساحة القاعدة التقريبية

سؤال : جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل والمبين بالشكل المجاور الشكل هو هرم لان قاعدته مربعه $\ell = 8cm, L = 4cm$؟



الحـل /

نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية للهرم $L.A = \frac{1}{2} \times P \times \ell$

محيط المربع $P = 4 \times L$

$$L.A = \frac{1}{2} \times (4 \times 4) \times 8$$

$$L.A = \frac{1}{2} \times 16 \times 8$$

$$L.A = 8 \times 8 = 64cm^2$$

فكـــر

سؤال : تحدً : مخروط واسطوانة لهما نفس القاعدة والحجم قطر الاسطوانة $40cm$ وارتفاعها $7cm$ ماهي المساحة الجانبية للمخروط ؟

الحـل / في مثل هكذا اسئلة نذهب مباشرة الى المطلوب من السؤال المطلوب هو المساحة الجانبية للمخروط نكتب قانونها $L.A = r\pi \times \ell$

اذا يجب علينه ايجاد ℓ للمخروط لأن r الاسطوانة نفس المخروط معطيات السؤال:

$$r_{\text{اسطوانة مخروط}} = \frac{40}{2} = 20cm, h_{\text{اسطوانة}} = 7cmJ$$

نعوض معطيات الاسطوانة لايجاد حجمها $V_{\text{اسطوانة}} = r^2\pi \times h$

$$V_{\text{اسطوانة}} = 20^2\pi \times 70 = 400\pi \times 70$$

وهو نفسه حجم المخروط لانهما متساويين في السؤال $V_{\text{اسطوانة}} = 2800\pi cm^3$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{2} \times r^2\pi \times h, r_{\text{مخروط}} = 20cm$$

$$2800\pi = \frac{1}{3} \times 20^2\pi \times h$$

$$2800\pi = \frac{1}{3} \times 4.00\pi \times h$$

$$2800\pi = \frac{400\pi h}{3}$$

$$[2800\pi = 133.3\pi h] \div 133.3\pi$$

$$h_{\text{مخروط}} = \frac{2800\pi}{133.3\pi} \approx 21cm$$

ومن نظريه فيثاغورس نـجد ℓ للمخروط $V_{\text{انه}}(\ell)^2 = (h)^2 + (r)^2$

$$V_{\text{انه}}(\ell)^2 = 21^2 + 20^2 \Rightarrow (\ell)^2 = 441 + 400$$

$$V_{\text{انه}}(\ell)^2 = 841 \overset{\text{بجذر الطرفين}}{\Longrightarrow} \ell_{\text{مخروط}} = 29cm$$

الان نـجد المساحة الجانبية للمخروط

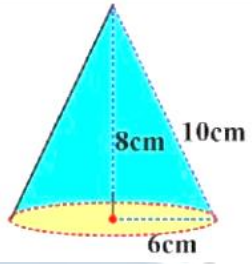
$$V_\ell_{\text{مخروط}} = 29cm, r_{\text{مخروط}} = 20cm$$

$$28L.A = r\pi \times \ell$$
$$L.A = 20\pi \times 29$$
$$28L.A = 580\pi cm^2$$

سؤال

اكتشف الخطأ : أي الحلين خطأ؟ وضح ذلك؟

الحـل الاول /



$$V = \frac{1}{3} \times b \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \pi \times 10 = 120\pi m^3$$

الحـل الثاني/

$$V = \frac{1}{3} \times b \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \pi \times 8 = 96\pi m^3$$

الحل الاول خطأ لان مقدار $h = 8cm$ وليس $h = 10cm$ لذلك يكون الحل الثاني هو الصحيح $V = 96\pi m^3$

سؤال

اكتب: مسألة عن مضلع منتظم تسمح المعطيات فيه ايجاد محيط المضلع ومساحته؟

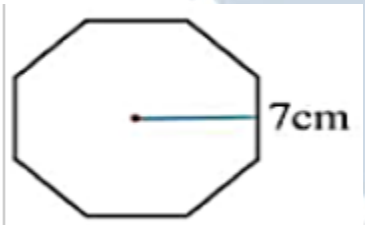
الحـل /

راجع المثال الاول من هذه الدرس او أي مثال يخص منطوق السؤال أعلاه

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال

اختر الإجابة الصحيحة:



1. محيط الثماني المنتظم المجاور ؟

a) 45.5cm b) 48cm
c) 38.3cm d) √ 56cm

2. محيط مربع مساحته $225m^2$ هو ؟

a) 25m b) 20m
c) 15m d) √ 60m

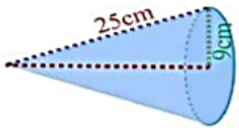
3. محيط خماسي منتظم طول عامده $5m$ ونصف قطر دائرة $5m$ هو ؟

a) 16.2m b) √ 40m
c) 16m d) 10.49m

4. مساحة سباعي منتظم طول عامدة $6m$ وطول ضلعه $7.5m$ هو ؟

a) √ $157.5cm^2$ b) $28.5cm^2$
c) $28cm^2$ d) $9975cm^2$

المساحه الجانبية للمخروط في الشكل المجاور هو ؟



a) $360\pi cm^2$
b) √ $225\pi cm^2$
c) $369\pi cm^2$
d) $1640\pi cm^2$

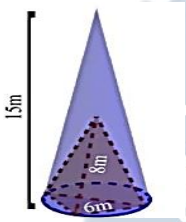
7. حجم هرم قاعدته مربعه طول كل ظلع $18cm$ وارتفاعه $20cm$ ؟

a) √ $2160cm^3$
b) $120cm^3$
c) $208\pi cm^2$
d) $90\pi cm^2$

8. المساحه الكلية لمخروط مساحه قاعدتة $25\pi cm^2$ وارتفاعه هو ؟

a) $108\pi cm^2$
b) $27\pi cm^2$
c) $208\pi cm^2$
d) √ $90\pi cm^2$

9. الفرق بين حجم المخروطين هو ؟



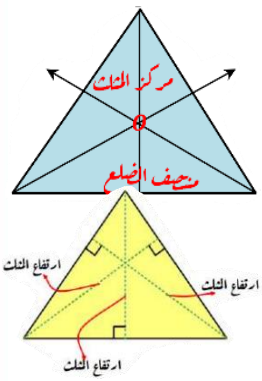
a) $27\pi m^3$
b) $75\pi m^3$
c) $48\pi m^3$
d) $21\pi m^3$

بعض الرموز الرياضية التي سنستخدمها في هذا الفصل :

الرمز	معناه	الرمز	معناه
$\cong$	يطابق	$\leftrightarrow$	مستقيم
$\sim$	يشابه	$\overline{\quad}$	قطعه مستقيم
$\angle$	زاوية	Δ	مثلث
m	قياس(تستخدم ع الزوايا)	//	يوازي
$^\circ$	درجه(وحده قياس الزوايا)	$\perp$	عمودي

الدرس [2-5] المثلثات

تعرفنا سابقا الى خواص المثلث ونتعرف في هذا الدرس الى:-



1. **القطعة المتوسطة في المثلث /** هي قطعه مستقيمه طرفها أحد رؤوس المثلث هو نقطه منتصف الضلع المقابل لذلك الراس ولكل مثلث **ثلاث** قطع متوسطة تتقاطع في نقطه واحدة تسمى **مركز المثلث 0** الذي هي نقطه تلاقي القطع المتوسطة للمثلث.

2. **ارتفاع المثلث /** هو العمود النازل من رؤوس المثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الراس ولكل مثلث ثلاث ارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة تسمى **(ملتقى الارتفاعات)**

لذلك سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين :
الاول: الاضلاع والزوايا في المثلث و الثانية: تشابه المثلثات

[5 – 2 – 1]	الاضلاع والزوايا في المثلث

في هذا سوف ندرس مبرهنات لكل مثلث ونقبلها بدون برهان

مبرهنة (1) : اذا تباينه ضلعا مثلث تباينت الزاويتان المقابلتان لهما فأكبرهما تقابل الضلع الاكبر وبالعكس

$$\overline{BC} > \overline{AC} \Leftrightarrow m\angle A > m\angle B$$

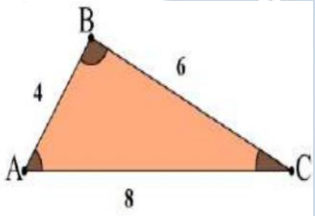
الزاوية $\angle B$ يقابلها الضلع $\overline{AC}$ الزاوية $\angle A$ يقابلها الضلع $\overline{BC}$

الزاوية $\angle C$ يقابلها الضلع $\overline{AB}$ فاذا كان الضلع اكبر الاضلاع فتكون الزاوية الذي تقابله اكبر الزوايا في المثلث

تذكير (1) : مجموعة زوايا المثلث $180°$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

تذكير (2) : يمكن كتابة رموز الاضلاع من البداية الى النهاية او العكس مثلا $\overline{AB}$ يمكن كتابة $\overline{BA}$.

مثال 1 / رتب الزوايا في المثلث ادناه من الاصغر الى الاكبر ؟

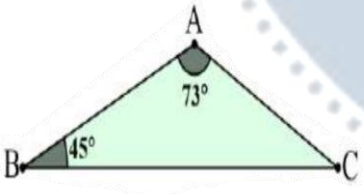


الحـل /

الضلع $\overline{BC}$ أكبر ضلع فتكون الزاوية المقابلة له $m\angle A$ اكبر زاوية
الضلع $\overline{AB}$ اصغر ضلع فتكون الزاوية المقابلة له $m\angle C$ اصغر زاوية
ترتيب الزوايا من الاصغر الى الاكبر تصاعدي $m\angle C, m\angle A, m\angle B$
او اذا كان السؤال تنازلي من الاكبر الى الاصغر $m\angle B, m\angle A, m\angle C$

ملاحظة / الترتيب من اليسار الى لان كتابة الرموز الإنجليزية .

مثال 2 / في المثلثات ادناه رتب من الاقصر الى الأطول؟



الحـل الاول /

بما ان الزوايا وقياساتها معلومة فنقارن اطوال الاضلاع من الزوايا
يجب ان نجد قياس الزاوية $m\angle C$ من خلال مجموعه زوايا المثلث

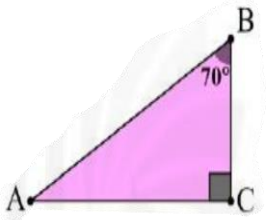
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow 73° + 45° + \angle C = 180°$$

$$118° + \angle C = 180° \Rightarrow \angle C = 180° - 118°$$

$$\angle C = 62°$$

الزاوية $m\angle C$ أكبر زاوية كيف فيكون الضلع المقابل لها $\overline{BC}$ اطول ضلع
الزاوية $m\angle B$ أصغر زاوية كيف فيكون الضلع المقابل لها $\overline{AC}$ أقصر ضلع
ترتيب الاضلاع من الاقصر الى الاطول تصاعدي $\overline{AC}, \overline{BA}, \overline{BC}$
او إذا كان السؤال تنازلي من الاطول الى الاقصر $\overline{BC}, \overline{BA}, \overline{AC}$

الحـل الثاني /



يجب ان نجد قياس الزاوية $m\angle A, m\angle C$

$m\angle C$ زاوية قائمه فيكون قياسها $m\angle C = 90°$ ونجد $m\angle A$ من المجموع

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle A + 70° + 90° = 180°$$

$$\angle A = 180° - 160° \Longrightarrow \angle A = 20°$$

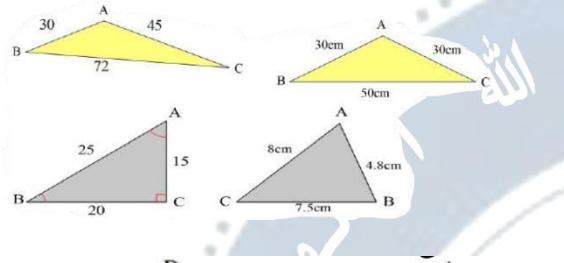
الزاوية $m\angle C$ أكبر زاوية كيف فيكون الضلع المقابل لها $\overline{BC}$ اطول ضلع

الزاوية $m\angle B$ أصغر زاوية كيف فيكون الضلع المقابل لها $\overline{AC}$ أقصر ضلع

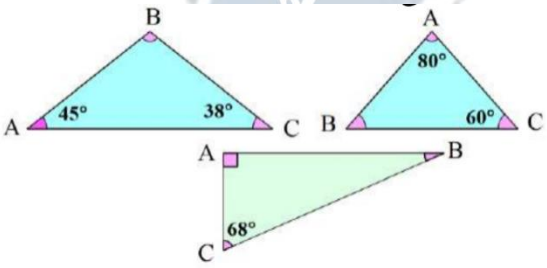
ترتيب الاضلاع من الاقصر الى الاطول تصاعدي $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$

واجبات

1. رتب الزوايا من الاصغر الى الكبر للمثلثات التالية.



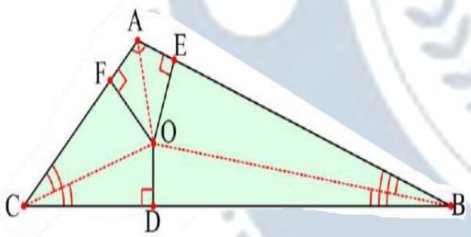
2. رتب الاضلاع من الاطول الى الاقصر للمثلثات التالية.



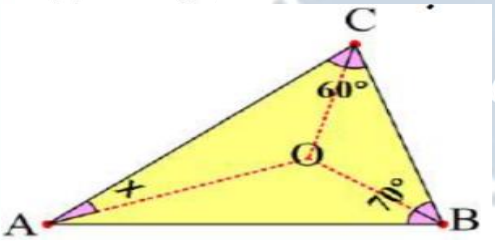
مبرهنة (2) : منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن اضلاعه (والعكس صحيح)

إذا كان $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ منصفات الزوايا A, B, C على الترتيب تلتقي في نقطه 0 فان $OD = OE = OF$.

سوف نأخذ عليها مثال



مثال 3 / في المثلث المجاور جد قيمة x ؟



الحـل /

$\overline{CO}$ تنصف الزاوية $\angle C$, $\overline{BO}$ تنصف الزاوية $\angle B$

اذن O هي نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث

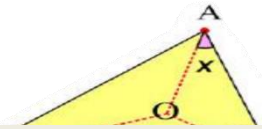
فيكون $\overline{OA}$ منصف الزاوية $\angle A$ حسب مبرهنة 2 $x = \frac{1}{2} m\angle A$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle A + 70° + 60° = 180°$$

$$\angle A + 130° = 180° \Longrightarrow \angle A = 180° - 130°$$

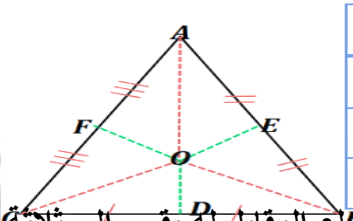
$$\angle A = 50° \Rightarrow \therefore x = 25°$$

سؤال / في المثلث المجاور اذا كان $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$ من منصفات الزوايا A, B, C جد قيمه $m\angle x$ ؟ **واجب**



Ans: $m\angle x = 27.5°$

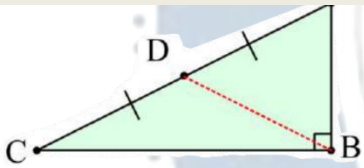
مبرهنة (3) : القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطه واحده تسمى مركز ثقل المثلث وتقسم كل منهما بنسبه $\frac{2}{3}$ من جهة الراس الى منتصف الظلع المقابل



الضلوع الطوال	الضلوع القصار
$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AD}$	$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{AD}$
$\overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{BF}$	$\overline{OF} = \frac{1}{3}\overline{BF}$
$\overline{CO} = \frac{2}{3}\overline{CE}$	$\overline{OE} = \frac{1}{3}\overline{CE}$

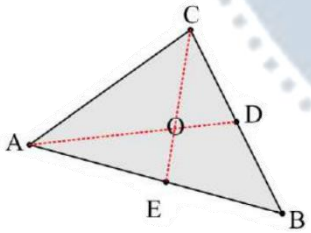
ترجمه المبرهنة : الضلع الذي ينطلق من راس المثلث الى منتصف الظلع المقابل له يقسم الى ثلاثة اثلاث: ثلثين $\frac{2}{3}$ منه تأخذ القطعة الذي وصلت الى المنتصف والباقي منه $\frac{1}{3}$ تأخذه القطعة الذي أكملت الطريق من المركز الى منتصف الضلع المقابل

مبرهنة (4) : طول القطعة المستقيمة المرسومة من راس القائمة في المثلث القائم الزاوية الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر.



مثال 4 / المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في 0 $AD = 6cm, CE = 9cm$

جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$ ؟



الحـل /

بما انه $\overline{CE}$ قطعة متوسطة اذن من مبرهنة 3 نجد طول الضلع $\overline{OE}$ القصير

$\overline{OE} = \frac{1}{3}\overline{CE}$

$\overline{OE} = \frac{1}{3} \times 9$ نعوض قيمة $CE = 9cm$ بالقانون

$\overline{OE} = 3cm$

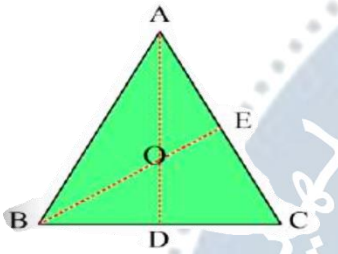
بما انه $\overline{AD}$ قطعة متوسطة اذا من مبرهنة 3 نجد طول الضلع $\overline{AO}$ الطويل

$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AD}$

$\overline{AO} = \frac{2}{3} \times {}^{2}\cancel{6}$ نعوض قيمة $AD = 6cm$ بالقانون

$\overline{AO} = 4cm$

مثال 5 / ABC مثلث O نقطه تقاطع مستقيماته المتوسطة اذا كان $BO = 12cm$ جد طول القطعة التي طرفيها النقطة B؟



الحـل /

نرسم المثلث ونحدد عليه المعطيات

بما انه $\overline{BO}$ ضلع معلوم من القطعة المتوسطة $\overline{BE}$

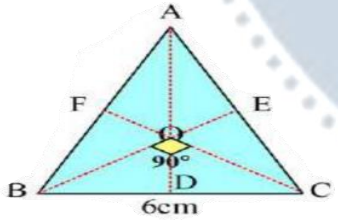
اذن من مبرهنة 3 نجد طول القطعة $\overline{BE}$

$\overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{BE} \Rightarrow 12 = \frac{2}{3}\overline{BE}$

$\frac{12}{1} = \frac{2}{3}\overline{BE}$ طرفين × وسطين

$\overline{BE} = \frac{12 \times 3}{2 \times 1} \Rightarrow \overline{BE} = 18cm$

مثال 6 / ABC مثلث O نقطه التقاء القطع المتوسط جد طول $\overline{AD}$ اذا علمت ان $BC =$ $6cmm\angle COB = 90°, \overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ ؟



الحـل /

نرسم المثلث ونحدد عليه المعطيات

لإ يجاد طول $\overline{AD}$ يجب ان نجد $\overline{OD}$ من خلال مبرهنة 4 المثلث قائم

$OD = \frac{1}{2}BC$

$OD = \frac{1}{2} \times 6 \Rightarrow OD = 3cm$

ومن خلال مبرهنة 3 (الضلع القصير للـ$\overline{AD}$)

$$OD = \frac{1}{3}AD \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{1}{3}AD$$
$$AD = \frac{3 \times 3}{1} = 9cm$$

واجبات

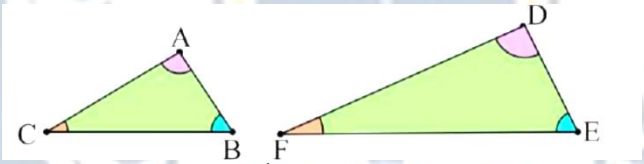
1. المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في $AD = 9cm, CE = 12cm$ جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$ ؟
2. المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في $AD = 12cm, CE = 24cm$ جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$ ؟

Ans: 1 $AO = 6cm, OE = 4cm$ 2 $AO = 8cm, OE = 8cm$

[5 – 2 – 2] التشابه في المثلثات

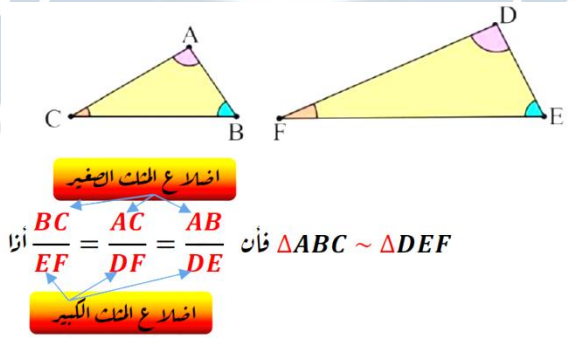
المثلثان المتشابهان : هما مثلثان تتناسب اضلاعهما وتتطابق زواياهما ويرمز له بالرمز $(\sim)$ سوف ناخذ على التشابة مبرهنات بدون برهان .

مبرهنة (5) : إذا تطابقت زوايا في مثلث مع زاويتين في مثلث اخر فأن المثلثين يتشابهان



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ فان $m\angle A = m\angle D, m\angle C = m\angle F$ اذا او أي زاويتين اخرتين

مبرهنة (6) : إذا تناسب ثلاث اضلاع من مثلث مع ثلاث اضلاع من مثلث اخر فان المثلثين متشابهين.

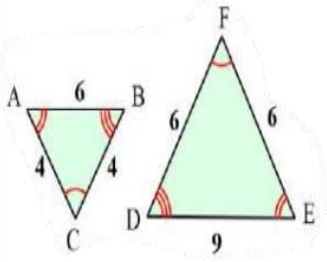


أذا $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ فأن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

تنبيه : يجب وضع كل اضلاع المثلث الصغيرة اما في البسط او في المقام ويعتبر التناسب خاطئ اذ وضعت ضلع في البسط في التناسب الاول وضلع في المقام في التناسب الثاني (يعني لو كلهن فوك لو كلهن جوة ميصير تطفر).

مثال (7) / بين فيما اذا كان المثلثين في الاشكال التالية متشابهين واكتب نسبة التشابة ؟

الحـل الأول/ لكي نثبت ان المثلثان متشابهان يجب ان نثبت ان الاضلاع في المثلث متناسبة



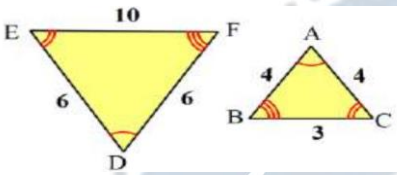
$$\frac{AB}{DE}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{AC}{FE}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{BC}{FD}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

بما انه $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{FE}=\frac{BC}{FD}=\frac{2}{3}$

اذن $\triangle ABC \sim \Delta DEF$

لان تتناسب الاضلاع المثلث الاول مع الثاني متساوية

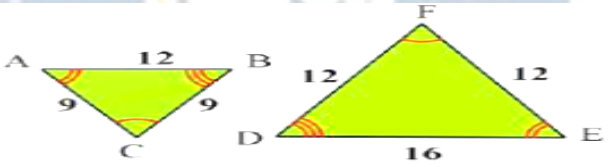
الحـل الثاني/ نجد تناسب الاضلاع

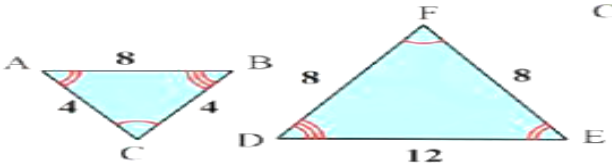


$$\frac{BC}{EF}=\frac{3}{10}$$
$$\frac{AB}{DF}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{BC}{EF}\neq\frac{AB}{DF}$$

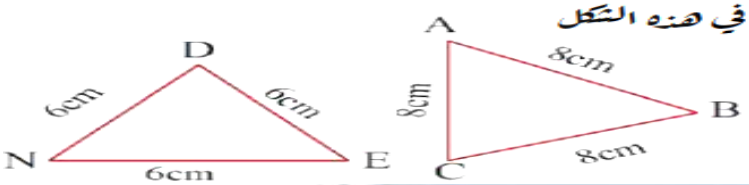
نتوقف عن التكملة لان نسبه الضلع الاول لا تساوي نسبه الضلع الثاني
اذن المثلثان غير متشابهان.

سؤال : بين هل المثلثان في الاشكال الادناه متشابهين واكتب نسبه التشابه ازواج الزوايا المطابقة في هذا الشكل؟

1. 

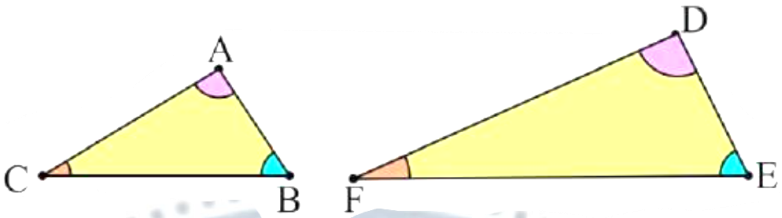
2. 

3. تم سم ازواج الزوايا المطابقة في هذه الشكل



الشكل؟ واجب

مبرهنة (7) : إذا تناسب ضلعان في مثلث مع نظارة هما في مثلث اخر وتطابقه الزوايا المحصورة بينهما مع نظيرها فأن المثلثين يتشابهان .



$\frac{AC}{DF}=\frac{CB}{FE}, m\angle C = m\angle$ فيكون $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

او أي ضلعين من المثلث الاول مع انظارهما من المثلث الثاني والزاوية المحصورة بينهما.

تذكير: اصبحت لدينا ثلاث مبرهنات لتشابه المثلثين:-

الأولى: - تطابق زاويتين نستخدمها عندما يكون في المثلثين قياس زاويتين .
الثانية: - تناسب ثلاثة اضلاع نستخذ مها عندما يكون في المثلثين ثلاث اضلاع معلومة. الثالثة: - تناسب ضلعين وزاوية محصورة بينهما نستخدمها عندما يكون في المثلثين ضلعين معلومين.
عندما يطلب منك اثبات تشابه مثلثين استخدم المبرهنة حسب معطيات السؤال.

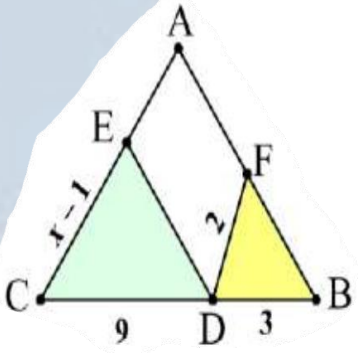
مثال 8 / في المثلث المجاور اذا كان $\frac{EC}{DF}=\frac{CD}{DB}, m\angle C = m\angle FDB$ جد قيمة x ؟

الحـل /

$\frac{EC}{DF}=\frac{CD}{DB}, m\angle C = m\angle FDB$ من خلال المعطي

حسب مبرهنه7 يكون $\Delta ECD \sim \Delta FDB$ متشابهين

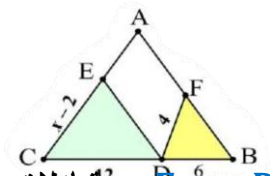
$\frac{EC}{DF}=\frac{CD}{DB}$ فتكون اضلاعهما متشابهة



$$\frac{x-1}{2}=\frac{9}{3}=\frac{x-1}{2}=\frac{3\,9}{3}$$
$$\frac{x-1}{2}=\frac{3}{1}$$
$$x-1=3\times 2$$
$$x=6+1$$
$$x=7$$

مثال 9 / بين ان $\Delta ABC, \Delta FBD$ في الشكل المجاور متشابهين حيث ان $\overline{AC}//\overline{FD}$ وجد قيمة ؟

الحـل /



من خلال المعطى $\overline{AC}//\overline{FD}$

$\therefore \angle C = \angle D$ متناظرات

و $\angle B$ زاوية مشتركة

(حسب مبرهنة 5 تساوي زاويتين) اذن $\Delta ABC, \Delta FBD$ متشابهين $\angle D$ متقابلة بالرس و $\angle E = \angle D$ متبادلات

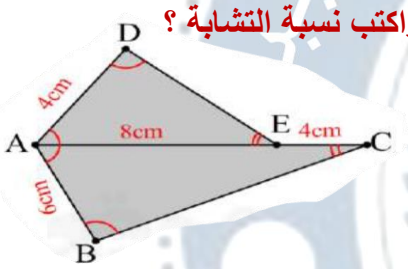
فيكون $\Delta ECD \sim \Delta FBD$ (حسب مبرهنة 5 تساوي زاويتين)

فيكون اضلاعها متناسبة $\frac{EC}{DF} = \frac{CD}{DB}$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{12}{6} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{2}{1}$$
$$x - 2 = 4 \times 2$$
$$x = 8 + 2 \Rightarrow x = 10$$

مثال 10 / بين ان المثلثين ABC, ADE في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابة ؟

الحـل / نثبت ان المثلثين متشابهين من خلال مبرهنة 7 لوجود ضلعين وزاوية نجد تناسب الضلعين المعلومين من كل مثلث

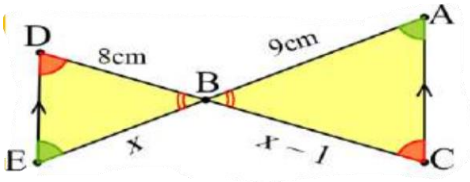


$$\frac{AD}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{AE}{AC} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

والزاويتين المحصورتين بين الضلعين $m\angle DAE = m\angle CAB$ متساويتين اذن $ABC \sim ADE$ احسب مبرهنة 7

ونسبة التشابه هي $\frac{2}{3}$

مثال 1 : في المثلث المجاور



1. يبين ان المثلثين ABC, BDE متشابهين
2. جد نسبه التشابه
3. جد قيمه x

الحـل / بما انه $\overline{AC}//\overline{DE}$ معطى من خلال الرسم راس السهم يدل على التوازي

$$\left.\begin{matrix} m\angle A = m\angle E \\ m\angle D = m\angle C \end{matrix}\right\}$$ متبادلات

اذن $\triangle ABC, \triangle BDE$ متشابهين حسب مبرهنة 5 تساوي زاويتين

$\frac{EB}{AB} = \frac{DB}{BC}$ فيكون اضلاعها متناسبة

$$\frac{x}{9} = \frac{8}{x-1} \Rightarrow x(x-1) = 8 \times 9$$

$x^2 - x = 8 \times 9 \Rightarrow x^2 - x - 72 = 0$ تنحل بالتجربة

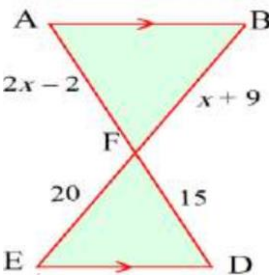
$(x-9)(x+8) = 0 \Rightarrow$ اما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$ او $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$ مرفوض

ونجد نسبة التشابه من اي ضلع $\frac{x}{9} = \frac{9}{9} = 1$

مسائـل حياتيـة

سؤال : هندسة : اذا علمت ان $\Delta ABF \sim \Delta EDF$ وان $\overline{AB}//\overline{ED}$ استعمل المعلومات في الشكل المجاور لتجد قيمه x ؟

الحـل /



$\Delta ABF \sim \Delta EDF$ ∵ متشابهين

∵ تناسب اضلاعها

$\frac{FE}{FB} = \frac{FD}{FA}$

$$\frac{20}{x+9} = \frac{15}{2x-2} \Rightarrow 20(2x-2) = 15(x+9)$$

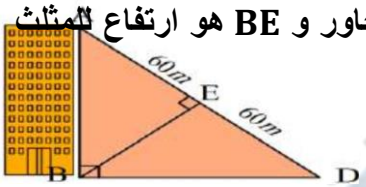
$40x - 40 = 15x + 135$

$40x - 15x = 135 + 40$

$[25x = 175] \div 25$

$x = 7$

سؤال / بناية : بناية ارتفاعها يمثل بضلع قائم الزاوية كما في الشكل المجاور و BE هو ارتفاع للمثلث ABD :



برهن: ❶ $m\angle EBA = m\angle D$ ❷ $\Delta ABE \sim \Delta BED$ ؟

الحـل /

في ΔBED و ΔABE

$m\overline{AE} = m\overline{ED} = 6cm$

$m\angle E + m\angle E = 90°$

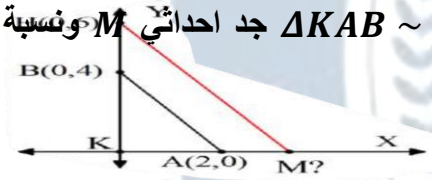
$\overline{BE} \cong \overline{BE}$

$\Delta ABE \sim \Delta BED \therefore$

من خواص تطابق المثلثات يتطابق المثلثان اذا تساوى ضلعين وزاوية محصورة بينهما

ومن خلال تطابق المثلثين BED و ABE و يكون $m\angle EBA = m\angle D$

سؤال / احداثي: في الشكل المجاور المثلث متشابهان $\Delta KAB \sim \Delta KMH$ جد احداثي M ونسبة التشابه؟



الحـل /

$\Delta KAB \sim \Delta KMH \because$ فتكون اضلاعها متناسبان

$$\frac{KH}{KB} = \frac{KM}{KA}$$

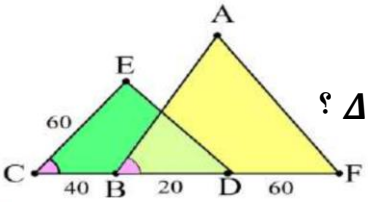
$$\frac{6}{4} = \frac{M}{2} = \frac{3}{2} = \frac{M}{2}$$

$$2M = 2 \times 3 \Rightarrow M = 3$$

فيكون احداثي M لأنه على محور السينات ونسبة التشابه هي $\frac{M}{2} = \frac{3}{2}$

فكـــر

سؤال / اكتشف : ما طول $\overline{AB}$ في الرسم المجاور علما ان $\Delta ECD \sim \Delta ABF$ ؟



الحـل /

$\Delta ECD \sim \Delta ABF \because$ فتكون اضلاعها متناسبات

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BF}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{60} = \frac{80}{60} \Rightarrow 60AB = 60 \times 80 \Rightarrow AB = 80$$

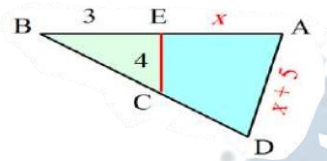
سؤال تحد: $(10,5,2)$و$(x,15,6)$ هي اطول الاضلاع متناظرة في مثلثين متشابهين ما قيمة x ؟

الحـل /

∵ المثلثين متشابهين فيكون اضلعها متناسب فنأخذ اي ضلعين من الضلع الذي يحتوي ونجدد التناسب لها

$$\frac{x}{10}=\frac{15}{5}\Rightarrow 5x=10\times 15\Rightarrow x=30$$

سؤال حس عددي : جد قيمة x في الشكل المجاور اذا كان المثلثان ABD, BEC متشابهان وان $\overline{EC}//\overline{AD}$ ؟



الحـل / ∵ $\Delta ABD \sim \Delta BEC$ فتكون اضلاعها متناسبة

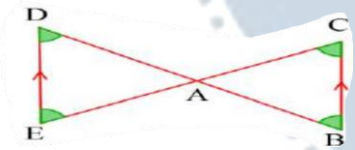
$$\frac{BE}{BA}=\frac{EC}{AD}\Rightarrow\frac{3}{3+x}=\frac{4}{x+5}\Rightarrow 4(3+x)=3(x+5)$$
$$12+4x=3x+15\Rightarrow 4x-3x=15-12\Rightarrow x=3$$

سؤال مسالة مفتوحة : اشرح لماذا تحتاج قياسات الزوايا للتأكد من تشابه المثلثات اعطي مثال على ذلك ؟

الحـل / من خواص تشابه المثلثات هي

1. عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث اخر فان المثلث يتشابهان
2. عند تناسب ضلعين في مثلث مع انظارهما في مثلث اخر وتطابق الزاوية المحصورة بينهما مع الزاوية ان المثلثين متشابهين.

سؤال هل المثلثات في الشكل المجاور متشابهين وبين السبب ؟



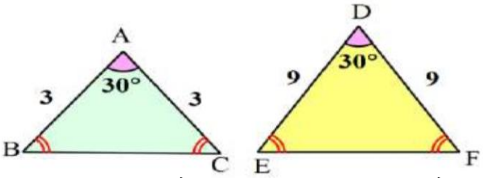
الحـل /

بما انه $\overline{BC}//\overline{ED}$ نجد ان هنالك الزاويتين من المثلث ABC تتطابق مع زاويتين من المثلث ADE (زاويا متبادلة)

اذن المثلث متشابهان

سؤال اكتب مسأله مثلثين متساويتين الساقين يطابق فيها زاويتين الراس وجد نسبه التشابه ؟

الحـل / من خواص تشابه المثلثات هي

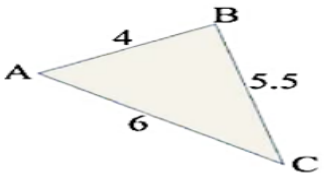


نسبة التشابه $\frac{9}{3}=\frac{3}{1}$

يجب ان يكون طول الضلع الثالث اصغر من18 و 6 لان مجموعه اي ضلعين في المثلث اكبر من الضلع الثالث

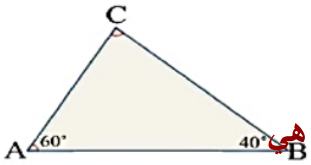
الأختيـار مـن متعـدد

1. رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر في المثلث المجاور ؟



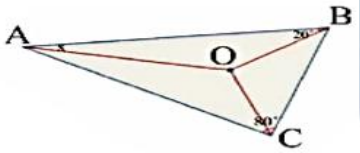
a) $m\angle C, m\angle A, m\angle B$ √
b) $m\angle A, m\angle B, m\angle C$
c) $m\angle B, m\angle C, m\angle A$
d) $m\angle C, m\angle B, m\angle A$

2. رتب الاضلاع من الأطول الى الأقصر في المثلث المجاور ؟



a) $\overline{3C}, \overline{AC}, \overline{AB}$
b) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ √
c) $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$
d) $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

3. اذا كانت O هي نقطه التقاء منصفات زوايا المثلث ABC في الشكل المجاور فان قيمة x هي



a) $20°$
b) $40°$
c) $30°$ √
d) $50°$

4. المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O

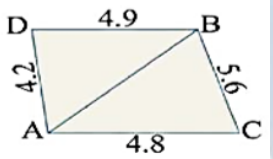
$AD = 36cm, CE = 24cm$ فان قيمه $\overline{OE}$ علما ان راس المثلث هو النقطه B هي:

a) $8cm$ √
b) $24cm$
c) $16cm$
d) $12cm$

5. في السؤال (4) قيمة $\overline{AO}$ هي :

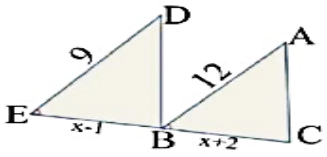
a) $6cm$
b) $12cm$
c) $24cm$ √
d) $14cm$

6. نسبة التشابه بين المثلثين ADB, ABC هي:



a) $\frac{8}{7}$ √
b) $\frac{7}{8}$
c) 7
d) 8

7. اذا كان المثلثان DBE, ABC متشابهان وكانت الزاويتان $m\angle ABC \cong m\angle DEB$ فأن قيمة x هي:



a) 8
b) $12cm$
c) 10 √
d) 6

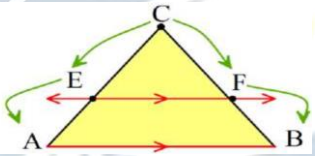
الدرس [3-5] التناسب والقياس في المثلثات

سوف نقسم هذا الدرس الى ثلاثة اقسام :
الاول: التناسب في المثلثات و الثاني: التناسب والقياس و الثالث: التناسب الهندسي حداثيا

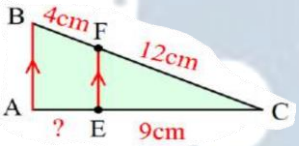
[5 – 3 – 1]	التناسب في المثلثات

التناسب في المثلثات: تعلمت سآبق التشابه في المثلثات وبعض مبرهنات التشابه سوف نتعلم في هذه البند التناسب في المثلثات.

مبرهنة التناسب المثلثي:

مبرهنة (8) نص المبرهنة	المعطى	النتيجة
اذا وازى مستقيم ضلعا من أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين، فإنه يقسم الضلعين الى قطع متناسبة الأطوال (بدون برهن).	$\overline{AB} // \overleftrightarrow{EF}$ 	$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$

سؤال : جد طول قطعة المستقيم $\overline{AE}$ علما أن $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$ في الشل آذناه ؟



الحل / بما أن المعطى هو $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$

إذن حسب مبرهنة التناسب المثلثي

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{AE}{9}$$

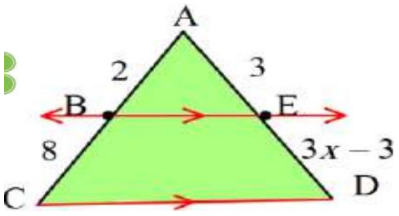
$$\frac{{}^{1}\cancel{4}}{{}^{3}12} = \frac{AE}{9} \Rightarrow 3AE = 1 \times 9 \Rightarrow AE = \frac{9}{3}$$

$$AE = 3cm$$

سؤال : في المثلث ACD, $\overline{BE} // \overline{CD}$ جد قيمة x و $\overline{ED}$ إذا كان

$$AE = 3, BC = 8, ED = 3x - 3$$

الحل / نرسم المثلث ونحدد عليه المعطيات



بما أنه المعطى هو $\overline{BE} // \overline{CD}$

آذن حسب مبرهنة التناسب المثلثي

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED} \Rightarrow \frac{2}{8\,4} = \frac{3}{3x-3}$$

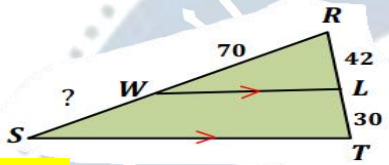
$$3x - 3 = 3 \times 4 \Rightarrow 3x = 12 + 3$$

$$3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

$$\therefore ED = 3x - 3 = 3 \times 5 - 3 \Rightarrow ED = 12$$

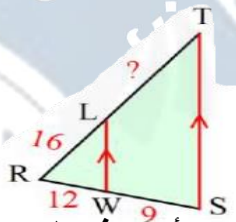
سؤال: جد طول القطعة المستقيمة المجهولة في الاشكال التالي: واجب

❷



Ans: $WS = 50$

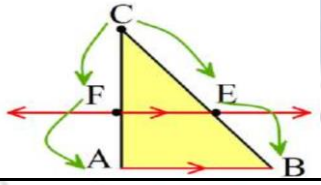
❶



Ans: $LT = 12$

تنبيه: رأس السهم الأحمر في الرسم يدل على التوازي.

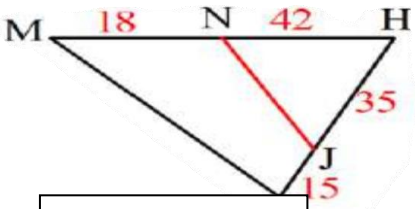
عكس مبرهنة التناسب المثلثي:

مبرهنة (9) نص المبرهنة	المعطى	النتيجة
اذا قسم مستقيم ضلعين في مثلث الى قطع متناسبة فان يكون موازيا للضلع الثالث (بدون برهان)	$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$ 	$\overline{AB} // \overleftrightarrow{FE}$

انتباه: الفراق بين مبرهنة التناسب المثلث وعكس مبرهنة التناسب المثلث:

- في مبرهنة التناسب المعطي هو التوازي والمطلوب هو طول أحد القطع المجهولة.
- في مبرهنة عكس التناسب المعطى هو طول كل القطع والمطلوب هو اثبات التوازي.

مثال (3) / في الشكل المجاور برهن $\overline{MK}//\overline{NJ}$؟



الحل /

بما انه المعطى طول كل القطع والمطلوب والتوازي.
اذن احسب مبرهنة عكس التناسب المثلثي

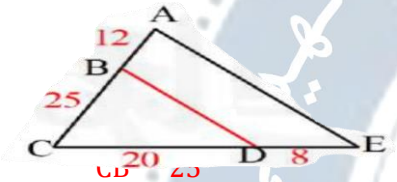
نجد التناسب في كل ضلع لكلي تحقق مبرهنه عكس

التناسب المثلثي

حسب مبرهنة التناسب المثلثي

$$\frac{HN}{NM}=\frac{42}{18}=\frac{7}{3}$$
$$\frac{HJ}{JK}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$$
$$\because \frac{HN}{NM}=\frac{HJ}{JK}=\frac{7}{3}$$
$$\therefore MK//NJ$$

مثال (4) / في المثلث ACE ، $BC=25$ ، $DC=20$ ، $ED=8$ ، $AB=12$ حدد اذا كان $AE//BD$ اولا ؟ برر اجابتك؟



الحل /

نرسم المثلث ونجدد علية المعطيات
بما انه المعطى طول كل القطع والمطلوب التوازي
اذن حسب مبرهنه عكس التناسب المثلثي
(نجد التناسب في كل ضلع لكلي تحقق مبرهنة
عكس التناسب المثلثي)
(حسب عكس مبرهنة التناسب المثلثي) اذن القطعتان غير متوازيتان

$$\frac{CB}{BA}=\frac{25}{12}$$
$$\frac{CD}{DE}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$
$$\because \frac{CB}{BA}\neq\frac{CD}{DE}$$

مثال (5) / في المثلث MQP ... $MN=9\iota MP=25\iota MR=4.5$, $MQ=12.5$ حيث $R\in\overline{MQ},N\in$ $\overline{MP}$ هل ان: $\overline{RN}//\overline{QP}$ اولا؟ برر اجابتك ؟

الحل /

رسم المثلث ثم نجد طول الضلع
$NP=25-9=16$
$RQ=12.5-4.5=8$
اذن حسب مبرهنة عكس التناسب المثلثي

$$\frac{MR}{RQ}=\frac{4.5}{8}$$
$$\frac{MN}{NP}=\frac{9}{16}=\frac{4.5}{8}$$
$$\because \frac{MR}{RQ}=\frac{MN}{NP}=\frac{4.5}{8}$$
$$\therefore \overline{RN}//\overline{QP}$$

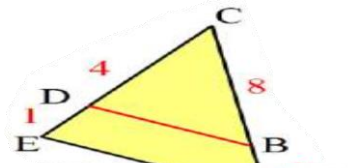
(او بطريقة أخرى غير قسمة التناسب الثاني على 2)
هي نضرب التناسب الأول في 2

$$\frac{.5\times 2}{8\times 2}=\frac{9}{16}$$

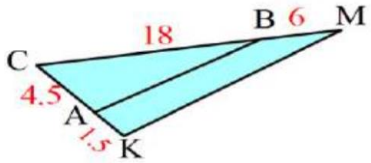
(حسب عكس مبرهنة التناسب المثلثي)

واجبات

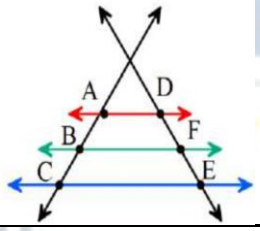
1. استعمل الشكل المجاور وبين ما إذا كان $\overline{AE}//\overline{BD}$؟



2. حدد فيما إذا كان $\overline{AB}//\overline{MK}$؟



مبرهنة طالس:

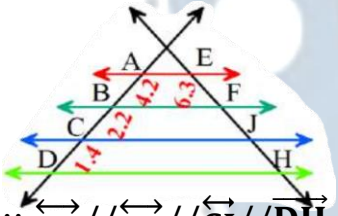
مبرهنة (10) نص المبرهنة	المعطى	النتيجة
اذا قطعت ثلاث مستقيمات متوازية أو اكثر بمستقيمين فإن القطع المحددة بالمستقيمات المتوازية تكون متناسبة (بدون برهان).	$\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BF}//\overrightarrow{CE}$ 	$\frac{AB}{BC}=\frac{DF}{FE}$

الرسم المنظوري: هو رسم الاجسام البعيدة بحيث تبدو اصغر والأجسام القريبة حيث تبدوا اكبر مع الحفاظ على هيئتها وتناسب مقاييسها لتبدو ثلاثية الأبعاد.

مثال (6) / استعمل مهندس الرسم المنظوري ليرسم خطوطا اولية تساعدهم على رسم أعمدة اتصالات متوازية، تحقق من رسمه بقياس المسافات بين الاعمدة، كم طول $\overline{FH}$؟

الحل /

ملاحظة / اذا كان في السؤال اكثر من ثلاث مستقيمات فيكون التناسب بين اول قطعة وثاني قطعة وثاني قطعة واخير قطعة، ومآ بينهما يتم جمعه معها .



$\because \overleftrightarrow{AE}//\overleftrightarrow{BF}//\overleftrightarrow{CJ}//\overleftrightarrow{DH}$ (حسب مبرهنة طالس)

$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{EF}{FH}$

$BD = BC + CD = 2.2 + 1.4 = 3.6$

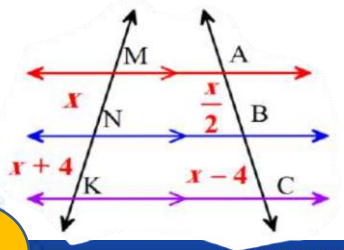
$\frac{4.2}{3.6}=\frac{6.3}{FH}$

$FH = \frac{3.6 \times 6.3}{4.2}$

$FH = 5.4m$

مثال (7) / في الرسم المجاور جد طول $\overline{MN}, \overline{KN}$؟

الحل /

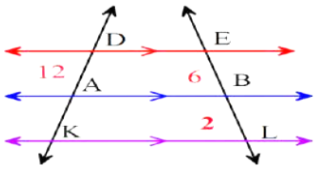


$\because \overleftrightarrow{MA}//\overleftrightarrow{NB}//\overleftrightarrow{KC}$
$\therefore \frac{MN}{NK}=\frac{AB}{BC}$ (حسب مبرهنة طالس)

$$\frac{x}{x+4}=\frac{\frac{x}{2}}{x-4}$$
$$\left[\frac{x}{2}(x+4)=x(x-4)\right]\times 2$$
$$x(x+4)=2x(x-4)\Rightarrow x^2+4x=2x^2-8x$$
$$2x^2-x^2-8x-4x=0\Rightarrow x^2-12x=0$$
$x(x-12)=0\Rightarrow$ اما $x=0$ تهمل
او $x-12=0\Rightarrow x=12$
$\therefore MN=x=12, KN=x+4=12+4=16$

سـؤال /جد طول القطعة $\overline{AK}$ في الشكل المجاور إذا علمت ان : واجب

$\overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{KL}$

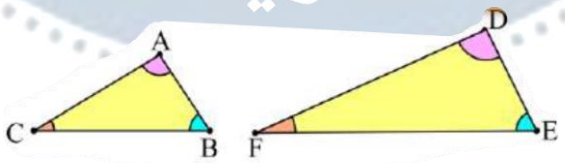


Ans: $\overline{AK}=4$

[5 – 3 – 2]	التناسب والقياس في المثلثات

التناسب والقياس في المثلثات: لإيجاد نسبة محيطين ونسبة مساحتين لمثلثان متشابهان يمكننا استعمال المبرهنة التالية:

مبرهنة (11) : اذا تشابه مثلثان بنسبة تتشابه $\frac{a}{b}$ فإن نسبة المحيطين للمثلثين تساوي $\frac{a}{b}$ ونسبة الساحتين $\frac{a^2}{b^2}$



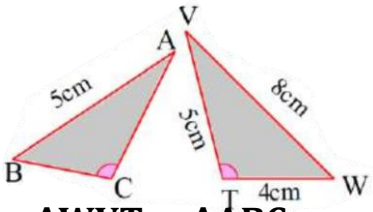
ترجمة المبرهنة: إذا كانت نسبة تشابه المثلثين $\Delta ABC, \Delta DFE$ هي $\frac{AC}{DF}=\frac{a}{b}$
فيكون نسبة محيطيهما هو $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\Delta DFE}}=\frac{AC}{DF}=\frac{a}{b}$ ونسبة مساحتهما هي $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DFE}}=\frac{(AC)^2}{(DF)^2}=\frac{a^2}{b^2}$

مثال (8) / ليكن $\Delta WVT \sim \Delta ABC$ جد محيط ΔABC ؟

الحل /

مجموع اضلاعه الثلاثة

نجد محيط المثلث ΔWVT $P_{\Delta WVT} = 5 + 8 + 4 = 17cm$



$\because \Delta WVT \sim \Delta ABC$

$\therefore \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\Delta WVT}} = \frac{AB}{VW}$ (حسب مبرهنة 11)

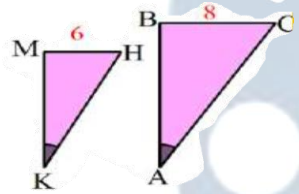
انتباه: أخذنا هذه النسبة لان الضلع AB معلوم و نظيره VW في المثلث الآخر أيضا معلوم

$\frac{P_{\Delta ABC}}{17} = \frac{85}{8} \Rightarrow 8P_{\triangle ABC} = 5 \times 17$

$P_{\triangle ABC} = \frac{85}{8} \Rightarrow P_{\Delta ABC} = 10.6cm$

مثال (9) / المثلثان $\Delta ABC \sim \Delta KMH$ جد مساحة ومحيط ΔABC علماً ان محيط ΔKMH يساوي $18cm$ مساحته $15cm^2$ ؟

الحل /



$\because \Delta ABC \sim \Delta KMH$

$\therefore \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\Delta KMH}} = \frac{BC}{MH}$ (حسب مبرهنة11).

$\therefore \frac{P_{\triangle ABC}}{18} = \frac{8}{6} \Rightarrow P_{\triangle ABC} = \frac{8 \times 18}{6} \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 24cm$

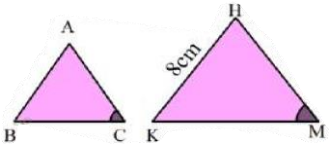
$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle KMH}} = \frac{(BC)^2}{(MH)^2}$ حسب مبرهنه 11

$\frac{A_{\triangle ABC}}{15} = \frac{(8)^2}{(6)^2} \Rightarrow \frac{A_{\triangle ABC}}{15} = \frac{64}{36}$

$A_{\triangle ABC} = \frac{64 \times 15}{36} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = 26.6cm^2$

مثال (10) / مثلثان $\Delta ABC \sim \Delta KMH$ مساحة ΔABC ضعف مساحة ΔKMH ما طول $\overline{AB}$ ؟

الحل /



نفرض $A_{\Delta KMH} = x$ فيكون ضعفها $A_{\Delta ABC} = 2x$

$\because \Delta ABC \sim \Delta KMH$
$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle KMH}} = \frac{(AB)^2}{(HK)^2}$ (حسب مبرهنة11)

$\frac{2\not{x}}{\not{x}} = \frac{(AB)^2}{(8)^2} \Longrightarrow \frac{2}{1} = \frac{(AB)^2}{64}$

$(AB)^2 = 2 \times 64$ بالجذر التربيعي للطرفين

$AB = \sqrt{2} \times 8 \Longrightarrow AB = 8\sqrt{2}cm$

مثال (11) / نسبة مساحة المثلث ABC الى نسبة مساحة المثلث KMH تساوي $\frac{16}{25}$ ما نسبة تشابه المثلثين وما نسبة التشابه بين محيطهما ؟

الحل /

$\because \Delta ABC \sim \Delta KMH$
$\therefore \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta KMH}} = \frac{a^2}{b^2}$ (حسب مبرهنة11)

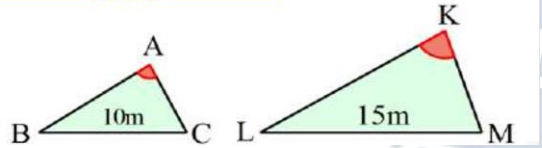
$\frac{16}{25} = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ تمثل نسبة التشابه بين المثلثين

$\therefore \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KMH}} = \frac{a}{b}$ حسب مبرهنة 11

$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KMH}} = \frac{4}{5}$ تمثل نسبة التشابه بين المحيطين

سؤال / $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ مساحة $A_{\triangle ABC} = 24m^2$ ما مساحة المثلث ΔKLM؟ **واجب**

$Ans: A_{\Delta KLM} = 54m^2$



تعلمنا سابقاً ثلاث تحويلات هندسية الانسحاب والانعكاس والدوران، وهذه التحويلات تحافظ على الهيئة والقياسات. سوف نتعلم في هذا البند تحويلاً جديداً يحافظ على الهيئة دون حفظ القياسات وهو التناسب الهندسي.

[1 – 2 – 5] التناسب الهندسي احداثياً

التناسب الهندسي احداثياً: هو تحويلاً يغير مقاييس الاشكال الهندسية دون تغير هيئتها في الشكل وصورته بالتناسب الهندسي يكونان دائماً متشابهين، مركز التناسب هو نقطة الأصل. $\acute{P}$

سنقصد دراسة التناسب الهندسي في هذا الدرس على المستوى الاحداثي، اذا تعاملت مع تناسب هندسي معامله الهندسي M فسوف يكون بإمكانك ان تجد صورة النقطة بضرب احداثياتها في M. $P(x,y) \xrightarrow{\text{تناسب هندسي}} \acute{P}(xM,yM)$

مثال (12) / يبين الرسم المجاور موقع صورة على شبكة الانترنت، ارسم حدود الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{5}{3}$؟

الحل

$A(3,4), B(0,4), C(0,0), D(3,0), M = \frac{5}{3}$

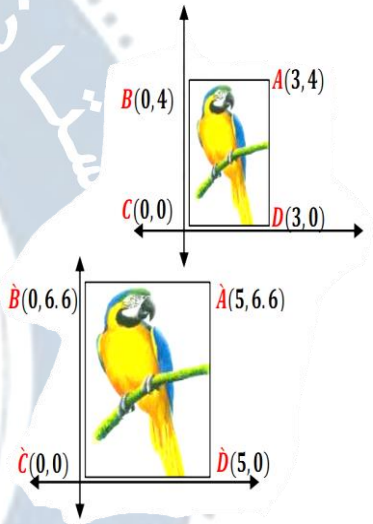
$P(x,y) \xrightarrow{\text{تناسب هندسي}} \acute{P}(xM,yM)$ تطبيق القانون العام على نقاط الرسم

$A(3,4) \to \acute{A}\left(3 \times \frac{5}{3}, 4 \times \frac{5}{3}\right) \to \acute{A}\left(\frac{15}{3}, \frac{20}{3}\right) \to \acute{A}(5, 6.6)$

$B(0,4) \to \acute{B}\left(0 \times \frac{5}{3}, 4 \times \frac{5}{3}\right) \to \acute{B}\left(\frac{0}{3}, \frac{20}{3}\right) \to \acute{B}(0, 6.6)$

$C(0,0) \to \acute{C}\left(0 \times \frac{5}{3}, 0 \times \frac{5}{3}\right) \to \acute{C}\left(\frac{0}{3}, \frac{0}{3}\right) \to \acute{C}(0,0)$

$D(3,0) \to \acute{D}\left(3 \times \frac{5}{3}, 0 \times \frac{5}{3}\right) \to \acute{D}\left(\frac{15}{3}, \frac{0}{3}\right) \to \acute{D}(5,0)$



ثم نرسم الرسم بعد ايجاد النقاط $\acute{A}, \acute{B}, \acute{C}, \acute{D}$ بعد اجراء التناسب عليها بمقدار $M = \frac{5}{3}$

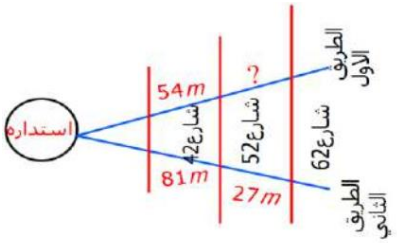
واجبات

1. ABC مثلث حيث $A(6,0), B\left(-3,\frac{3}{2}\right), C(3,-6)$ جد صورته بعد تصغيره بمعامل $\frac{1}{3}$ علماً ان مركز التناسب هو نقطة الاصل ؟
2. جد صورة المثلث ABC حيث $A(-1,-1), B(1,-2), C(1,2)$ تحت تأثير تناسب معامله 2؟

تركيز: في هذه الاسئلة الرسم غير معطى فتقوم برسم الاشكال قبل اجراء التناسب وبعد اجراء التناسب عليها.

مسائـل حياتيـة

سؤال / طرق: تمثل الخريطة المجاورة بعض الشوارع المتوازية وطريقين عبرها ما طول الطريق الاول بين الشارع 62 والشارع 52؟

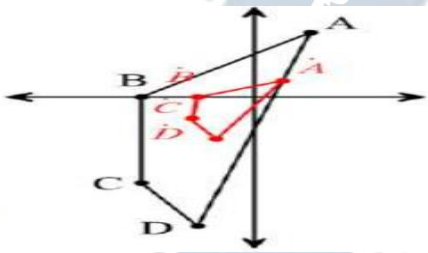


الحـل /

بما ان المستقيمات متوازي اذن حسب مبرهنة التناسب المثلثي نستبدل علامة السؤال بالحرف $x=?$

$$\frac{81}{27}=\frac{54}{x}\Rightarrow\frac{{}^{3}81}{\cancel{27}}=\frac{54}{x}\Rightarrow x=\frac{54}{3}\Rightarrow x=18m$$

سؤال / هندسة: جد صورة الشكل الرباعي $A(2,6),B(-4,0),C(-4,-8),D(-2,-12)$ حيث تحت تأثير تناسب معاملة $\frac{1}{4}$؟



الحـل /

تطبيق القانون العام على نقاط الرسم

$$P(x,y)\xrightarrow{\text{تناسب هندسي}}P'(xM,yM)$$

$$A(2,6)\to A'\left(2\times\frac{1}{4},6\times\frac{1}{4}\right)\to A'\left(\frac{2}{4},\frac{6}{4}\right)\to A'(0.5,1.5)$$

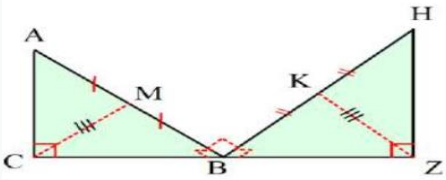
$$B(-4,0)\to B'\left(-4\times\frac{1}{4},0\times\frac{1}{4}\right)\to B'\left(\frac{-4}{4},\frac{0}{4}\right)\to B'(-1,0)$$

$$C(-4,-8)\to C'\left(-4\times\frac{1}{4},-8\times\frac{1}{4}\right)\to C'\left(\frac{-4}{4},\frac{-8}{4}\right)\to C'(-1,-2)$$

$$D(-2,-12)\to D'\left(-2\times\frac{1}{4},-12\times\frac{1}{4}\right)\to D'\left(\frac{-2}{4},\frac{-12}{4}\right)\to D'(-0.5,-3)$$

فكـــر

سؤال / **تحدِ:** في الرسم المجاور M منتصف AB و K منتصف $\overline{AB}$ الزوايا $\angle Z, \angle ABH, \angle C$



قآئمـة برهن أن :

$$\left(\frac{KZ}{CM}\right)^2 = \frac{(BZ)+(ZH)^2}{(BC)^2+(CA)^2}$$ ؟

الحـل / المثلث ABC القائم الزاوية في $\angle C$

حسب نظرية فيثاغورس يكون

$(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2, CM = \frac{1}{2}AB$ حسب مبرهنة (4)

المثلث القائم الزاوية في $\angle Z$ حسب نظرية فيثاغورس يكون

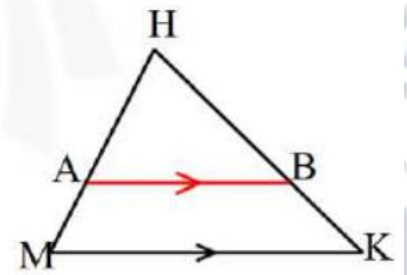
$(HB)^2 = (BZ)^2 + (ZH)^2, KZ = \frac{1}{2}HB$ حسب مبرهنة (4)

الطرف الاول $\left(\frac{KZ}{CM}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}HB}{\frac{1}{2}AB}\right)^2 = \left(\frac{HB}{AB}\right)^2$ الطرف الثاني $\frac{(BZ)^2+(ZH)^2}{(BC)^2+(CA)^2} = \frac{(HB)^2}{(AB)^2} = \left(\frac{HB}{AB}\right)^2$

$$\therefore \left(\frac{KZ}{CM}\right)^2 = \frac{(BZ)^2 + (ZH)^2}{(BC)^2 + (CA)^2}$$

سؤال / **اكتب:** ما تستطيع من تناسبيات إذا علمت أن $\overline{MK}//\overline{AB}$ في مثلث HKM ؟

الحـل /



مبرهنة التناسب المثلثي

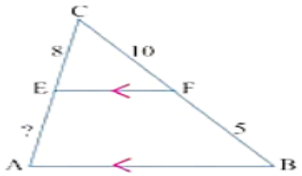
$$\because \overline{MK}//\overline{AB} \Rightarrow \therefore \frac{HA}{AM} = \frac{HB}{BK}$$

$$\frac{HA}{HM} = \frac{HB}{HK}$$

$$\frac{HM}{AM} = \frac{HK}{HB}$$

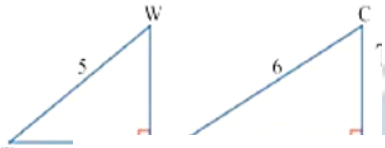
الأختيـار مـن متعـدد

1. اذا كان $\overline{AB}//\overline{El}$ فأن طول القطعة المستقيمة AE هو :



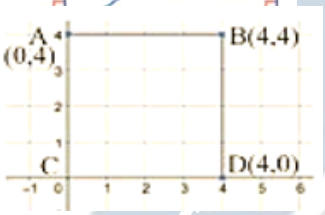
a) 4 ✓ b) 5
c) 2 d) 10

2. اذا كان $ABC \triangle \sim TWN \triangle$ اذا علمت ان ارتفاع المثلث TWN هو (3) فان مساحة المثلث ABC هي:



a) 8.64 ✓ b) 6
c) 7 d) 8

تم رسم الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{4}{3}$ فتكون كما في الرسم المجاور:



3. احداثيات النقطه A قبل التحويل هي:

a) $(0,3)°$ ✓ b) $(3,0)$
c) $(3,3)$ d) $(0,0)$

4. احداثيات النقطه B قبل التحويل هي:

a) $(0,3)$ b) $(3,0)$
c) $(3,3)$ ✓ d) $(0,0)$

5. احداثيات النقطه C قبل التحويل هي:

a) $(0,3)$ b) $(3,0)$
c) $(3,3)$ d) $(0,0)$ ✓

6. احداثيات النقطه D قبل التحويل هي:

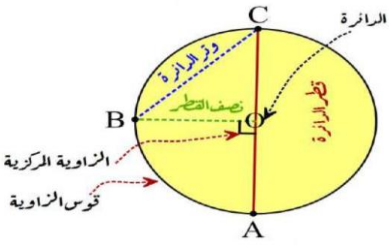
a) $(0,3)$ b) $(3,0)$ ✓
c) $(3,3)$ d) $(0,0)$

الدرس [4-5] الدائرة

الدائرة: هي مجموعة من النقاط المتصلة في المستوى والتي لها البعد نفسه عن نقطة ثابتة تسمى مركز الدائرة O ومجموعة زواياها $360°$.

سوف نقسم هذا الدرس الى قسمين الاول القوس والدائرة والثاني المماس.

[1 – 4 – 5]	القوس والدائرة



نصف القطر r: هو قطعة مستقيمة تدخل بين مركز الدائرة ونقطة ما على قوس الدائرة

وتر الدائرة: هو قطعة مستقيمة طرفاها على الدائرة دون ان تمر بمركز الدائرة.

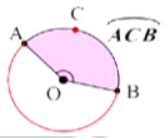
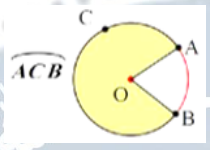
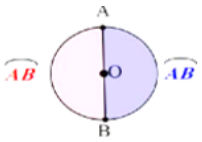
قطر الدائرة: هو وتر يمر مركز الدائرة.

الزاوية المركزية: هي الزاوية التي تقع الدائرة في نقطتين و رأسها في مركز الدائرة و كل زاوية مركزية في دائرة يقابلها قوس اعلى الدائرة يسمى قوس الزاوية كل زاوية بين عقرب بي ساعة هي زاوية مركزية.

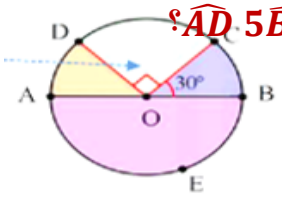
قياس الزاوية المركزية كما في قياس القوس المقابل لها ويرمز للقوس بالرمز $\overset{\frown}{AB}$ ويقاس بالدرجة القوسية

$$m\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$$

وهناك ثلاث انواع من الاقواس

القوس الاصغر (اصغر من 180°)	القوس الاكبر (اكبر من 180°)	قياس نصف الدائرة (يساوي 180°)
		

مثال (1) / جد قياس الزوايا والاقواس المجهولة للشكل المجاور $\overset{\frown}{AD}\ 5\ \overset{\frown}{BEA}\ 4\ \overset{\frown}{BCD}\ 3\ \overset{\frown}{DC}\ 2\ \overset{\frown}{BC}\ 1$؟



القوس المربع على الزاوية يدل على أن الزاوية قائمة و يكون قياسها 90°

الحل/

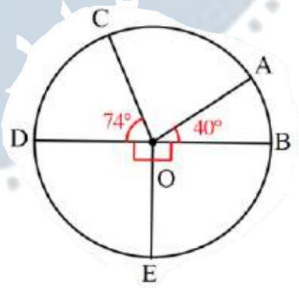
1. $\overset{\frown}{BC}: m\angle COB = 30^\circ \Rightarrow \therefore m\overset{\frown}{BC} = 30$
2. $\overset{\frown}{DC}: m\angle COD = 90^\circ \Rightarrow \therefore m\overset{\frown}{DC} = 90$
3. $\overset{\frown}{BCD}: m\angle COB + m\angle COD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ \Rightarrow \therefore m\overset{\frown}{BCD} = 120$
4. $\overset{\frown}{BEA}: m\angle BOA = 180^\circ \Rightarrow \therefore m\overset{\frown}{BEA} = 180$
5. $\overset{\frown}{AD}: m\angle AOD = 180^\circ - (m\angle COD + m\angle COB) \Rightarrow m\angle AOD = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)$
6. $m\angle AOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \therefore m\overset{\frown}{AD} = 60$

مثال (2) / جد قياس الزوايا والأقواس فيما يلي:

❶ $\angle COA$ ❷ $\overset{\frown}{DBE}$ ❸ $\overset{\frown}{BAC}$ ❹ $\overset{\frown}{DCA}$؟

الحل/

(لأنها نصف الدائرة)



1. $m\angle COA = 180^\circ - (74^\circ + 40^\circ)$
   $m\angle COA = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$
2. $\overset{\frown}{DBE}: m\overset{\frown}{DB} + m\overset{\frown}{BE} = 180 + 90 = 270$
   $\therefore m\overset{\frown}{DBE} = 270$
3. $\overset{\frown}{BAC}: m\angle BOA + m\angle COA = 40^\circ + 66^\circ = 106^\circ$
   $\therefore m\overset{\frown}{BAC} = 106$
4. $\overset{\frown}{DCA}: m\angle DOC + m\angle COA = 74^\circ + 66^\circ = 140^\circ$

$\therefore m\overset{\frown}{DCA} = 140$

مثال (3) / الدائرة ادناه مقسمة الى ثلاث اجزاء متطابقة جد قياس الاقواس التالية. $\widehat{ABC}, \widehat{AB}$؟

الحـل/

جميع الزوايا المركزية في الدائرة $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ لكل زاوية.

$\widehat{ABC}: m\angle AOB + m\angle BOC = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ$

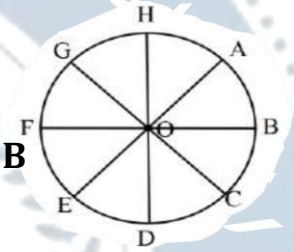
$\therefore m\widehat{ABC} = 240$

$\widehat{AB}: m\angle AOB = 120^\circ \Rightarrow \therefore m\widehat{AB} = 120$

مثال (4) / الدائرة ادناه مقسمة الى 8 اجزاء متطابقة جد قياس الاقواس التالية. $1-\widehat{AB}\ \ 2-\widehat{ABC}\ \ 3-\widehat{GDB}$؟

الحـل/ جميع الزوايا المركزية في الدائرة $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ لكل زاوية.

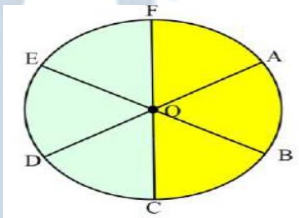
1. $\widehat{AB}: m\angle AOE = 45^\circ \Rightarrow \therefore m\widehat{AB} = 45$
2. $\widehat{ABC}: m\angle AOB + m\angle BOA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$
   $\therefore m\widehat{ABC} = 90$
3. $\widehat{GDB}: m\angle GOF + m\angle FOE + m\angle EOD + m\angle DOC + m\angle COB$
   $\Rightarrow 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 225^\circ$
   $\therefore m\overrightarrow{GDB} = 225$



سـؤال / الدائرة مقسمة 6 اجزاء متطابق جد قياس الاقواس التالية: **واجب**

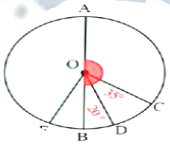
$1-\widehat{AB}\ \ 2-\widehat{ABC}\ \ 3-\widehat{ABD}$؟

Ans: $1-60\ ,2-120\ ,3-180$



سـؤال / في الدوائر ادناه جد قياس الزوايا والاقواس فيما يلي : **واجب**

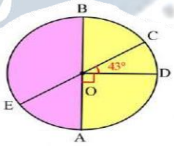
❷



① $m\angle AOC$ ② $m\widehat{DC}$ ③ $m\widehat{DB}$
④ $m\angle DOA$

Ans: ① 125°, ②35, ③20, ④160°

❶



① $m\angle AOD$ ② $m\angle COB$
③ $m\widehat{DBE}$ ④ $m\widehat{DAB}$

Ans: ① 90° ②47°, ③223, ④270

لاحظ: المثلثين والزاويتين المركزيتين 1, 2 والقوسين $\widehat{AB}, \widehat{CA}$ والوترين $\overline{AB}, \overline{CA}$ إذا تطابقت الزاويتان تطابق القوسان وتطابق المثلثان فيطابق الوتران $\overline{AB}, \overline{CA}$
و يمكنك ان تستعمل مثل هذه الطريقة للتوصل الى المبرهنة التالية (بدون برهان)

مبرهنة (12): مبرهنة الاقواس والاوتار والزاوية المركزية في كل دائرة او دائرتين متطابقتان

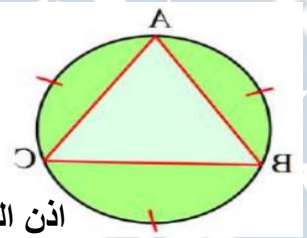
❖ إذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق وتراها وبالعكس $\angle 1 \cong \angle 2 \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{CA}$

❖ إذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق قوساهما وبالعكس $\angle 1 \cong \angle 2 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CA}$

إذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CA} \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{CA}$

مثال (5) / استعمل مبرهنه القواس والاوتار لتبرهن ان المثلث ABC متساوي الاضلاع في الدائرة المجاورة علما ان : $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$ ؟

الحل/



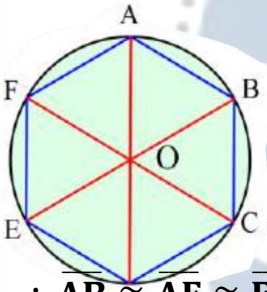
$\because \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$ معطى

$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{CB}$ حسب مبرهنه الاقواس والاوتار

(إذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس)

اذن المثلث ABC متساوي الاضلاع لأنه اضلاعه متطابقة حسب مبرهنة 12

مثال (6) / الدائرة المجاورة مقسمه الى اجزاء مطابقة برهن ان الشكل ABCDEF سداسي منتظم ؟



الحل/

مجموعه زوايا الدائرة $= 360^\circ$ لكل زاوية في الشكل السداسي $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

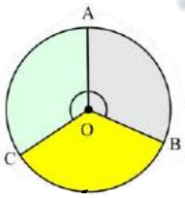
معطى $\because \angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4 \cong \angle 5 \cong \angle 6 = 60^\circ$

$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AF} \cong \overline{FE} \cong \overline{ED} \cong \overline{DC} \cong \overline{BC}$

حسب مبرهنة الاقواس والاوتار

(إذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس)

اذن الشكل ABCDEF سداسي منتظم لان جميع اضلاعه مطابقه



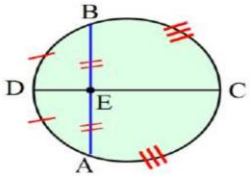
سؤال / الدائرة المجاورة مقسمة الى 4 اجزاء مطابقة برهن ان الشكل $ABCD$ مربع؟

واجب

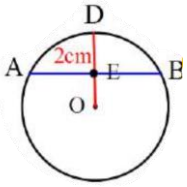
مبرهنة (13) : مبرهنة القط العمودي في كل دائرة :

القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر ينصفكلا قوسيه

$\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow AO = BO, \overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{DB}, \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{AC}$

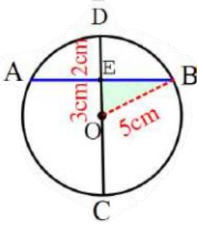


مثال (7) / استعمل مبرهنه القط العمودي وجد طول الوتر $\overline{AB}$ اذا علمت ان نصف القط $DE =$ $2cm$ و $OD = 5cm$ ؟



الحـل/ نرسم نصف القطر $\overline{OC}$ ليكتمل قطر الدائرة ونرسم نصف القط $\overline{OB} = 5cm$

$OE = 5 - 2 = 3cm$



نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث EBO لتجد القطعة EB

$(OB)^2 = (OE)^2 + (EB)^2$

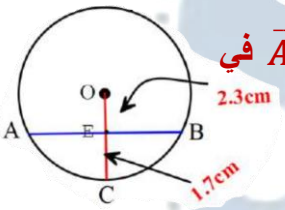
$(5)^2 = (3)^2 + (EB)^2$

$(EB)^2 = 25 - 9 \Rightarrow (EB)^2 = 16 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} EB = 4cm$

القطر DC عمودي على الوتر AB وبنصف (احسب مبرهنة القط العمودي)

$\therefore AB = 2 \times EB = 2 \times 4 = 8cm$

مثال (8) / في الشكل المجاور استعمل مبرهنة القط العمودي وجد طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ في دائرة مقربا لأقرب عشر ؟



الحـل/ نرسم نصف القطر $\overline{OD}$ ليكتمل قط الدائرة

$\overline{OA} = 2.3 + 1.7 = 4cm$ ونرسم نصف القطر

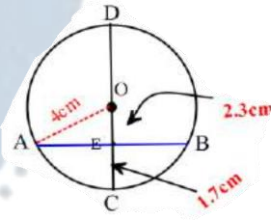
نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث EAO لنجد القطعة EA

$(OA)^2 = (OE)^2 + (EA)^2$

$(4)^2 = (2.3)^2 + (EA)^2$

$(EA)^2 = 16 - 5.29 \Rightarrow (EA)^2 = 10.71$

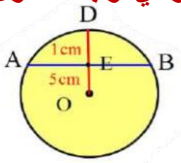
$\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} EA \approx 3.3cm$



القطر DC عمودي على الوتر AB وبنصف (احسب مبرهنة القط العمودي)

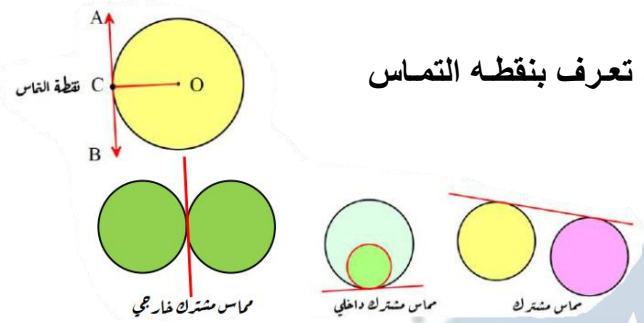
$\therefore AB = 2 \times EA = 2 \times 3.3 = 6.6cm$

سـؤال / استعمل مبرهنة القط العمودي وجد طول الوتر $\overline{AB}$ اذا علمت ان نصف القطر $OE = 5cm$ و $OD =$ $6cm$؟ واجب



Ans: $AB = 2\sqrt{11}cm$

[2 – 4 – 5] المماس في الدائرة



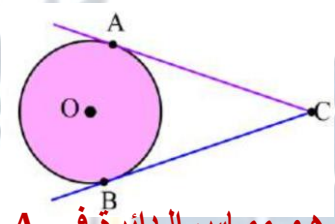
مماس الدائرة : هو المستقيم الذي يلاقي الدائرة في نقطة واحده تعرف بنقطه التماس ويكون عموديا على نصف القط في نقطة التماس.

المماس المشترك: الدائرتين هو مستقيم مماس لكل من الدائرتين.

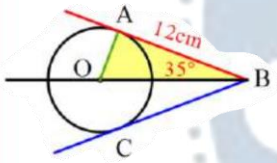
مبرهنة (14) : القطعتان المماستان المرسومتان في لدائرة من نقطه خارجه عنها متطابقتان اذن $\overline{CB}, \overline{CA}$ مماسان للدائرة من نقطه C

$$\therefore \overline{CB} \cong \overline{CA}$$

مبرهنة المماسين :



مثال (9)/ دائرة مركزها O في الشكل المجاور $\overline{AB}$ هو مماس الدائرة في A ، $m\angle ABO = 35°$ جد قياس الزاوية $m\angle AOB$ ثم جد طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ ؟



الحـل /

$\overline{AB}$ مماس للدائرة في A معطي

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{AO}, m\angle OAB = 90°$ حسب مبرهنه المماسين

$\because m\angle OAB = 90°, m\angle OBA = 35°$

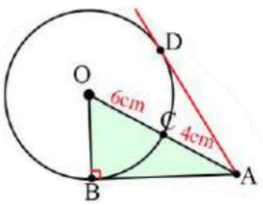
مجموعه زوايا المثلث ABO هو $180°$

$\therefore m\angle AOB = 180° - (90° + 35°)$

$m\angle AOB = 180° - 125° = 55°$

من مبرهنه المماسين $BC = 12cm$

مثال (10) / استعمل مبرهنه المماسين لتجد طول القطع المستقيمة $\overline{AD}, \overline{AB}$ في الشكل المجاور ؟



الحـل /

$OC = 6cm$ وهو يمثل نصف قطر الدائرة اذان $OB = 6$

$AO = 6 + 4 = 10cm$

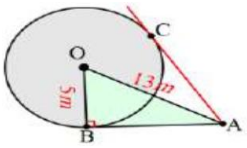
نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث BOA لنجد القطعة AB

$$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (10)^2 = (6)^2 + (AB)^2$$

$$(AB)^2 = 100 - 36 \Rightarrow (AB)^2 = 64 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AB = 8cm$$

بما انه $\overline{AB}$ مماس الدائرة في B وعمودي علي $\overline{BO}$

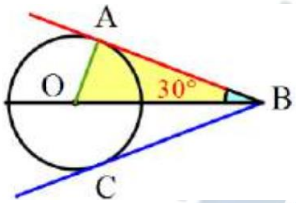
من مبرهنه المماس $\therefore AD = 8cm$



واجبـــات

1. استعمل مبرهنة المماسين لتجد طول القطع المستقيمة $\overline{AB}, \overline{AC}$ في الشكل المجاور

AnS: $AB = 12cm, AC = 12cm$

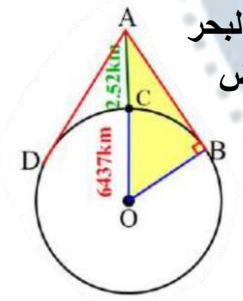


2. دائـرة مركزهـا فـي الشـكل المجـاور $\overline{AB}$ هـو مماس للـدائرة فـي A , $30°$ ، جد قياس الزاوية $m\angle AOB$ ثم جد طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ علمان ان $\overline{AB} = 4cm$

Ans: $BC = 4cm, m\angle AOB = 60°$

تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

سؤال : **جغرافية** (براكين) ترتفع فوهه بركان (هولالاي)عن مستوى سطح البحر $2.52km$ احسب المسافة بين قمه البركان ومستوى الاف اذا علمت ان نصف قطر الارض $6437km$ تقريبا مقربه للناتج اقرب كيلو متر ؟



الحـل /

$OC = 6437km$ وهو يمثل نصف قطر الدائرة اذن $OB = 6437km$

$AO = 6437 + 2.52 = 6439.52km$ حسب مبرهنه المماس

نستخدم نظريه فيثاغورس في المثلث BOA لنجد القطعة AB

$$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2$$

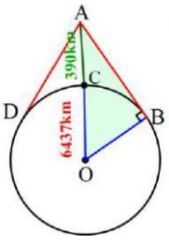
$$(6439.52)^2 = (6437)^2 + (AB)^2$$

$$(AB)^2 = (6439.52)^2 - (6437)^2$$

$$(AB)^2 = 41467417.83 - 4143969$$

$$(AB)^2 = 32448.83 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} AB \approx 180km$$

هي المسافة بين القمه والاف بالتقريب



سؤال / **محطه فضائيه:** تبعد محطه مير الروسية عن مستوى سطح البحر $390km$ تقريبا ما المسافة بين المحطة والاوف اذا علمت ان نصف فقط الارض $6437km$ تقريبا ؟

الحـل /

$OC = 6437km$ وهو يمثل نصف قطر الدائرة اذن $OB = 6437km$

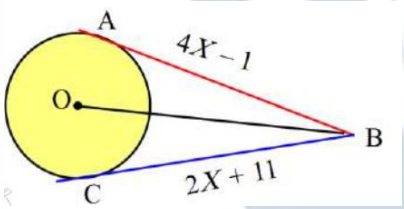
$AO = 6437 + 2.52 = 6439.52km$ حسب مبرهنه المماس

نستخدم نظريه فيثاغورس في المثلث BOA لنجد القطعة AB

$$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2$$
$$(6827)^2 = (6437)^2 + (AB)^2$$
$$(AB)^2 = (6827)^2 - (6437)^2$$
$$(AB)^2 = 46607929 - 4143969$$
$$(AB)^2 = 5172960 \xrightarrow{\text{بالجذر}} AB \approx 2274km$$

هي المسافه بين المحطه والاوف

فكـــر



سؤال / **تحد:** استعمل مبرهنه المماسين وجد طول $\overline{AB}$ في الدائرتين المجاورتين حسب مبرهنه المماسين القطعتان المماسين المرسومتان الدائرة من نقطه خارجيه عنها متطابقتان ؟

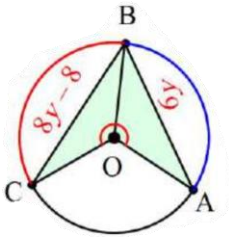
الحـل /

$\therefore \overline{AB} \cong \overline{BC}$

$4x - 1 = 2x + 11 \Rightarrow 4x - 2x = 11 + 1$

$2x = 12 \xrightarrow{\div 2} x = 6 \Longrightarrow \therefore AB = 4x - 1 = 4(6) - 1 = 23$

$\therefore AB = 23$



سؤال / **حس عددي:** اذا كانت الزاويتان $\angle COB, \angle AOB$ متطابقتان جد طول $\overline{CB}$ في الدائرة المجاورة حسب مبرهنه الاقواس والاوتار اذا تطابقت زاويتان مركزيتان يطابق وتراهما وبالعكس ؟

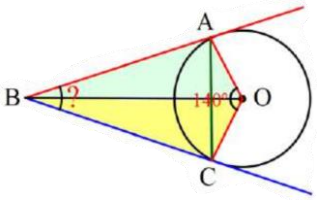
الحـل /

$\therefore \overline{CB} \cong \overline{AB}$

$8y - 8 = 6y \Rightarrow 8y - 6y = 8$

$2y = 8 \overset{\div 2}{\Rightarrow} y = 4 \Longrightarrow \therefore CB = 8y - 8 = 8(4) - 8 = 24$

$\therefore CB = 24$



سؤال : **اكتب: الخطوات اللازمة لتجديد قياس الزاوية $\angle ABC$ في الرسم المجاور اذا علمت ان $\overline{BO}$ ينصف الزاويه $\angle AOC$ والتي قياسها $140°$ ؟**

الحـل /

مثلث BAO فيه

$\overline{AB} \perp \overline{AO} \Rightarrow m\angle BOA = 90°$ مبرهنه المماس

$$m\angle AOB = \frac{140°}{2} = 70°$$

$m\angle ABO = 180° - (90° + 70°)$

$m\angle ABO = 180° - 160°$

$m\angle ABO = 20°$

مجموعة زوايا المثلث $180°$

بما انه $\overline{BO}$ ينصف الزاوية $\angle AOC$ اذن ايضا ينصف $\angle ABC$

$\therefore m\angle ABC = 2 \times m\angle ABO$

$m\angle ABC = 2 \times 20°$

$m\angle ABC = 40°$

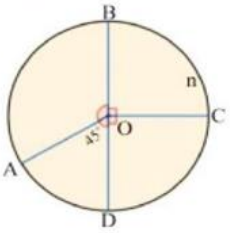
او تجد قياسها من خلال المثلث BCO لانة الزاوية $\angle ABC$ مقسومه الي زاويتان $\angle ABO$ و $\angle CBO$

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال 1: اختر الإجابة الصحيحة:

1. قياس الزاوية $\angle AOB$ هو :

a) $180°$ b) $135°$ √ c) $90°$ d) $45°$



2. قياس القوس $\widehat{AB}$ هو :

a) $(0,3)$ √ b) $(3,0)$ c) $(3,3)$ d) $(0,0)$

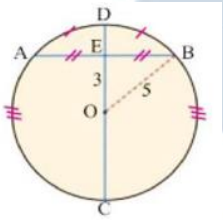
3. قياس القوس $\widehat{ABC}$ هو :

a) 180 b) 90 c) 225 √ d) 135

4. قياس القوس $\widehat{BC}$ هو:

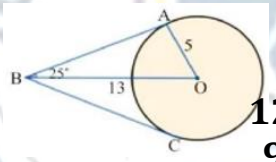
a) 90 √ b) 42 c) 45 d) 135

5. طول الوتر AB في الشكل المجاور هو:



a) 12 b) 10 c) 6 d) 8 √

انظر الى الشكل واجب عن الاسئلة :



6. قياس $\angle AOB$ هو:

a) $115°$ b) $120°$ c) $65°$ √ d) $90°$

7. طول القطعة المستقيمة BC هو:

a) 10 b) 14 c) 12 √ d) 5

الدرس [5-5] المثلث والدائرة والقطع المستقيمة

سوف نقسم هذا الدرس الى قسمين :

الاول: المثلث والدائرة و الثانية: القطع المستقيمة والدائرة

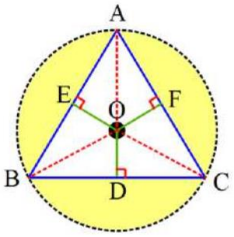
[5 – 5 – 1]	المثلث والدائرة

سوف نقسم هذا البند الى نوعين:

النوع الاول: رسم الدائرة المحيطية بالمثلث

النوع الثاني: رسم الدائرة المحاطة بالمثلث

النوع الاول : رسم الدائرة المحيطة بالمثلث (الخارجية للمثلث) :



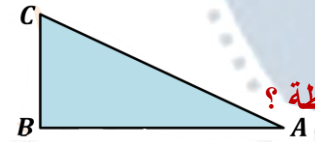
الدائرة المحيطة بالمثلث: لكل مثلث او لكل ثلاث نقاط ليس على استقامة واحده دائرة واحده تحيط به مركزها نقطه تقاطع المحاور الثلاثة للمثلث كما في مبرهنه القطع المتوسطة التي تطرقنا لها في الدرس الثاني لهذا الفصل .

المحاور: هي الأعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفات تلتقي بنقطه واحده 0 تكون متساوية البعد عن رؤوس وهذه النقطة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

استنتاجات تعريف المحور

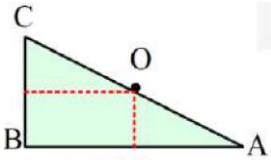
- النقط F, D, E هي مضاعفات الاضلاع $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ على التركيب
- اطوال القطع $AF = FC, BE = AE, BD = DC$ لأنها متناصفات
- الزوايا $\angle D, \angle F, \angle E$ قائمه و قياسها $90°$
- من مبرهنه مضاعفات زوايا المثلث (الدرس 2) تكون القطع $r = OA = OB = 0C$ متساويه و تساوي نصف قطر الدائره و هي مضاعفات زوايا رؤوس المثلث.

تنبيه : رسم الدائرة المحيطة بالمثلث تعتمد على محاور المثلث



مثال (1) / جد نقطه تقاطع محاور المثلث ABC كما في الشكل المجاور ثم ارسم الدائرة المحيطة ؟

الحل /

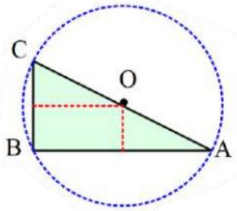


نرسم محور للضلع $\overline{BA}$ الذي يخرج من منتصف ويوازي الضلع $\overline{BC}$

نرسم محور للضلع $\overline{BC}$ الذي يخرج من منتصفه ويوازي الضلع $\overline{AB}$

محور الضلع $\overline{CA}$ هو منتصف الضلع حيث هو ملتقى المحاور الثلاثة للمثلث

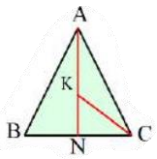
وهو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث الان نرسم الدائرة ABC



الآن نرسم الدائرة

مثال (2) / المثلث ABC متساوي الساقين $\overline{AB} = \overline{AC}$, N منتصف $\overline{BC}$ برهن ان K هي نقطه تقاطع $\overline{KA} \cong \overline{BC}$ محاور المثلث ABC

ثم ارسم الدائرة المحيطة في الشكل المجاور

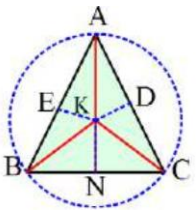


الحـل /

نرسم القطعة $\overline{KB}$ فتكون K نقطه تقاطع زوايا المثلث

نرسم اعمدة من K الى منتصفات الاضلاع فتتكون المحاور $\overline{NK}, \overline{DK}, \overline{EK}$

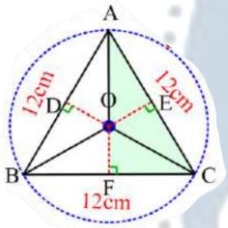
فتكون K نقطه تقاطع المحاور (حسب مبرهنه المحار) وهي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث.



مثال (3) / المثلث ABC منتظم طول ضلعه 12cm حدد نقطه تقاطع محاور ثم ارسم الدائره المحيطه بيت اوجد طول قطرها؟

الحـل /

بما ان المثلث متساوي الاضلاع إذا الأعمدة المقامة على اضلاعها تنصفها وتلتقي في نقطه واحده في هي نقطه تقاطع محاوره o



اذن o هي مركز الدائرة (حسب مبرهنه المحاور)

ثم نرسم الدائرة المحيطة

المثلث AFC فيه $FC = 6cm, AC = 12cm$

نستخدم نظريه فيثاغورس $(AC)^2 = (FC)^2 + (AF)^2$

$$(12)^2 = (6)^2 + (AF)^2 \Rightarrow 144 = 36 + (AF)^2$$

$$(AF)^2 = 144 - 36 \Rightarrow (AF)^2 = 108 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AF = 6\sqrt{3}$$

$$\overset{\text{المتوسطه القطع}}{\Longrightarrow} = \frac{2}{3}AF \Rightarrow AO = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} \Rightarrow AO = 4\sqrt{3}$$ نصف القطر

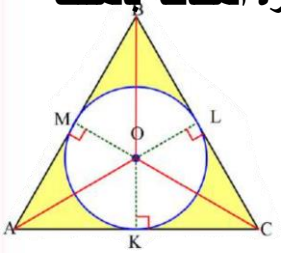
فيكون القطر $2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}cm$

سـؤال / مثلث ABC قائم متساوي الساقين وترى $\overline{BC}$ حدد نقطه تقاطع محاور هذي المثلث وارسم الدائرة المحيطة؟

واجب

النوع الثاني: رسم الدائرة المحيطة بالمثلث (المثلث المحيط بالدائرة) (الداخلية للمثلث):

الدائرة المحيطة بالمثلث: لكل مثلث توجد دائرة داخل هذه المثلث مماسة لأضلاعه الثلاثة وتسمى الدائرة المحاطة بالمثلث



نستفاد من مبرهنه منتصفات زوايا المثلث في رسم الدائرة المحيطة بالمثلث

- تتقاطع منتصفات زوايا المثلث في نقطه وحده
- نقطه تقاطع منتصفات الزوايا على المسافة نفسها من الاضلاع الثلاثة $OA = OB = OC$
- القطع $OL = OK = OM = r$ وتساوي نصف قطر الدائرة

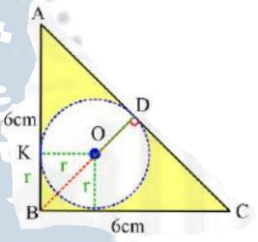
مثال (4) / ABC مثلث قائم متساوي الساقين طول كل من ساقيه $6cm$ ارسم الدائرة المحيطة وجد مساحة الدائرة ؟

الحـل /

من نظريه فيثاغورس $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ نجد طول الوتر

$$(AC)^2 = (6)^2 + (6)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 36 + 36$$

$$(AC)^2 = 72 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AC = 6\sqrt{2}cm$$



من مبرهنه (4) $AD = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = 3\sqrt{2}cm$

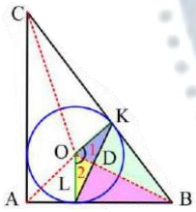
مبرهنه المماس $AD = AK = 3\sqrt{2}$

نصف القطر $r = AB - AK = 6 - 3\sqrt{2}cm$

مساحة الدائرة $A = r^2\pi \Rightarrow A = (6 - 3\sqrt{2})^2\pi$

$$A = (1.75)^2\pi \rightarrow A = 3.1\pi cm^2$$

مثال (5) / الدائرة التي مركزها O محاط بالمثلث ABC برهن ان $\overline{BO}$ منتصف $\angle LOK$ والمحور $\overline{KL}$ الشكل المجاور ؟



الحـل /

من مبرهنه المماس $BK = BL$

انصاف اقطار دائرة $OK = OL$

بما ان المثلثان BOK, BOL متطابقان (من مبرهنه الطابق ض.ض.ض)

اذن من التطابق نحصل على $m\angle 1 = m\angle 2 \Leftarrow \overline{BO}$ ينصف $\angle LOK$ المثلثان KDB, LDB متطابقان من مبرهنه الطابق (ض.ز.ض)

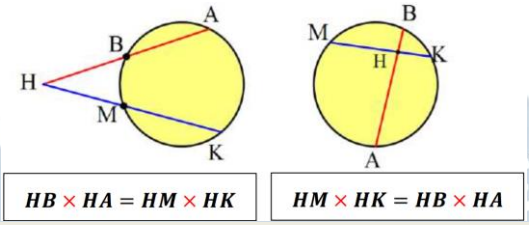
$$\overline{KL} = \overline{BO}$$

$\therefore \overline{KL}$ محور $\overline{BO}$

[2 – 5 – 5] القطع المستقيمة والدائرة

تعلمت في الدرس (4-5) كيف تجد اطوال اجزاء من وتر يتقاطع مع قطر عمودي عليه في هذا الدرس سوف نتعلم كيف نجدد اطوال الاوتار متقاطعة اخره.

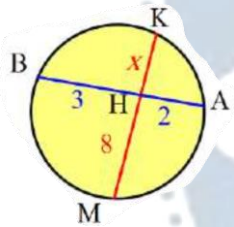
مبرهنة (15) القاطعين : اذا قطع مستقيمان دائرة تشكل على كل منهما قطعتان مستقيمتان ناتجا ضرب طوليهما



متساويان

- إذا كانت نقطه التقاطع H خارج الدائرة: فيكون القانون لكل وتر هو حاصل ضرب جزء الوتر الخارج من الدائرة × طول الوتر الكلي
- إذا كانت نقطه التقاطع H داخل الدائرة: فيكون القانون لكل وتر هو حاصل ضرب الجزء الاول من الوتر × الجزء الثاني من الوتر

مثال (6)/ جد قيمه x وطول كل وتر للشكل المجاور تنبيه نقطه التقاطع داخل الدائرة



الحل /

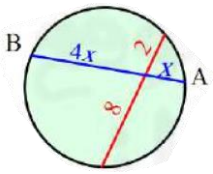
نستخدم مبرهنه القاطعين $HM \times HK = HB \times HA$

$$8 \times x = 3 \times 2 \Rightarrow 8x = 6 \overset{\div 8}{\Longrightarrow} x = \frac{6}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

طول الوتر AB $\therefore AB = 3 + 2 = 5$

طول الوتر MK $MK = 8 + x = 8 + \frac{3}{4} = \frac{35}{4}$

مثال (7) / جد قيمه x وطول كل قطعه مجهولة تنبيه نقطه التقاطع داخل الدائرة



الحل /

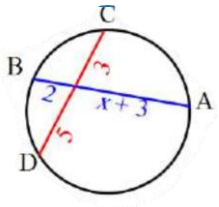
نستخدم مبرهنه القاطعين $HM \times HK = HB \times HA$

$$8 \times 2 = 4x \times x \Rightarrow 16 = 4x^2 \overset{\div 4}{\Longrightarrow} x^2 = 4 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}$$

$x = 2$

طول الوتر $\therefore AB = 4x + x = 5x = 5 \times 2 = 10$

مثال (8) / جد قيمه x وطول كل قطعه مجهولة



الحـل /

$HD \times HC = HB \times HA$ نستخدم مبرهنه القاطعين

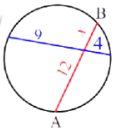
$5 \times 3 = 2 \times (x+3) \Rightarrow 15 = 2x + 6$

$15 - 6 = 2x \Rightarrow 2x = 9 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} x = \frac{9}{2} = 4.5$

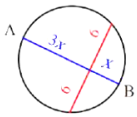
$AB = 2 + x + 3 = x + 5 = 4.5 + 5 = 9.5$ طول الوتر

سـؤال / جد قيمه x وطول كل قطعه مجهولة للأشكال التالية : واجب

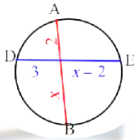
Ans: $AB = 15$ ❶



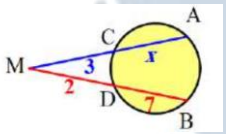
Ans: $AB = 8\sqrt{3}$ ❷



Ans: $AB = 8, DE = 7$ ❸



مثال (9)/ جد قيمه x وطول كل من الشكل المجاور تنبيه نقطه التقاطع خارج الدائرة



الحـل /

نستخدم مبرهنه القاطعين تجمع

$MD \times MB = MC \times MA$

نجمع طول الوتر الكلي

$2 \times (2+7) = 3 \times (3+x) \Rightarrow 2 \times 9 = 3 \times (3+x)$

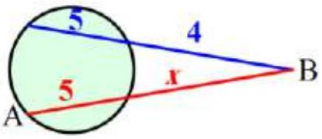
$18 = 9 + 3x \Rightarrow 3x = 18 - 9 \Rightarrow 3x = 9 \overset{\div 3}{\Rightarrow} x = 3$

$\therefore BM = 2 + 7 = 9$ BM طول الوتر الكلي

$AM = 3 + x = 3 + 3 = 6$ AM طول الوتر طول الوتر

مثال (10)/ جد قيمه x وطول كل قطعه مجهولة من الشكل المجاور تنبيه نقطه التقاطع خارج الدائرة

الحـل /



نستخدم مبرهنه القاطعين/ عندما لا يعطي كل الرموز ليس بالضرورة كتابة قانون المبرهنة

$$x \times (x+5) = 4 \times (4+5) \Rightarrow x^2 + 5x = 36$$

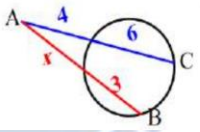
$$\Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{=} (x+9)(x-4) = 0$$

اما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -90$ يهمل

او $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$\therefore AB = x + 5 = 4 + 5 = 9$ طول الوتر AB

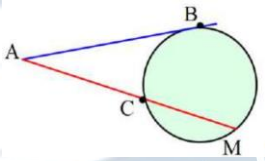
سـؤال / جد قيمه x وطول كل قطعه مجهولة من الشكل المجاور ؟ **واجب**



Ans: $AB = 8$

يمكن استعمال المبرهنة التاليه إذا كان هناك مستقيم قاطع للدائرة واخر مماس للدائرة فيكون المماس هو الجزء الخارجي والكلي للقطعة نفسها.

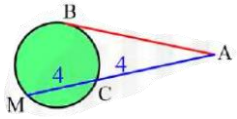
مبرهنة (16) مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة : من نقطه خارج الدائرة إذا رسم مماساً مستقيماً قاطعاً لها فان ناتج ضرب طولي قطعتين القاطع يساوي مربع طول قطعه المماس



$$AC \times AM = (AB)^2$$

تذكير : نقطه التقاطع خارج الدائرة فيكون قانون قاطع الدائرة هو حاصل ضرب جزء الوتر الخارج من الدائرة × طول الوتر الكلي

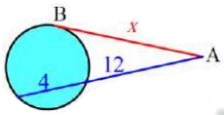
مثال (11) / جد طول قطعه المماس $\overline{AB}$ ؟



الحـل /

$$AC \times AM = (AB)^2$$
$$4 \times (4+4) = (AB)^2$$
$$4 \times 8 = (AB)^2$$
$$32 = (AB)^2 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} AB = \sqrt{32}$$
$$\therefore AB = 4\sqrt{2}$$

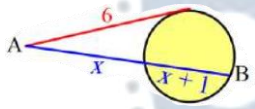
مثال (12) / جد قيمه x وطول $\overline{AB}$ ؟



الحـل /

$$12 \times (12+4) = (x)^2$$
$$12 \times 16 = (x)^2$$
$$192 = (x)^2 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} x = \sqrt{192} \Rightarrow x = 8\sqrt{3}$$
$$\therefore AB = 8\sqrt{3}$$

مثال (13) / جد قيمه x وطول قطعه المماس $\overline{AB}$



الحـل /

نستخدم مبرهنة المماس والقاطع (مجموع طول القاطع، AB)

$$x \times (x + x + 1) = (6)^2 \Rightarrow x(2x+1) = 36$$
$$2x^2 + x - 36 = 0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Rightarrow} (2x+9)(x-4) = 0$$

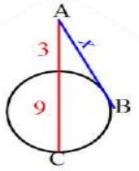
اما $2x + 9 = 0 \Rightarrow 2x = -9 \Rightarrow x = \dfrac{-9}{2}$ يهمل

او $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

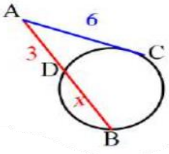
$$\therefore AB = x + x + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

مثال (12) / جد قيمه x وطول $\overline{AB}$ في الاشكال التالية :

Ans: $AB = 6$ ❶

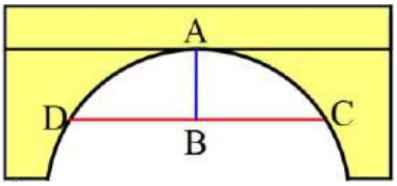


Ans: $AB = 12$ ❷



تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

سؤال :

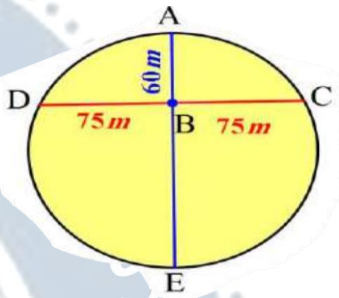


بناء: يرتكز جسر على قوس دائرة كما مبين في الشكل المجاور $\overline{AB}$ محور $\overline{DC}$ و $AB = 60m$ و $DC = 150m$ ما قطر الدائرة ؟

الحـل /

بما انه $\overline{AB}$ محور $\overline{DC}$ اذن $BD = BC = 75m$ حسب تعريف المحاور

من مبرهنة القاطعين $BD \times BC = AB \times BE$

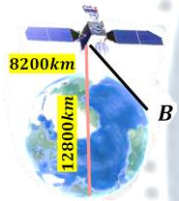


$75 \times 75 = 60 \times BE \Rightarrow 5625 = 60BE \xrightarrow{\div 60}$

$BE = \frac{5625}{60} \Rightarrow BE = 93.75m$

القطر $AE = AB + BE = 60 + 93.75 = 153.75m$

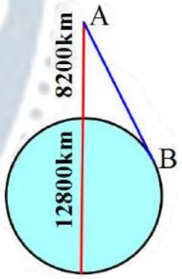
سؤال :



فضاء: قمر صناعي يدور حول الارض على ارتفاع $8200km$ إذا كان قطر الأرض $12800km$ تقريبا ما المسافه التي تفصل القمر عن نقطة B في الشكل المجاور ؟

الحـل /

باستخدام مبرهنة المماس والقاطع (مجموعة طول قاطع الدائرة الداخل الخارج)



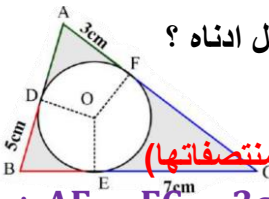
$8200 \times (12800 + 8200) = (AB)^2$

$8200 \times 21000 = (AB)^2$

$(AB)^2 = 172200000 \xrightarrow{\text{بالجذر}}$

$AB \approx 13122.5km$

سؤال :



هندسة: O نقطة تقاطع محاور المثلث ABC جد محيط المثلث مستعملا الشكل ادناه ؟

الحـل /

بما انه O نقطة تقاطع المحاور اذن من تعريف المحاور (هي الأعمدة المقامة على اظلاع مثلث من منتصفاتها)

$\therefore AF = FC = 3cm, AD = DB = 5cm, BE = EC = 7cm$

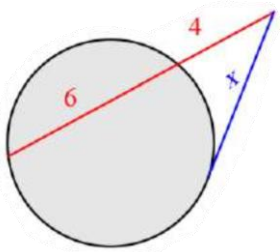
محيط المثلث هو مجموعه اضلاعه الثلاثة $\therefore$ المحيط $= AC + AD + BC$

المحيط $= (3 + 3) + (5 + 5) + (7 + 7)$

المحيط $= 6 + 10 + 14 = 30cm$

فكـــر

سؤال اكتشف الخطاء: فيما يلي حالات الايجار قيمة في الشكل المحاور ايهما الحل الخطأ برر اجابتك ؟



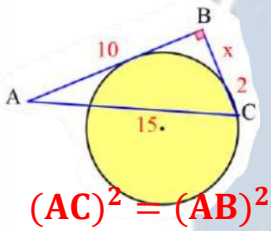
الحل الاول	الحل الثاني
مبرهنة المماس والقاطع $= 4 \times 6$ x^2 $24 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$	مبرهنة المماس والقاطع $= x^2$ 40 $x = 2\sqrt{10}$

الحـل /

الحل الاول هو الخطأ لأنه طول القاطع عندما تكون نقطة التقاطع خارج الدائرة هو حاصل ضرب الجزء الخارج من الدائرة في طول القاطع كله

فيكون $4 \times (4 + 6) = 40$ وليس $4 \times 6 = 24$ فيكون الحل الثاني هو الصحيح

سؤال تحد: في الشكل المجاور $AB = 10$ هو مماس للدائرة جد قيمه x ؟



الحـل /

باستخدام الطريقة فيثاغورس $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(15)^2 = (10)^2 + (x + 2)^2$

$225 = 100 + (x + 2)^2 \Rightarrow (x + 2)^2 = 225 - 100$

$(x + 2)^2 = 125 \xrightarrow{\text{بالجذر}} x + 2 = \pm 5\sqrt{5}$

اما $x + 2 = 5\sqrt{5} \Rightarrow x = 5\sqrt{5} - 2 \Rightarrow x \approx 9.18$

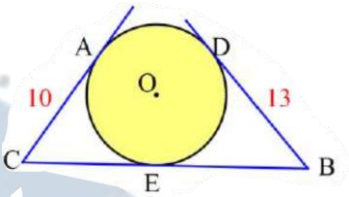
او $x + 2 = -5\sqrt{5} \Rightarrow x = -5\sqrt{5} - 2 \approx -13.18$ تهمل

سؤال

مساله مفتوحة: في الشكل المجاور دائرة O , $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BD}$ مركزها مماس للدائرة جد طول القطعة $\overline{BC}$ ؟

الحـل /

حسب مبرهنة المماس



$EB = DB = 13$

$CE = CA = 10$

$\therefore BC = CE + EB$

$BC = 10 + 13$

$BC = 23$

سؤال

اكتب: مساله تستعمل فيها المحاور ومنصفات الزوايا لمثلث في رسم دائرة محيطة به؟

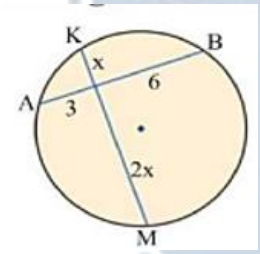
الحـل /

رجع مثال 2 من هذه الدرس

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال

انظر الشكل واجب عن الأسئلة:



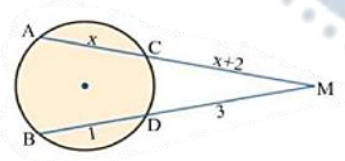
1. قيمة X هي :

a) 2
b) 6
c) 9
d) 3 ✓

2. طول الوتر $\overline{MK}$ هو :

a) 12
b) 9 ✓
c) 5
d) 4

انظر الشكل واجب عن الأسئلة:



1. قيمة X هي :

a) 2
b) 3
c) 1 ✓
d) 4

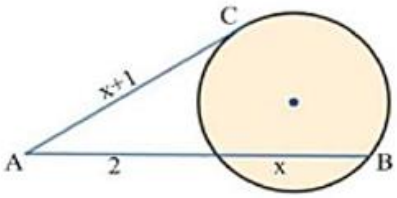
2. طول $\overline{BM}$ هو :

a) 4 ✓
b) 6
c) 5
d) 2

3. طول $\overline{AM}$ هو:

a) 4 √ b) 2
c) 6 d) 3

انظر الشكل واجب عن الأسئلة:



1. قيمة X هي :
a) 1 b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$ √ d) 0

2. طول المماس هو:
a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{3}+1$ √
c) 4 d) $\sqrt{5}+1$

3. طول $\overline{AB}$ هو:
a) $\sqrt{3}+6$ b) $\sqrt{3}+2$ √
c) $\sqrt{3}+5$ d) $\sqrt{3}+4$

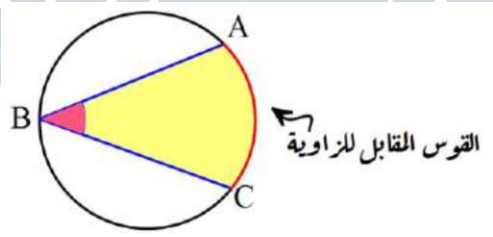
الدرس [5-6] الزوايا والدائرة

سوف نقسم الدرس الى ثلاثة اقسام:
الاول: الزاوية المحيطية و الثاني: الزاوية المماسة و الثالث: الزاوية الداخلية والخارجية في الدائرة

[1 – 6 – 5]	الزاوية المحيطية

الزاوية المحيطية : هي الزاوية التي رأسها نقطة من نقاط الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة.
سوف نتعرف على كيفية ايجاد قياسها باستعمال القوس المواجه لها بواسطة المبرهنات الاتية التي سنقابلها بدون برهان.

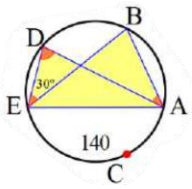
مبرهنة (17) مبرهنة الزوايا المحيطية : قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المساوي لها.



$$m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$$

ملاحظة / ليس دائماً ولكن كثيراً، إذا كانت الزاوية رمزها مكون من ثلاث احرف فإن الحرف الاول والاخير هو قوسها.

مثال (1) / جد قياس الزوايا المحيطية التالية ❶ $m\angle D$ ❷. $m\angle BAD$ في الشكل المجاور.



الحل /

❶ $m\angle D = \frac{1}{2} m\widehat{ECA}$ مبرهنة الزوايا المحيطية

$m\angle D = \frac{1}{2} \times 140 \Rightarrow \therefore m\angle D = 70°$

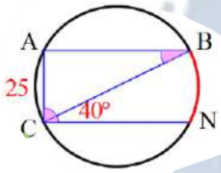
❷ $m\angle BAD = \frac{1}{2} m\widehat{DB}$ مبرهنة الزوايا المحيطية

القوس $\widehat{DB}$ مجهول، قياس الزاوية معلوم $\angle BED$

والذي تشترك مع $\angle BAD$ بنفس القوس اذن قياس الزاويتين متساوي.

$m\angle BAD = m\angle BED = 30°$

مثال (2)/ جد قياس كل مما يأتي في الشكل المجاور :



$m\angle ACB$ ❷ $m\angle ABC$ ❶

$m\widehat{BN}$ ❸

الحل /

❶ $m\angle D = \frac{1}{2} m\widehat{ECA}$ مبرهنة الزوايا المحيطية

$m\angle ABC = \frac{1}{2} \times 25 \Rightarrow \therefore m\angle ABC = 12.5°$

❷ $m\angle ACB = 180° - (m\angle BAC + m\angle ABC)$

زاوية قائمة — مجموع زوايا المثلث ABC تساوي $180°$

$m\angle ACB = 180° - (90° + 12.5)$

$m\angle ACB = 180° - 102.5 = 77.5°$

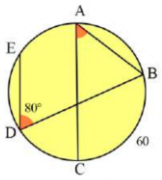
نلاحظ أن القوس $\widehat{BN}$ يقابل الزاوية $\angle BCN$ فنطبق قانون مبرهنة الزوايا المحيطية عليه

❷ $m\widehat{BN}: m\angle BCN = \frac{1}{2} m\widehat{BN}$

$40 = \frac{1}{2} m\widehat{BN}$ طرفين في وسطين

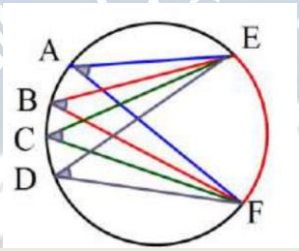
$m\widehat{BN} = 2 \times 40 \Rightarrow \therefore m\widehat{BN} = 80$

سؤال / جد قياس كل مما يأتي من الشكل المجاور. 1) $\widehat{BE}$ 2) $m\angle CAB$ ؟ **واجب**



Ans: $m\widehat{BE} = 160, m\angle CAB = 30°$

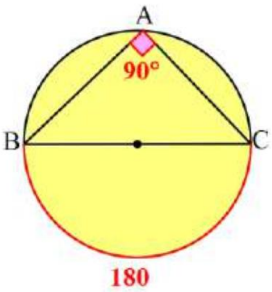
مبرهنة (18) مبرهنة الزوايا المحيطية المواجهة للقوس نفسه : كل الزوايا المحيطية التي تواجه قوسا مشتركاً على



الدائرة تتطابق

$$m\angle A \cong m\angle B \cong m\angle C \cong m\angle D = \frac{1}{2} m\widehat{EF}$$

هنالك حالة خاصة للزوايا المحيطية عندما تكون قائمة:



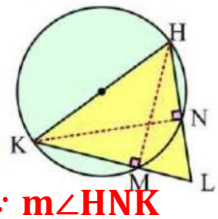
- كل زاوية محيطية تواجه نصف دائرة تكون قائمة وقياسها $90°$ فيكون قياس قوسها 180 لانه نصف دائرة
- كل زاوية محيطية تواجه قطراً تكون قائمة
- كل زاوية محيطية قائمة تواجه قطراً.

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{BC} = 90°$$

تذكير : مجموع الاقواس الكلية في الدائرة هي 360 .

مثال (3) / دائرة قطرها $\overline{KH}$ تقطع $\overline{HL}$ في N وتقطع $\overline{KL}$ في M برهن ان $\overline{HM}, \overline{KN}$ ارتفاعات في المثلث HKL في الشكل ادناه ؟

الحل /



$\because m\angle HNK$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{KH}$

$\therefore m\angle HNK = 90°$ زاوية قائمة من الحالة الخاصة

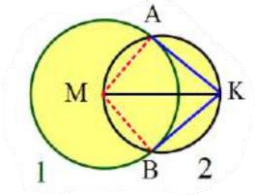
فيكون $\overline{KN}$ ارتفاع في المثلث HKL من تعريف ارتفاعات المثلث الدرس2

$\because m\angle HNK$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{KH}$

$\therefore m\angle HMK = 90°$ زاوية قائمة من الحالة الخاصة

فيكون $\overline{HM}$ ارتفاع في المثلث HKL

مثال (4) / اذا علمت ان M مركز الدائرة و$\overline{MK}$ هو قطر الدائرة 2 برهن ان $\overline{KB}$ و$\overline{KA}$ ممارسات الدائرة 1 في الشكل ادناه ؟



الحل /

نرسم $\overline{KB}$ و $\overline{MA}$ انصاف اقطار في الدائرة

$\because m\angle MBK , m\angle MAK$ زوايا محيطية تواجه القطر $\overline{MK}$

$\therefore m\angle MBK = m\angle MAK = 90°$ زوايا قائمة من الحالة الخاصة

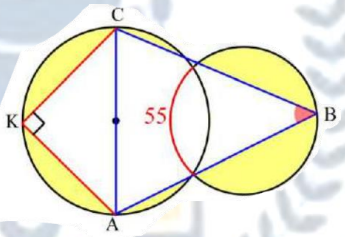
أذن حسب تعريف المماسان (الدرس4)

يكون $\overline{KB}$ و $\overline{KA}$ مماسان للدائرة 1

لأنه المماس يكون عمودياً على نصف القطر من نقطة التماس (يكون زاوية قائمة)

$m\angle MBK , m\angle MAK$ زوايا قائمة

سؤال / جد قياس كل مما يأتي. $m\angle CK - 1$ $m\angle CBA - 2$ ؟ **واجب**

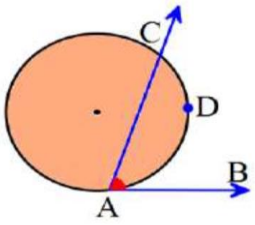


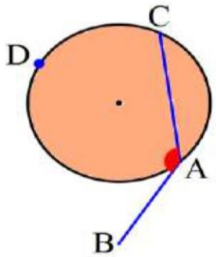
Ans: $m\angle CKA = 90°, m\angle CBA = 27.5°$

[2 – 6 – 4] الزاوية المماسية

هي الزاوية التي يشكلها مماس الدائرة مع مستقيم اخر يمر في نقطة التماس (وتر الدائرة)

مبرهنة (19) مبرهنة الزوايا المماسية : إذا تقاطع مماس الدائرة مع مستقيم يمر في نقطة التماس يكون قياس الزاوية بينهما قياس القوس المقطع.

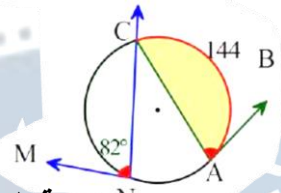




$$m\angle A = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{ADC}$$

مثال (5) / باستعمال مبرهنة الزوايا المماسية جد قياس كل مما يأتي :

$m\overset{\frown}{NC}$ ❷ $m\angle BAC$ ❶



الحـل /

1- $m\angle BAC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{CA}$ مبرهنة الزوايا المماسية

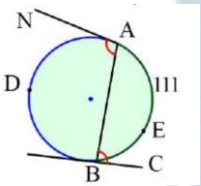
$m\angle BAC = \frac{1}{2} \times 144$ نعوض قيمة القوس

$m\angle BAC = 72°$

2- $m\overset{\frown}{NC}: m\angle CNM = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{NC}$ الزاوية المماسية المقابلة للقوس

$82 = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{NC}$ نعوض قيمة الزاوية

مثال (6) اثرائي / جد قياس كل مما يأتي من الشكل :



$m\angle NAB$ ❷ $m\angle ABC$ ❶

الحـل /

1- $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AEB}$ مبرهنة الزوايا المماسية

$m\angle ABC = \frac{1}{2} \times 111$ نعوض قيمة القوس

$m\angle ABC = 55.5°$

2- $m\angle NAB = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{ADB}$ الزاوية المماسية

نجد $m\overset{\frown}{ADB}$ من خلال مجموع اقواس الدائرة الكلية مطروحاً منها القوس الآخر

$m\angle NAB = \frac{1}{2} \times (360 - 111)$

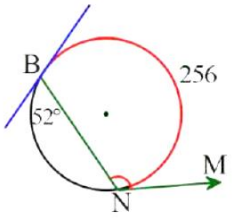
$m\angle NAB = \frac{1}{2} \times 249$

$m\angle NAB = 124.5°$

ملاحظة: عندما لا يعطيك حرف ثالث في القوس تضع من عندك أي حرف مختلف لكي تسمي اسم القوس من ثلاث احرف

مثلاً: في مثال الواجب تضع حرف C على القوس الأحمر لكي تسمي القوس $\overset{\frown}{BCN}$ حتى تختلف عن تسمية القوس الأسود

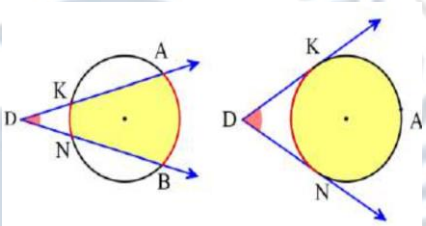
سؤال / جد قياس كل مما يأتي $1 - m\angle MNB$ $2 - m\widehat{BN}$ من الشكل ؟ **واجب**



Ans: $m\angle MNB = 128°, m\widehat{BN} = 104$

[3 – 6 – 4] الزوايا الداخلية والخارجية في الدائرة

مبرهنة (20) مبرهنة الزوايا الخارجية: إذا تقاطع مستقيمان خارج الدائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين قياس القوسين المقتطعين



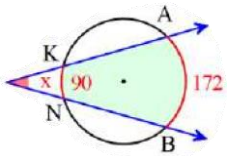
القوس الكبير — $m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN})$ — القوس الصغير

$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{KAN} - m\widehat{KN})$

تنبيه : لا يجوز طرح القوس الصغير من الكبير لان الناتج يكون سالب وهذ غير ممكن.

مثال (7) / جد قيمة X في كل الاشكال التالية :

❶



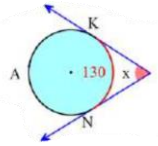
الحل /

$m\angle x = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$m\angle x = \frac{1}{2}(172 - 90)$ نعوض قيم الاقواس

$$m\angle x = \frac{1}{2}(82) \Rightarrow \therefore m\angle x = 41^\circ$$

الحـل /

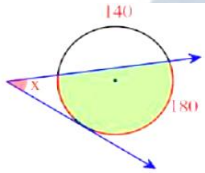
② 

نجد $m\widehat{KAN}$ من ناتج طرح مجموع الأقواس الكلية للدائرة من القوس الصغير
$360 - 1$

$m\angle x = \frac{1}{2}(m\widehat{KAN} - m\widehat{KN})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$m\angle x = \frac{1}{2}((360 - 130) - 130)$ نعوض قيم الاقواس

$$m\angle x = \frac{1}{2}((230) - 130) \Rightarrow m\angle x = \frac{1}{2}(100)$$
$$\therefore m\angle x = 50^\circ$$

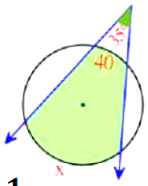
③ SoL 

القوس الصغير $= 360 - (140 + 180)$
$= 360 - 320 = 40$
نجده من خلال مجموع الأقواس المعلومة مطروحاً من مجموع أقواس الدائرة الكلية

$m\angle x = \frac{1}{2}(180 - 40)$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$m\angle x = \frac{1}{2}(140)$

$\therefore m\angle x = 70^\circ$

④ SoL 

هنا المطلوب هو قياس القوس الكبير

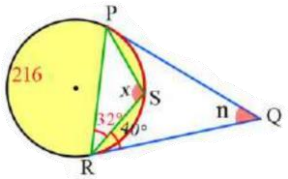
$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$35 = \frac{1}{2}(x - 40)$ نعوض معطيات السؤال

$\left[35 = \frac{1}{2}(x - 40)\right] \times 2 \xrightarrow{\text{نتخلص من الكسر}} 70 = x - 40$

$70 + 40 = x \Longrightarrow x = 110$

مثال (8) / جد قيم الزوايا المجهولة في الشكل ادناه :



الحـل /

$$m\widehat{RSP} = 360 - 216 = 144$$

$$m\angle n = \frac{1}{2}\left(m\widehat{RP} - m\widehat{RSP}\right)$$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$$m\angle n = \frac{1}{2}(216 - 144)$$ نعوض قيم الاقواس

$$m\angle n = 36°$$

مثال (9) / جد قيمة الزوايا المجهول x, y, z من الشكل ادناه

الحـل /

$$m\angle x = \frac{1}{2}m\widehat{RP}$$ مبرهنة الزوايا المحيطية

$$m\angle x = \frac{1}{2} \times 216$$ نعوض قيمة قوسها

$$m\angle x = 108°$$

$m\angle O = m\widehat{DB}$ زاويا مركزيه

$50 = m\widehat{DB} \rightarrow \therefore m\widehat{DB} = 50$

$m\angle Z = \frac{1}{2}m\widehat{DB}$ مبرهنه الزاوية المماس

$m\angle Z = \frac{1}{2} \times 50 \rightarrow \therefore m\angle Z = 25°$

$\overline{CA}$ مماس الدائرة في نقطة B اذن حسب تعريف المماس تكون الزاوية $\angle B$ قائمة

$\angle B = \angle Z + \angle y \Rightarrow 90 = 25 + \angle y \Rightarrow 90 - 25 = \angle y$

$\angle y = 65°$

من خلال مجموعه زواياه المثلث CBO القائم الزاوية في

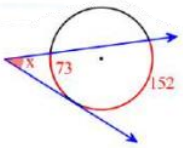
$\angle B + \angle O + \angle x = 180° \rightarrow 90° + 50° + \angle x = 180°$

$\angle x = 180° - 140° \rightarrow \angle x = 40°$

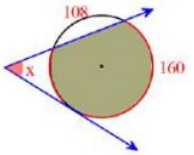
او بطريقة ثانية نستطيع يجاد $\angle x$ من خلال مبرهنة الزوايا الخارجية

سـؤال / جد قيم x في كل مماياتي من الاشكال؟ واجب

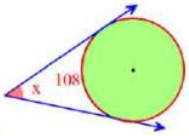
Ans: $m\angle x = 39.5°$ ❶



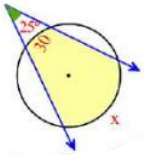
Ans: $m\angle x = 34°$ ❷



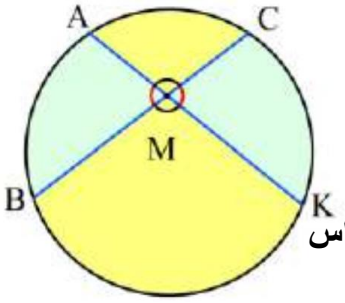
Ans: $m\angle x = 72°$ ❸



Ans: $m\hat{x} = 80$ ❹



مبرهنة (21) مبرهنة الزوايا الداخلية في الدائرة : : اذا تقطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزوايا بينهما يساوي نصف مجموعه قياس القوسين القطبين



$$m\angle CMK = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{CK} + m\overset{\frown}{AB})$$

وبنفس القانون البقية الزوايا $m\angle AMB, m\angle BMK, m\angle AMC$ مع ملاحظة تبديل الاقواس

تذكير : الزوايا المتقابلة بالراس متساوية بالقياس

مثال (10) / جد قياس $\angle ADB$ مستعملا مبرهنه الزوايا الداخلية ؟

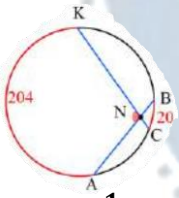
الحـل /

مبرهنه الزوايا الداخلية $m\angle ADB = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{NK})$

$m\angle ADB = \frac{1}{2}(44 + 102)$ تعريف قيم الاقواس

$$m\angle ADB = \frac{1}{2}(146)$$
$$m\angle ADB = 73^\circ$$

مثال (11) / جد قياس $\angle KNA$ من الشكل المجاور :

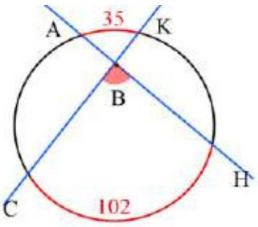


الحـل /

مبرهنة الزوايا الداخلية $m\angle KNA = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{KA})$

نعوض قيم الاقواس $m\angle KNA = \frac{1}{2}(20 + 204)$

$$m\angle KNA = \frac{1}{2}(224)$$
$$m\angle KNA = 112^\circ$$

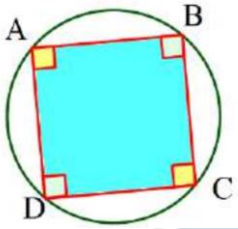


سؤال / جد قياس $\angle HBC$ من الشكل المجاور ؟

واجب

Ans: $m\angle HBC = 68.5°$

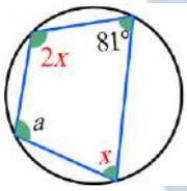
يمكن ايجاد دائرة في الرؤوس الأربعة الرباعي ويسمي هذا الرباعي بالرباعي الدائري.



مبرهنة (22) مبرهنة الرباعي الدائري: مبرهنة في كل رباعي دائري مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين يساوي $180°$

$$m\angle A + m\angle C = 180°, m\angle B + m\angle D = 180°$$

تركيز الزوايا المتجاورة مجموعها قياساتها $180°$



مثال (12) / جد قيمة x, a في الشكل المجاور ؟

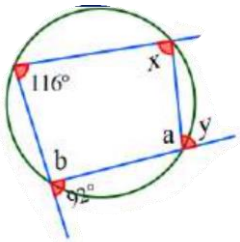
الحل /

مبرهنة الرباعي الدائري

$$a + 81° = 180°$$
$$a = 180° - 81° \Rightarrow a = 99°$$

مبرهنه الرباعي الدائري

$$2x + x = 180°$$
$$3x = 180° \Rightarrow x = 60°$$



مثال (13) / جد $m\angle x, m\angle y$

الحل /

نسمي الزاوية المتجاورة مع y باسم a

ونسمي الزاوية المتجاورة مع $92°$ باسم b

مبرهنه الرباعي الدائري $a + 116° = 180°$

زوايا متجاوره $a + y = 180°$

$$a = 180° - 116° \Rightarrow a = 64°$$

$$64 + y = 180° \Rightarrow y = 180° - 64$$
$$y = 116°$$

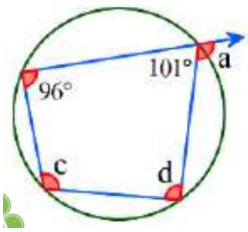
زوايا متجاورة $b + 92° = 180°$

$b = 180^\circ - 92^\circ \Rightarrow b = 88^\circ$

مبرهنة. الرباعي الدائري $b + x = 180^\circ$

$88^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 88^\circ$

$x = 92^\circ$



مثال (14) / جد قياس الزوايا المجهولة ؟

الحـل /

تسمي الزاوية المتجاورة مع 101° باسم a

زوايا متجاورة

$a + 101^\circ = 180^\circ$

$a = 180^\circ - 101^\circ \Rightarrow a = 79^\circ$

مبرهنة الرباعي الدائري

$c + 101^\circ = 180^\circ$

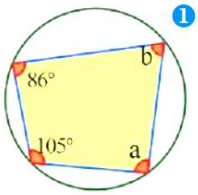
$c = 180^\circ - 101^\circ \Rightarrow c = 79^\circ$

مبرهنة الرباعي الدائري

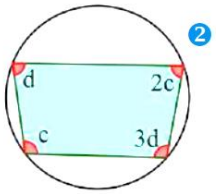
$d + 96^\circ = 180^\circ$

$d = 180^\circ - 96^\circ \Rightarrow d = 84^\circ$

سـؤال / جد قياس كل مماياتي من الاشكال التالية ؟ واجب



Ans: $m\angle a = 94^\circ, m\angle b = 75^\circ$

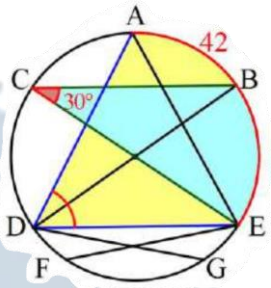


Ans: $m\angle c = 60^\circ, m\angle d = 45^\circ$

تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

سؤال : **زجاج:** رسم أحد الفنانين الرسم ادناه على الزجاج جد قياس $\angle ADE$ إذا علمت ان $\angle BEC = 30°$ وقياس $\overset{\frown}{AB} = 42$؟

الحـل /



$m\angle BEC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BE}$ مبرهنه الزاوية المحيطة

$30 = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BE} \xrightarrow{\text{طرفين في وسطين}} m\overset{\frown}{BE} = 30 \times 2 \Rightarrow m\overset{\frown}{BE} = 60$

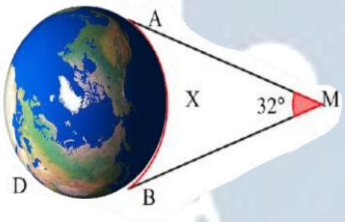
$m\angle ADE = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AE}$ مبرهنه الزاوية المحيطة

$m\angle ADE = \frac{1}{2} \times 102 \Rightarrow m\angle ADE = 51°$

$m\overset{\frown}{AE} = m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BE}$

$m\overset{\frown}{AE} = 42 + 60$

$m\overset{\frown}{AE} = 102$



سؤال : **فضاء:** قمر صناعي يدور حول الارض عند ما يصل النقطة m يكون على ارتفاع $14000km$ فوق الارض ما قياس القوس الذي يمكن رويتة من كاميرا لقمر الصناعي على الارض ؟

الحـل /

$m\angle M = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{ADB} - m\overset{\frown}{AB})$ مبرهنه الزاوية الخارجية

$32 = \frac{1}{2}((360 - x) - x)$ نعوض قيمة الاقواس

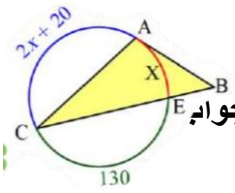
$\left[32 = \frac{1}{2}(360 - 2x)\right] \times 2 \Rightarrow 64 = 360 - 2x$

$2x = 360 - 64 = 2x = 296 \Rightarrow 2$

$m\overset{\frown}{ADB} = 360 - x$

مجموع أقواس الدائرة مطروح منها القوس الصغير

فكـــر



سؤال / **اكتشف الخطأ:** كتب سعيد $m\angle CAB = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$ بين الخطأ واوجد الجواب

الحـل /

نجد قيمة x من خلال مجموع اقواس الدائرة الكلية

$$2x + 20 + x + 130 = 360 \Rightarrow 3x + 150 = 360$$

$$3x = 360 - 150 \Rightarrow 3x = 210 \overset{\div 3}{\Rightarrow} x = 70$$

$$\therefore m\overset{\frown}{AC} = 160 \quad , \quad m\overset{\frown}{AE} = 70$$

مبرهنه الزاوية المحيطة $m\angle CAB = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AEC}$

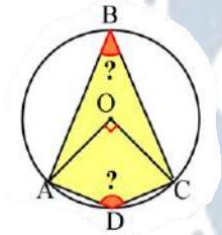
$$\therefore m\angle CAB = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AE} + m\overset{\frown}{EC})$$

$$m\angle CAB = \frac{1}{2}(70 + 130)$$

$$m\angle CAB = \frac{1}{2}(200)$$

$$m\angle CAB = 100^\circ$$

اذن الجواب الصحيح هو $m\angle CAB = 100^\circ$.



سؤال / **حس عددي:** جد قيمة الزوايا المجهولة في الشكل المجاور ؟

الحـل /

مبرهنة الزاوية المركزية $m\angle O = m\overset{\frown}{AC}$

$$90 = m\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \therefore m\overset{\frown}{AC} = 90$$

مبرهنة الزاوية المحيطية $m\angle B = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$

$$m\angle B = \frac{1}{2} \times 90 \Rightarrow m\angle B = 45^\circ$$

من الشكل الرباعي ABCD نجد $m\angle D$

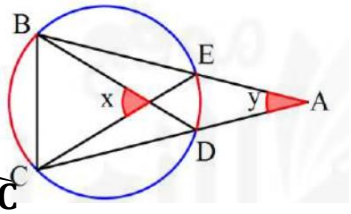
مبرهنة الشكل الرباعي الدائري $m\angle B + m\angle D = 180^\circ$

$$45 + m\angle D = 180^\circ$$

$$m\angle D = 180^\circ - 45^\circ \Rightarrow m\angle D = 135^\circ$$

سؤال اكتب: مبرهنات الزوايا الداخلية والخارجية لتقارن بين الزاويتين x, y ؟

الحـل /



مبرهنه الزاوية الخارجية $m\angle y = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} - m\widehat{ED})$

مبرهنه الزوايا الداخلية $m\angle x = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} + m\widehat{ED})$

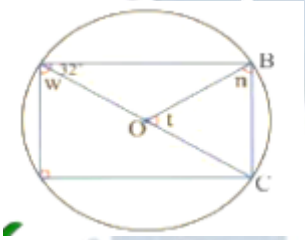
$$m\angle x + m\angle y = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} + m\widehat{ED} + m\widehat{BC} - m\widehat{ED}) = \frac{1}{2}(2m\widehat{BC}) = m\widehat{BC}$$

$$m\angle x - m\angle y = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} + m\widehat{ED} - m\widehat{BC} + m\widehat{ED}) = \frac{1}{2}(2m\widehat{ED}) = m\widehat{ED}$$

نلاحظ ان جميعها تساوي القوس الكبير $\widehat{BC}$ وطرحها يساوي القوس الصغير $\widehat{ED}$

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال انظر للشكل المجاور واجب عن الاسئلة :

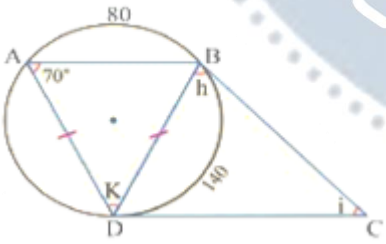


1. قياس الزاوية W هو :
   - a) 58° ✓
   - b) 30°
   - c) 90°
   - d) 32°

2. قياس الزاوية t هو:
   - a) 45°
   - b) 64° ✓
   - c) 32°
   - d) 48°

3. قياس الزاوية n هو
   - a) 45°
   - b) 64°
   - c) 32°
   - d) 58° ✓

سؤال انظر للشكل المجاور واجب عن الاسئلة :

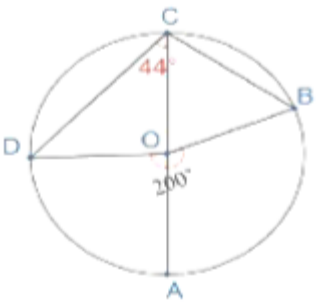


1. قياس الزاوية h هو :
   - a) 70° ✓
   - b) 72°
   - c) 90°
   - d) 80°

2. قياس الزاوية i هو :
   - a) 39°
   - b) 70°
   - c) 40° ✓
   - d) 45°

3. قياس الزاوية k هو :
   - a) 70°
   - b) 30°
   - c) 40° ✓
   - d) 78°

سؤال 1: انظر للشكل المجاور واجب عن الاسئلة :



1. قياس القوس $\widehat{AB}$ هو:

a) 112 √
b) 28
c) 65
d) 82

أحسان رشيد عبد الله اللهيبي
مدرس رياضيات

الدرس [7-5] خطة حل المسائل

في هذا الدرس نستخدم اربع خطوات للحل وهي افهم خطط حل تحقق

حل المسائل التالية باستعمال استخراجية الرسم :

سؤال / شعبة: لكل شعبة من شعب الصف الثالث متوسط مقاعد دراسية متساوية وكان في الشعبة (أ) الطالب ياسر يجلس في المقعد الرابع من الأمام وفي المقعد الثاني من الخلف والمقعد الخامس من اليسار والثاني من اليمين . ارسم شكلاً لإيجاد عدد المقاعد في الشعبة(أ)التي يجلس فيها ياسر؟

الحـل /

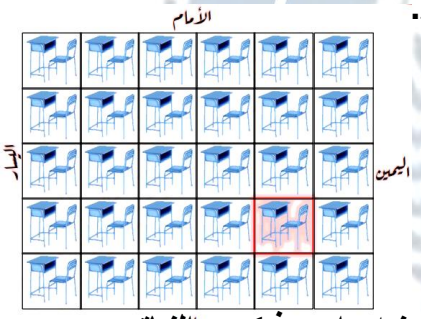
افهم :

اما معطيات المسألة؟ مقعد ياسر هو الرابع من الأمام وفي المقعد الثاني من الخلف والمقعد الخامس من اليسار والثاني من اليمين

ما الطلوب من المسألة؟ ايجاد عدد المقاعد في شعبة (أ) التي يجلس فيها ياسر.

خطط :

كيف تحل المسألة؟ ارسم شكلاً بين الصفوف والاعمدة اعتماداً على موقع جلوس ياسر.



حـل :

نكون رسم من 6 اعمدة و5صفوف من المقاعد

فيكون عدد المقاعد في الشعبة

مقعد $6 \times 5 = 30$

ملاحظة / للسهولة نجمع عدد المقاعد من الامام وعددها من الخلف و نطرح منه واحد فيكون الناتج هو عدد المقاعد في الصفوف و بنفس الطريقة مع الأعمدة.

تحقق:

من خلال الرسم اعلاه وحسب موقع ياسر في المعطيات اذن يكون الحل صحيح وهو 30 مقعد في الشعبة.

سؤال / مسرح: مسرح قُسِمَ الى عدة اقسام، جلس انمار في الصف الرابع من الامام وفي الصف السادس من الخلف وكان مقعده الثاني من جهة اليسار والسادس من جهة اليمين، فما عدد المقاعد في هذا القسم من المسرح؟

الحـل /

افهم :

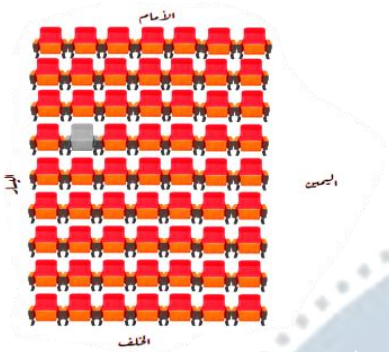
ما معطيات المسألة؟ مقعد انمار هو الرابع من الامام والسادس من الخلف والثاني من اليسار والسادس من اليمين.

ما المطلوب من المسألة؟ ايجاد عدد المقاعد في هذا القسم من المسرح.

خطط :

كيف تحل المسألة؟ ارسم شكلاً او (مربعات فارغة)يبين الصفوف والاعمدة اعتماداً على موقع جلوس انمار.

حل :



نكون رسم من 7اعمدة و9صفوف من المقاعد

فيكون عدد المقاعد في المسرح

مقعد. $9 \times 7 = 63$

تحقق:

من خلال الرسم اعلاه وحسب موقع انمار في المعطيات

اذن يكون الحل صحيح وهو 63 مقعد في المسرح.

سؤال : خزان: خزان ماء سعة 500 لتر يصب فيه الماء بمقدار 80 لتر كل 6 دقائق ما عدد الدقائق للازم لملء الخزان ؟

الحـل /

افهم :

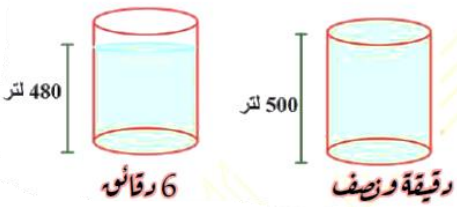
ما معطيات المسالة؟ خزان ماء سعة 500 لتر يصب فيه الماء بمقدار 80 لتر كل 6 دقائق

ما المطلوب من المسالة؟ ما عدد الدقائق للازمة لملء الخزان

خطط:

كيف تحل المسألة؟ تقسم سعة الخزان 500 على 80 المقدار الذي يصب فيه ثم نضربه ب 6 عدد الدقائق لكل لتر حسب في الخزان

حل :



دقيقة $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 1.5 = 37.5$

تحقق:

دقيقة $\frac{500}{80} \times 6 = 6.25 \times 6 = 37.5$

اذن الحل صحيح

سؤال / **هرم رباعي**: تم شكيل هرم رباعي القاعدة باستعمال كرات صغيره كما في الشكل المجاور إذا كان الهرم مكونا من اربع طبقان ما عدد كرات الهرم ؟

الحـل /

افهم :

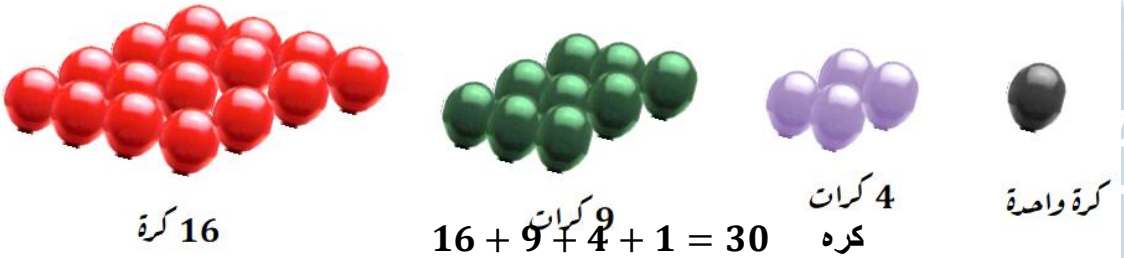
ما معطيات المسائلة؟ هرم رباعي القاعدة

ما المطلوب من المسالة؟ ما عدد كرات الهرم

خطط:

كيف تحل المسالة؟ نرسم كرات كل طبقة ثم نحسب عددها

حـــــل:



$16 + 9 + 4 + 1 = 30$ كره

تحقق:

$(4 \times 4) + (3 \times 3) + (2 \times 2) + 1 = 30$ كرة

اذن الحل صحيح

سؤال / **قص قطعة خشب**: يستغرق قص قطعة الخشب الى 5 قطع متساوية 20 دقيقة ما الزمن للازم لقص قطعه اخرى متشابه الى 3 قطع متساوية ؟

الحـل /

افهم :

ما معطيات المسألة؟ يستغرق قص قطعة الخشب الى 5 قطع متساوية 20 دقيقة

ما المطلوب من المسالة؟ ما الزمن للازم لقص قطعة اخرى متشابهة الى قطع متساوية

خطط:

كيف تحل المسالة: نحتاج الى أربع مرات لقطع الخشبية لتكوين خمس قطع الخامسة لا تحتاج الى قص لذألك سيكون زمن القص مقسوم على 4 فيكون الزمن دقائق $\frac{20}{4} = 5$ لكل قطعه ثم تكمل القطعة التأليه الى 3 قطع بمعدل 5 دقائق

حـــــل :

تحقق:

وللتحقيق نضرب عدد الدقائق لكل قطعه في قطعتين

دقيقة $5 \times 2 = 10$

اذن الحل الصحيح

نهاية الفصل الخامس

الفصل السادس : الإحصـاء و الإحتمـالات

الدرس [1-6] تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين :
الاول: تصميم ودراسة مسحية و الثانية: تحليل الناتج

[6 – 1 – 1]	تصميم دراسة مسحية

وهو تعين مشكله او سؤال ثم نحدد مجتمع نبحث من خلاله عن الاجابات .

العينة: هي مجموعة جزائية من المجتمع ومن خلال تحليل نتائج العينة يمكن التوصل الى استنتاجات حول المجتمع كاملا وتكون الاستنتاجات أكثر تمثيلا للمجتمع إذا كانت حجم العينة أكبر واستعمال عينات أكثر .

ولنوع العينة تأثير في الاستنتاجات التي نتوصل اليها وهي على نوعين :

1. العينة المتميزة: اذا كانت لا فرادها الاحتمالات نفسها في الاختيار (كلهم متحيزين لمكان معينه او اكله معينة او نادي معين....).
2. العينة الغير متحيزه: إذا كان لأفرادها احتمالات مختلفة في الاختبار.

سؤال : وزع مدير مدرسة 100 ورقة استبيان على طلاب مدرسته للتعرف على صورة المواد الغذائية في الحانوت :

1. حدد العينة والمجتمع الذي اخير منة
2. صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير
3. حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

الحـل /

1. العينة: الطلاب الذي استلموا اوراق الاستبيان وعددهم 100طالب // المجتمع جمع طلاب المدرسة
2. اسلوب جمع البيانات: هو دراسة مسحية حيث تؤخذ الاجابات مباشره الى الاستبانة
3. العينة غير متحيزة: لان هذه العينة تكون من طلاب اختيروا عشوائياً

سؤال : يريد صاحب متجر ان يقدم هديه لكل زبون يتسوق منة فوقف عند باب المتجر وسال 20 متسوقا عن نوع الهدية التي يود ان تقدم له :

1. حدد العينة والمجتمع الذي اختير منة
2. صف اسلوب جمع البيانات الذي استعماله المدبر
3. حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

الحـل /

1. العينة: المتسوقون الذي سائلهم وعددهم 20 شخص // المجتمع جميع المتسوقون الذي دخلوا المتجر
2. اسلوب جمع البيانات: هو دراسة مسحية حيث تؤخذ الاجابات مباشرة من افراد العينة المختارة
3. العينة غير متحيزه لان الاشخاص الذي دخلوا أخبروا عشوائيا

سؤال: سئل 10 اشخاص دخلوا مطعم كباب الاكلات التي يفضلونها :

1. حدد العينة والمجتمع الذي اختبر منه
2. صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير 3
3. حدد العينة متحيزه ام غير متحيزة

الحل /

1. العينة الاشخاص الذي طرح عليهم السؤال وعددهم 10// المجتمع الاشخاص الذي دخلوا المطعم
2. اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحيه حيث تؤخذ الاجابات مباشرة من افراد العينة المختارة
3. العينة متحيزه لان الاشخاص الموجودين داخل مطعم الكباب اكلتهم المفضلة هي الكباب

سؤال: دخل 30 شخص مكتبة عامة وسئل كل سادس شخص يدخل المكتبة عن هوايته المفضلة :

1. حدد العينة والمجتمع الذي اختير منة
2. صف اسلوب جمع البيانات الذي استعماله المدير
3. حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

الحل /

1. العينة: الاشخاص الذي طرح عليهم السؤال وعددهم $\frac{30}{6} = 5$ //المجتمع جمع الاشخاص الذي دخلوا المكتبة وعددهم 30
2. اسلوب جمع البيانات: هو دراسة مسحية حيث تؤخذ الاجابات مباشره من اقرار العينة المختارة
3. العينة متحيزة: لان جمع الاشخاص الذي دخلوا المكتبة هوايتهم المفضلة هي القراءة

سؤال: طلب من كل عاشر زائر من بين 3000 زائر لحديقة الزوراء في احد الايام ان يجيب عن سؤال معين :

1. حدد العينة والمجتمع الذي اختير منة
2. صف اسلوب جمع البيانات الذي استعماله المدير
3. حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

الحل /

1. العينة: الاشخاص الذي طرح عليهم السؤول وعددهم $\frac{3000}{10} = 300$ // المجتمع جمع الاشخاص الموجودين وعددهم 3000
2. اسلوب جمع البيانات: هو دراسة مسحيه حيث تأخذ الاجابات مباشره من افراد العينة المختارة
3. العينة متحيزه: لان العينة اختيارات بصوره عشوائية

سؤال: حدد العينة والمجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميز العينة المتحيزة عن العينة غير المتحيزة لكل مما يأتي : واجب

1. وزعت 100 ورقه استبيان على مجموعه من اعمال أحد المصانع تضمن سؤال حول ظروف العمل في المعمل
2. ج: (غير متحيزة)

3. وزعت استبيان على طالب من بين 100 طالب
ج: (غير متحيزة)

4. وزعت الحيوانات في أحد حدائق الحيوانات ثم اختير حيوان من كل مجموعه بصوره عشوائية لأجراء الفحوصات عليه
ج: (غير متحيزة)

5. يريد صاحب معمل التحقق من ان العمال يعملون بشكل جيد فراقب أحد المعامل مده ساعتين
ج: (متحيزة)

6. يقف عدد من الطالبات عند مدخل المدرسة ويسألن كل عاشر طالبه تدخل المدرسة عن هوايتها المفضلة
ج: (غير متحيزة)

7. اختار مدير مدرسه 20 طالبا يمثلون المدرسة في مسابقة علمية
ج: (غير متحيزة)

[6 – 1 – 2] تحليل النتائج

بعد جمع البيانات من خلال تدريسه المسحية تلخص البيانات كي تكون ذات معنى وذلك عن طريق استعمال مقاييس النزعة المركزية التي درستها سابقا (الوسط الحسابي. الوسيط. المنوال) بطرق مختلفة.

الوسط الحسابي : نرمز له بالرمز وهو مجموع القيم على عددها $\overline{X} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

الوسيط الحسابي : ونرمز له بالرمز ME: ترتيب البيانات تصاعديا او تنازليا:

1. إذا كان عدد العناصر فردي فيكون القيمة الذي تقع في المنتصف
2. إذا كان عددها زوجي فيكون القيمتين في الصف مقسومتين على 2

المنوال: هي القيمة الاكثر تكرارا .

وان اختيار القياس الانسب التمثيل البيانات هو حسب الظروف الموضحة في الجدول ادناه :

القياس	متى يفضل استعماله
الوسط الحسابي	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات
الوسيط	عندما توجد قيم متطرفه في مجموعة البيانات بشرط لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات
المنول	عندما توجد اعداد متكررة في مجموعة البيانات

ملاحظة /

القيم المتطرفة: هي القيمة الشاذة بين مجموعه القيم مثل وجود ال 50 بين الاعداد التالية: $1, 2, 3, 50, 8, 9$

الفجوات الكبيرة: عندما ترتب القيم تصاعديا او تنازليا يجب ان لا يكون انقطاع كبير بين بداية البيانات والنهاية مثل $1, 2, 150, 250, 500$

فجوه كبيره

سؤال / اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هي الانسب لوصف البيانات في كل مما يأتي:

1. $3, 2, 3, 6, 5, 5, 21, 4, 3, 5$

الحـل /

ترتيب البيانات تنازليا

$2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 21$

الوسط الحسابي: غير مناسب لوجود قيمه مطرفه 21

الوسيط: هو القياس المناسب لوجود قيمه مطرفه ولا توجد فجوات ويساوي $4.5 = \frac{4+5}{2}$ لأنه عدد القيم زوجي

المنوال: غير مناسب لوجود قيمتين بنفس التكرار

2. $8, 10, 8, 9, 11, 4, 6, 4, 54$

الحـل /

ترتيب البيانات تصاعديا

$4, 6, 8, 8, 9, 10, 11, 54$

الوسط الحسابي: غير متناسب لوجود قيمه متطرفة 54

الوسيط: هو المقياس المناسب لوجود قيمه متطرفة ولا توجد فجوات ويساوي $8.5 = \frac{8+9}{2}$ لأنه عدد القيم زوجي

المنوال: يساوي 8 وهو ايضا مقياس مناسب التمثيل البيانات

3. حصل محمد على الدرجات التالية في خمس اختبارات لماده الرياضيات :
$90, 93, 85, 86, 91$

الحـل /

ترتيب البيانات تصاعديا $85, 86, 90, 91, 93$

الوسط الحسابي: مناسب لعدم وجود قيم متطرفة $\bar{X} = \frac{85+86+90+91+93}{5} = \frac{445}{5} = 89$

الوسيط: يساوي وهو مقياس مناسب ايضا لتمثيل البيانات لانه يتوسط البيانات ولا توجد فجوات كبيره

المنوال: لا يوجد لعدم وجود تكرار في البيانات

سـؤال / اي مقـاييس النزعـة المركزيـة (ان وجـدت) هـي لا نسـب لوصـف البيانـات فـي كـل ممـا يـأتي:

واجب

1. $8, 10, 14, 8, 13, 6$
2. $8, 9, 8, 6, 10, 9, 11, 13, 14, 8, 6, 7, 19$
3. $34, 47, 41, 49, 39, 26, 40$
4. $6, 2, 4, 4, 3, 2, 6, 2, 4, 4, 20$
5. $5, 3, 5, 8, 5, 3, 6, 7, 4, 5$
6. في سباقات العدد التي تنظمها وزارة الشباب والرياضة حقق أحد المتسابقين خلال عشر سنوات المراكز التالية :

$2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 10$

تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

سؤال / **مستشفى:** يعد مستشفى مدينه الطب مجمعا طبيا متكاملا يقدم خدمات للمواطنين في بغداد والمحافظات في ندوة تعريفية يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائي ليقدم نبذه عن خدمات قسمه في المستشفى **1-** صف العينة والمجتمع **2-** هل العينة متحيز ام لا فسر؟

الحـل /

1) العينة طبيب واحد من كل قسم // المجتمع الاطباء في مستشفى مدينة الطب
2) العينة غير متحيزه لان الاختبار كان بصوره عشوائية

سؤال / **تسوق:** يبين الجدول ادناه عدد الزبائن الذين يرتادون محل لبيع الأجهزة الكهربائية في كل ساعة في أحد الأيام.

اي مقاييس النزعة المركزية هو لا نسب الوصف البيانات ؟

عدد الزبائن				
79	71	86	86	86
88	32	79	86	86
71	69	82	70	86

الحـل /

ترتيب البيانات تصاعديا

$32, 69, 70, 71, 71, 79, 79, 81, 82, 85, 86, 86, 86, 86, 86, 88$

الوسط الحسابي: غير متناسب لوجود قيمة مطرفه 32

الوسيط: هو المقياس المناسب لوجود قيمة مطرفة ولا توجد فجوات ويساوي $\frac{81+82}{2} = 81.5$

المنوال: يساوي 86 لا انها تكررت 5 مرات وهو ايضا مقياس مناسب لتمثيل البيانات

سؤال تغذية : بين الجدول ادناه السعرات الحرارية لبعض الخضروات في طبق لكل نوع اي مقياس النزعة المركزية هو الانسب لوصف البيانات ؟

الخضروات	السعرات	الخضروات	السعرات
بصل	16	خيار	13
فلفل	20	ذره	66
ملفوف	17	سبانخ	9
جزر	28	كوسا	17

الحـل /

ترتيب البيانات تصاعديا $9, 13, 16, 17, 17, 20, 28, 66$

الوسط الحسابي: منساب لوجود قيمه مطلقه 66

الوسيط: هو المقاييس المناسب لوجود قيمه مطلقه ولا توجد فجوات يساوي $\frac{17+17}{2} = 17$

المنوال: يساوي 17 لأنها تكررت مرتين وهو ايضا مقياس مناسب لتمثيل البيانات

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال اختر الإجابة الصحيحة:

1. أي مقاييس النزعه المركزية (ان وجدت) هو الانسب للبيانات التالية: $8, 8, 12, 11, 15, 15, 16, 21, 23, 27, 31, 70$

a) المدى
b) المنوال √
c) الوسيط
d) الوسط الحسابي

2. أي مقاييس النزعه المركزية (ان وجدت) هو الانسب للبيانات التالية $2, 3, 4, 5, 6, 7$:

a) المدى
b) المنوال
c) الوسيط √
d) الوسط الحسابي

3. أي مقاييس النزعه المركزية (ان وجدت) هو الانسب للبيانات التالية $18, 1, 3, 16, 23, 3, 2$:

a) المدى
b) المنوال
c) الوسيط √
d) الوسط الحسابي

4. المدى للبيانات الاتيه $24, 18, 32. 24, 22, 18$ هو :

a) 18
b) 32
c) 14 √
d) 50

5. أي المقاييس ليس من مقاييس النزعه المركزية :
a) المدى √ b) المنوال
c) الوسيط d) الوسط الحسابي

6. القيمة المتطرفة لهذه البيانات 4, 30, 3, 5, 5, 6. 5, 3 :
a) 3 b) 5
c) 5 d) 30 √

7. يكون الوسيط هو النزعه المركزية للبيانات التي :
a. توجد قيم متطرفة (توجد فجوات كبيرة وسطها)
b. لا توجد قيم متطرفة (لا توجد فجوات كبيرة وسطها)
c. توجد قيم متطرفة (لا توجد فجوات كبيرة وسطها) √
d. لا توجد قيم متطرفة (توجد فجوات كبيرة وسطها)

الدرس [2-6] البيانات والاحصاءات المضللة

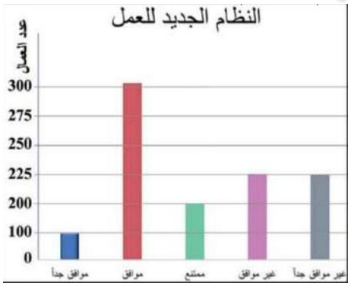
سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين :
الاول: البيانات المضللة و الثانية: الاحصاءات المضللة

[6 – 2 – 1]	تمييز البيانات المتضللة

البيانات المضللة (الكاذبة الخادعة): هي الرسوم البيانية التي تبرز صفه معينة لسلعة على نحو مبالغ فيه وعرض الحقائق بشكل يولد لدى الناظر انطباعا يروق لصاحب الاعلان وتضلل المستهلك :

كيف تمييز بين الرسم البياني المضلل وغير المضلل

يكون مضلل اذا كانت :
1- اذا كانت الفترات لاتبدء من الصفر .
2- اطول الفترات غير ثابتة .
3- طول لاعمده لا يناسب مع القيم العدديه الذي تمثلها



سؤال : يفكر صاحب مصنع تطبيق نظام جديد في العمل فوزع استبانه العمل يسالهم عن رايهم في النظام الجديد. هل التمثيل البياني بلاعمدة المجاوره يعطي الصوره الصحيحة حول نتائج الاستبانة؟

الحـل /

يبدو من النظره الاولى ان معظم العمل الموافقين هم الاغلب عند جمع العمل الموافقين مع الموافقون جدا

لا صحيح العدد 400 عامل وعند جمع العمل الغير موافقون والغير موافقون جدا لاصبح العدد 450 عامل، لذالك يكون التمثيل البياني غير صحيح ومضلل لان اطول الفترات غير ثابتة .

سؤال : الرسم البياني المجاور يوضح العلاقه بين طولي القرش البيضاء الكبيره وطول سمكه القرش بين هل الرسم البياني مضلل وضح ذلك ؟

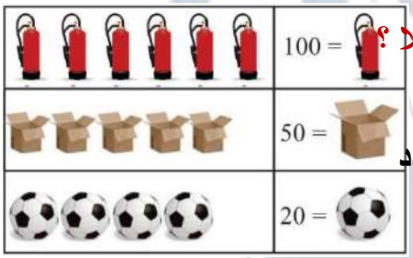
الحـل /

من الشكل المجاور نلاحظ ان العمودي العلوي هو ضعف العمود السفلي ولكن عند ما تقارن بين قيمهم فيكون العمودي العلوي قيمة 4.9 والعمودي السفلي 4 وهذه لايدل على الضعف
اذن الرسم البياني مضلل وغير حقيقي لان القيم لم تبدء من الصفر.

سؤال : وضح كيف يمكن ان يولد الرسم البياني المجاور انطباعا مضللا ؟

الحـل /

التضليل هو ان الفترات لم تبدء من الصفر و اختلاف الفترات بين قيم البيانات
حيث الفترة الاولى 150 – 157 والفرق بينها هو 7cm
الفتره الثانية 157 – 170 الفرق بينها هوه 13cm
الفقره الثالثة 170 – 175 الفرق بينها هوه 5cm
الفقره الرابعه 175 – 183 الفرق بينها هوه 8cm
اذن الفتره الثاني تضمن اكثر عدد من اطوال الطلاب فمن الطبيعي ان يكون عمودها اطول الاعمده .



سؤال : وضح كيف يمكن ان يولد الرسم البياني المجاور انطباعا مضللا ؟

الحـل /

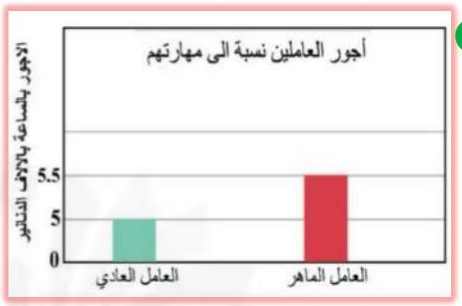
من النظره الاولى ونلاحظ ان عدد مطفأة الحريق في عمود الاعداد هو ضعف عدد الصناديق

ولكن عند ما تنظر الى عمود الاشكال نلاحظ ان عدد الصناديق 5 وعدد المطفاة 6

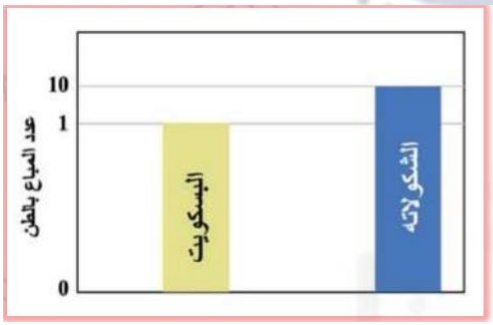
وهذه لا يدل على الضعف وعدد المطفاه 5 اضعاف من الكرات بينها عدد اشكال المطفأة 6 و الكرات 4 لان النسب متفاوته بين الاعداد والاشكال اذن الرسم بشكل تضليل .

سؤال : وضح كيف يمكن ان يولد الرسم البياني المجاور انطباعا مضللا ؟ واجب

1



2



سؤال : سئل زائر ول اسعار بطاقات الدخول للمسرح ومثلث الاجابات بالاعمده هل التمثيل التالي يعطي الصوره الصحيحه للاجابات ؟ **واجب**

[2 – 2 – 6] تتميز الاحصاءات المتهللة

الاحصاءات المضللة (الكاذبة الخادعة) بالإضافة الى الرسوم المظللة تستعمل الاحصاءات لهدف ترويج لشركه او لبضاعه معينه ولكن بعد امعان النظر جيدا في معطيات الاعلان يمكن تميز الاحصاءات المضللة

كيف تميز الاحصاءات المضللة ؟

تكون الاحصاءات مضلله إذا :

1- كانت عدد العينات المأخوذة من المجتمع قليلة
2- كانت المقارنة مع أشياء ليس من نفس الصف (مثلا: مقارنة الدولمه مع الجلاق)

مثال / فسر لماذا الاحصاءات او الاعلانات التالية مضللة:

سؤال : وضع صاحب محل للملابس الرجالية الاعلان التالي: بدلات رجالية متوسط سعرها 45 ألف دينار. في المحل 5 نماذج من البدلات اسعارها بألاف $54, 50, 20, 48, 53$

الحـل /

نجد معدل ال 5 بدلات بواسطة الوسط الحسابي $\overline{X} = \frac{54+50+20+48+53}{5} = \frac{225}{5} = 45$

إذا متوسط اسعارها البدلات هو 45 الف دينار و لكن هناك بدله واحده سعرها 20 وهو اقل من متوسط القيمة المتوسطة الموجودة في الاعلان وهذه يكلف المشتري نقود اكثر اذن يعتبر هذا الاعلان المضلل

سؤال : في استطلاع على 800 طالب اعداديه اجاب منهم على انهم يرغبون دخول كليه الهندسة قيما قال 50 منهم انهم يرغبون في دخول كليه الطب جاء في نتاج الاستطلاع "ان الطلاب يفضلون الهندسة علا الطب" .

الحـل /

عدد الطلاب المشاركون في استطلاع هم $120 = 50 + 70$ طالب من اصل 800 طالب

فتكون نسبتهم $\frac{120}{800} \times 100 = 15\%$ وهي نسبه قليله غير كافيه للحكم على راي 800 طالب انهم يرغبون دخول الهندسة

اذن تكون الاحصاءات مضلله وغير صحيحه لان العينة المأخوذة قليلة

سؤال : عرض مقال على 20 شخصا لتقويمه ابدى 13 انهم اعجبهم بالمقال وبناء على ذلك طرح صاحب المقال: ان المقال صالح للنشر لان نسبه الذين فضلوا كانت 13 الى 15.

الحـل /

الاحصاءات مضللة لان العينة المأخوذة من المجتمع 20 شخص وهي قليله جدا للحكم على اعجاب مجتمع كامل بالمقال لذلك تكون هذه الاحصاءات مضللة .

سؤال : باع مخزن ملابس رياضه مده زمنيه معينه بدلة رياضية في حين باع مخزن البيع للالعاب والملابس الرياضيه بنفس الفتره بدله رياضية .

الحـل /

المقارنة صحيحة : حيث المختبر الذي باع 320 بدله رياضيه هو مختص بالبدلات الرياضيه بينما المخزن الذي باع 90 بدله رياضيه هو مختص في بيع بدلات والالعاب لذلك لا يجوز المقارنة بينهم فتكون/ الاحصاءات مضلله لأننا قارنا بين شيئين ليس من نفس الصنف

سؤال : سال 100 طالب عن الطريقة التي يفضلونها في القدوم الى المدرسة فكانت إجابات 60 طالب منهم علي النحو الاتي:

32 منهم يفضلون سيارات الأجرة و 18 منهم يفضلون المشي و 10 طلاب يأتون بسيارتهم الخاصة . استنتج صاحب الاستبيان ان نصف الطلاب يفضلون القدوم بواسطة سيارت الأجرة .

الحـل /

الاحصاء مضلل لان نصف الطلاب هو $\frac{100}{2} = 50$ طالب

وعدد الطلاب الذي يقدمون بواسطة سيارات الاجرة هم 32 طالب وليس 50 طالب

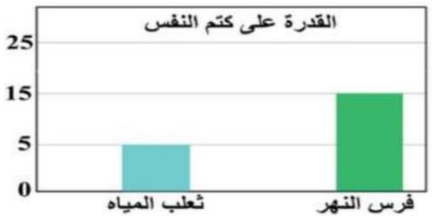
لذلك يكون الاحصاء مضلل/ صغر حجم العينة

سؤال : في استطلاع شمل 6 اشخاص حول مطالعه جريدة يومية افاد4 منهم انهم يفضلون جريدة X في نهاية الاستطلاع وردت الجملة الأتية : واجب

يفضل 2 من كل 3 شخص مطالعه الجريدة X لماذا يعد هذه الاعلان مضلل ؟

تـدرب و حـل مسائـل حياتيـة

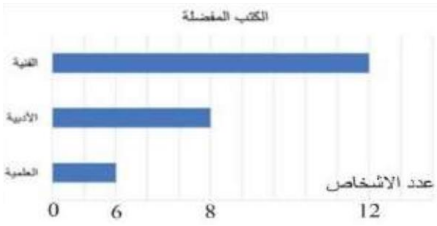
سؤال : الاحياء: الرسم البياني المجاور يمثل القدرة على كتم النفس لفرس النهر وثعلب المياه لماذا البيانات في الرسم مضللة وضح ذلك ؟



الحـل /

من النظرة الاولى نلاحظ ان عمود فرس النهر ضعف عمود ثعلب المياه ولكن بعد النظرة الى الارقام نجد فرس النهر 15 وثعلب المياه 5 وهذه لا يدل على الضعف لذألك يكون الرسم مضلل لان اطول الفترات غير متساوي حيث الاولى والثانية الفرق بينها 5 والثانية والثالث الفرق بينها 10 فيكون السبب عدم انتظام

التدرج .



سؤال : **مطالعة:** الرسم البياني المجاور يمثل اشخاص يفضلون مطالعه الكتب الأدبية العالمية الفنية فسر لماذا البيانات في الرسم مضللة ؟

الحـل /

من النظرة الأولى نلاحظ ان عمود الكتب الأدبية، ولكن بعد النضر الى الأرقام نجد ان الكتب الفنية يطالعونها **12** شخص بينما الأدبية **8** وهذا لا يدل على الضعف لذلك يكون الرسم مضلل لان اطوال الفترات غير متساوية حيث الأولى والثانية الفرق بينهما **6** والثانية والثالثة **2** والثالثة والرابعة **4**. فيكون السبب / **عدم انتظام التدرج .**

سؤال : **مواصلات:** بلغت ارباح شركة الطيران ***A*** في شهري تموز واب **5500** مليون دينار في حين بلغت الشركة ***B*** في شهري نيسان ومايس ***7500***مليون دينار فسر لماذا الاحصاءات مضللة ؟

الحـل /

المقارنات غير صحيحة لان ارباح الشركة **A** في شهري تموز وأب وارباح الشركة **B** شهري نيسان ومايس وهذه غير ممكن ان نقارن ارباح في اشهر مختلفة لذلك **تكون هذه الاحصاءات مضللة وغير دقيقة .**

سؤال : **تغذية.** تحتوي قصبة البروكلي على $477mg$ من البوتاسيوم والجزرة الكبيرة $230mg$ من البوتاسيوم في حين يحتوي رأس القرنابيط على $803mg$ من البوتاسيوم فسر لماذا الاحصاءات هذه مضللة ؟

الحـل /

الاحصاءات مضللة **لان** المقارنة بين انواع مختلفة من الخضراوات غير ممكن **لذا تكون هذه الاحصاءات مضللة وغير دقيقة** بسبب اختلاف كتلها.

فكـــر

سؤال : **صحح الخطأ:** يقول محمد ان الرسم يكون غير مضلل اذا بدأ رسم الاعمدة من الصفر بصرف النظر عن ثبوت طول الفترات اكتشف خطأ محمد ؟

الحـل /

خطأ / محمد هو في اهمال ثبوت طول الفترات

صح / يكون الرسم غير مضلل اذا رسمت الاعمدة من الصفر مع ثبات طول الفترات

سؤال : **حس عددي:** حصل أحد الباعة على العمولات التالية بالآلاف الدنانير شباط **965** اذار **170** نيسان **120** تموز **125** مايس **100** ، أخبر اصدقاءه ان متوسط عمولته الشهرية **265** ألف دينار فسر لماذا هذا الاحصاء مضلل ؟

الحـل /

يكون الاحصاء مضلل: لان استخدم الوسط الحسابي وهناك قيمة متطرفة 965 لذلك الوسط الحسابي لا يعد مقياسا مناسبا لذلك يكون هذه الاحصاء مضلل.

سؤال: ما الذي يجب ان تتأكد منه لتقرير ما اذا كان الرسم البياني مضللا ام لا؟

الحـل /

1- رسم الاعمدة من الصفر
2- ثبوت طول الفترات بين الاعمدة
3- انتظام التدريج بين الفترات

سؤال: سؤال من الحياة اليومية تحتاج لعمل رسوم مضللة ؟

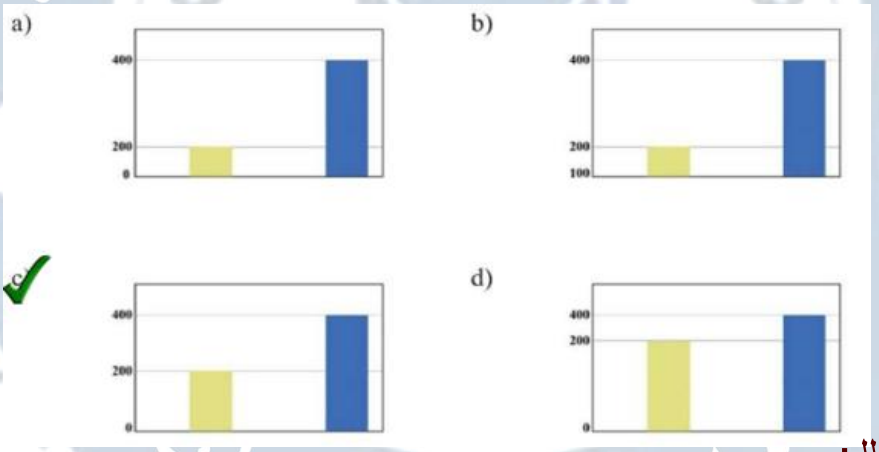
الحـل /

نفس مثال 3 في شرح الدرس.

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال: اختر الإجابة الصحيحة:

1. أي رسم بياني هو الأفضل في تمثيل بيانات معينة :



2. الرسم البياني يكون مضلل:
A. يبدا من الصفر (والفترات غير متساوية)
B. لا يبدا من الصفر (والفترات غير متساوية) √
C. لا يبدا من الصفر (والفترات متساوية)
D. يبدا من الصفر (والفترات متساوية)

3. في استطلاع شمل 6 مدرسين حول الدوام افاد 4 منهم انهم يفضلون الدوام الصباحي كتب المستطلع ان (يفضل 2مدرس من كل 3 مدرسين الدوام الصباحي) لماذا يعد هذا الإعلان مضللاً:
A. العينة كبيرة جدا
B. يجب ان تشمل العينة عمال بناء √
C. العينة صغيرة جدا
D. يجب ان تمون الجملة (يفضل به مدرس من كل مدرسين)

4. في محل تجاري عرض نوع من الاجبان على 12 شخص لتقويمه قبل عرضه ابدى 6 منهم اعجابهم بالمنتج بناء على ذلك صح المنتج (ان المنتج جيد لان نسبة الذين فضلوه كانت 6 الى 3) :

A. البيانات غير مضللة لان نسبة 6 الى 3 نسبة كبيرة
B. البيانات غير مضللة لان نسبة الذين اعجبوا بالجبنة ضعف عدد الباقين
C. البيانات مضللة رغم ان عدد الذين اعجبوا بالجبنة ضعف عدد الباقين √
D. البيانات مضللة لان العينة التي اختيرت متوسط الحجم

أستاذ رشيد عبد الله اللهيبي
مدرس رياضيات

الدرس [1-6] الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين :
الاول: الاحتمال التجريبي والنظري و الثانية: الحدثان المتنافيان

[1 – 4 – 6]	الاحتمالات التجريبية والنظرية

الاحتمالات التجريبية: هي الاحتمالات التي تزودنا بنتائج التجربة بعد تكرارها عدة مرات (تعتمد على تكرار التجربة) ويمكن حسابها بالقانون التالي:

$$P(E) = \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد مرات التجربة}}$$

الاحتمالات النظرية: هي الاحتمالات التي تزودنا بنتائج التجربة دون الحاجه الى اجرائها (تعتمد على قضاء العينة للتجربة)

ويمكن حسابها بالقانون التالي $P(E) = \frac{\text{عدد نتائج الحث}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } \Omega}$ او $P(E) = \frac{m}{n}$ حيث m عدد نتائج الحدث n عدد عناصر قضاء العينة

قضاء العينة: هي مجموعه النتائج الممكنة لفعل عشوائي واحد او اكثر ويرمز لها برمز Ω

الحدث: نتيجة او مجموعه نتائج ممكنه (يعتمد على حصول او عدم حصول التي ويا عناصره من قضاء العينة) ويرمز لها برمز E

سؤال / عند رمي حجري نرد مره واحده: جد

1. انظري الاحتمال ام تجريبي.
2. احتمال الحصول على المجموع 5 على وجهي الحجرين
3. احتمال الحصول على وجه الحجر الاول ضعف الحجر الثاني

الحل /

1. الاحتمال نظري لأنه لم تكرر التجربة أكثر من مره
نكتب عناصر قضاء العينة للفعلين وهما رمي حجرين نرد متكون كل واحد من ست اوجه

$\Omega =$ ثم نجد عدد عناصر قضاء العينة باستخدام قانون العدد الأساسي

$$\begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

$$n = 6 \times 6 = 36$$

2. نكتب عناصر الحدث الأول E_1 ماخوذه من فضاء العينه اعلاه وهو مجموعه الوجهين $E_1 =$ $\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} \vee 5$

فيكون عدد نتائج الحدث $m = 4$ وعدد عناصر فضاء العينة $n = 36$ ثم نطبق القانون الاحتمال النظري

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

3. تكتب عناصر الحدث الثاني E_2 وهو الوجه الاول ضعف الوجه الثاني

$$E_2 = \{(2,1),(4,2),(6,3)\}, m = 3, n = 36$$
$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

سؤال في تجربه رمي حجري نرد مره واحده جد احتمال الحصول على:

1. العدد على وجه احد الحجرين ثلث العدد على الوجه الاخر
2. مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر من 8
3. مجموعه العددين على وجهي الحجرين 12

الحـل /

نكتب فضاء العينة لحجري النرد

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1),\dots\dots,(1,6) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (6,1),\dots\dots,(6,6) \end{Bmatrix}, n = 36$$

1. الحدث الاول وجه الحجرين ثلث الوجه الأخر

$$E_1 = \{(1,3),(3,1),(2,6),(6,2)\}, m = 4$$
$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2. مجموع العددين أكبر من 8

$$E_2 = \begin{Bmatrix} (3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,5),(5,6) \\ ,(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$
$$m = 10$$
$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

3. مجموع العددين أكبر من 12

$$E_3 = \{(6,6)\}, m = 1$$
$$P(E_3) = \frac{m}{n} = \frac{1}{36}$$

سؤال رمي حجر نرد 25 مرة وكانت النتائج في الجدول :

النتيجة	1	2	3	4	5	6
عدد المرات	2	6	3	5	2	7

1- ما نوع الاحتمالات.

2- جد احتمالات ظهور العدد 4

الحـل /

1. نوع احتمال تجريبي لان التجربة تكررت 25 مره
2. حدث ظهور العدد 4 هو 5 مرات

تكتب قانون الاحتمال التجريبي $P(E) = \frac{\text{عدد نتائج الحث}}{\Omega \text{ عدد عناصر فضاء العينة}}$

$$P(E) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

سؤال / سحب كره بشكل عشوائي من صندوق ثم اعيدت الية الجدول يبين النتائج بعد سحبه:

القيمة	احمر	ازرق	اصفر	ابيض	اصفر
عدد السحوبات	8	10	15	11	6

1- ما نوع الاحتمالات نظري ام تجريبي 2- جد احتمالات سحب كرة صفراء
3- اكتب احتمال بصوره كسر عشوائي ونسبه مئوية

الحـل /

1. نوع الاحتمال تجريبي لان التجربة تكررت 50 مره
2. حدث سحب كره صفراء هو 15 مره فيكون احتمالها التجريبي

$$P(E) = \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد مرات التجربة}} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

3. لكي نحول الكسر الى نسبه تجريبيه نحاول جعل المقام 100 بضربه بعدد ثابت

$$P(E) = \frac{3}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{100} = 30\% \quad \text{نسبة مئوية}$$

$$P(E) = \frac{30}{100} = 0.3 \quad \text{عدد عشري}$$

سؤال / رمي مهند قطعتي نقود 13 مرة وسجلت النتائج التالية:

الناتج	(H, H)	(T, H)	(H, T)	(T, T)
التكرار	7	1	3	2

1- جد الاحتمال النظري لظهور (H, T) 2- جد الاحتمال التجريبي لظهور (H, T)
3- هل الاحتمالين متساوين ؟

الحـل /

1. الاحتمال النضري يعمد على فضاء العينة وهي النتائج

$\Omega = \{(H,H),(T,H),(H,T),(T,T)\}, n = 4$

فيكون حدث ظهور (H, T) هو مرة واحدة $m = 1$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$$

2. الاحتمال التجريبي يعمد على تكرار التجارية وهي 13 مرة

وحدث ضهور (H, T) هو 3 مرات

$$P(E) = \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد مرات التجربة}} = \frac{3}{13}$$

3. الاحتمالين غير متساوين

فكـــر

سؤال: **اكتشف الخطأ**: يريد كل من جمانة واختها تحديد احتمال اختبار كره حمراء واخرى صفراء عشوائيا من كيس يحتوي على 4 كرات حمراء 5 كرات صفراء دون ارجاع الكره بعد ليس ايها كانت اجابتها صحيحة ؟

جمانة	سالي
$P(\text{حمراء و صفراء}) = p(\text{حمراء}) \times p(\text{صفراء})$ $= \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$	$P(\text{حمراء و صفراء}) = p(\text{حمراء}) \times p(\text{صفراء})$ $= \frac{4}{9} \times \frac{5}{8}$

الحـل /

اجابت سالي هي الصحيحة لان الكره الحمراء لم يتم اعادتها لذلك سوف ينقص عدد الكرات الكلى في الحدث الثاني فيكون عددها 8 .

سؤال: **تحد**: عند رمي حجر نرد وقطعه نقود ما احتمال ظهور الرقم اكبر من 2 واصغر من 6 على حجر النرد وكتابه على قطعه النقود ؟

الحـل /

الحدثان مستقلان لان ظهور رقم على الزر لايؤثر على ظهور كتابة

E_1 رقم اكبر من 2 واصغر من 6 على الزر وعددهم 3 ارقام من اصل 6 ارقام

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد البطاقات الزرقاء}}{\text{عدد البطاقات الكلي}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

E_2 ظهور كتابة على القطعه وعددهم وجه واحد من اصل وجهين

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد اوجه الكتابة}}{\text{عدد الاوجة الكلي}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

سؤال

مساله مفتوحة: 10 بطاقات بثلاث الوان مختلفة اكتب مسالة تتعلق بسحب بطاقتين دون ارجعها على ان يكون الاحتمال $\frac{1}{15}$؟

الحـل /

تكتب المسالة ادنى وفق معطيات السؤال ثم نقوم بحلها الى ان يكون ناتج احتمالها عندها $\frac{1}{15}$ يكون الحل صحيح .

صندوق يحتوي على 5 بطاقات حمراء 2 خضراء 3 زرقاء سحبت بطاقتين بدون ارجاع الاولى ما احتمال ان البطاقه المسحوبه خضراء ثم زرقاء

الحدثان مترابطان لانه البطاقه لاولى لم تعادل الى الصندوق

E_1 سحب بطاقه خضراء وعددهن 2 من اصل 10 بطاقات

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد البطاقات الزرقاء}}{\text{عدد البطاقات الكلي}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

E_2سحب بطاقه زرقاء وعددهن 3 من اصل 9 بطاقات

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{\text{عدد البطاقات الزرقاء}}{\text{عدد البطاقات الكلي الجديد}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{after } E_1)$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

سؤال

اكتب: مثلا على مرتين مستقلين ومثلا على مرتين حدثين مترابطين ؟

الحـل /

راجع الامثلة في شرح الموضوعين السابقين واختر اي مثال الحدثين مستقلين وحدثين مترابطين.

مراجعة الفصل

للاحتمالات التجريبية والنظرية ولأحداث المتنافية والمستقلة والمترابطة

السؤال	الجواب
مانوع الاحتمال	1- يكون تجريبي اذا تكررت التجربة اكثر من مرة 2- يكون نظري اذا لم تتكرر التجربة اكثر من كرة
مانوع الحدثين	1. يكونان متنافيين اذا لا يمكن ان يتحققان معا في تجربه واحدة 2. يكونان مستقلان اذا احدهما لا يوثر على وقوع او عدم وقوع الاخر او وجود الكلمات مع ارجاع مع استعادة 3. يكونان مترابطان اذا احدهما ايوثر على وقوع او عدم وقوع الاخر او وجود الكلمات بدون إعادة بدون ارجاع بدون استعادة
قانون احتمال الحدثان المتنافيان	$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ عندما يكون في السوال كلمة او
قانون احتمال الحدثان المستقلان	عندما يكون في السوال كلمه (و)(ثم) والحدثان مستقلان $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$
قانون احتمال الحدثان المترابطان	عندما يكون في السوال كلمه (و)(ثم) والحدثان مترابطان $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$

انتباه / E_1 الحدث الاول يكون قبل الكلمة و ثم او وE_2 الحدث الثاني بعد هذه الكلمات
اما اذا كانت الكلمات باللغة الإنكليزية "and" و"ثم" "or" فيكون بالعكس

الأختيـار مـن متعـدد

سؤال / اختر الإجابة الصحيحة:

1. E_1, E_2 حدثان مستقلان حيث $P(E_1) = 0.3$ و $P(E_2) = 0.9$ فان احتمال حدوث E_1, E_2 معا هو :
   a) 1.2 b) 0.6
   c) √ 0.27 d) 0.3

2. رمى مصطفى حجر نرد وقطعه نقود احتمال ظهور رقم اكبر من 5 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود هو :
   a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$
   c) √ $\frac{1}{12}$ d) 3

3. صندوق فيه 5 كرات حمر 4 كرات خضر:
E_1 سحب كرة حمراء E_2 سحب كرة خضراء دون إعادة الحمراء فان احتمال حدوثهما معا هو :

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{5}{18}$ √ c) $\frac{19}{18}$ d) $\frac{1}{18}$

4. E_1, E_2 حدثان مترابطان فان احتمال وقوعهما معا هو:

A. $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{ after } E_1)$
B. $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{ before } E_1)$
C. $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$ √
D. $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_1 \text{ after } E_2)$

5. العلاقة $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ بين الحدثان حيث E_1, E_2 هما :

A. لاتوجد علاقة بينهما
B. مستقلان √
C. مترابطان
D. غير ذلك

6. E_1, E_2 حدثان متنافيان حيث: $P(E_1) = 0.15, P(E_2) = 0.45$ فان احتمال حدوث هو E_1 او E_2 :

a) 0.0675 b) 3
c) 0.6 √ d) 0.3

الدرس [1-6 خطة حل المسألة]

في هذا الدرس نستخدم اربع خطوات للحل وهي افهم خطط حل تحقق

حل المسائل التأليه بإستراتيجيه (انشئ نموذجان) :

سؤال / مربعات: حاول محمد ترتيب قطع مربعه الشكل ملونه (اسود احمر ازرق اصفر اخضر) بطرائق مختلفة بكم طريقه يمكن ان يرتبها بشرط ان اول مربع اسود اللون واخر مربع اصفر اللون ؟

الحل /

افهم :
ما معطيات المسالة: 5قطع مربعه الشكل ملونه (اسود احمر ازرق اصفر اخضر)
ما المطلوب من المسالة: ايجاد عدد الطرق الممكنة لترتيبها بشرط ان اول مربع اسود واخر مربع اصفر اللون

خطط :
كيف تحل المسالة انشئ نموذجا لتوضيح تلك الطرق المختلفة

حل :
تلتزم بالشرط المعط في السؤال وهو اول مربع اسود واخر مربع اصفر لكي نحسب عدد الطرق

❶ ❷ ❸ ❹ ❺ ❻

اذن هنالك ست طرق لترتيب المربعات بشكل مختلف

تحقق :
نتحقق من عدد الطرق باستخدام مضروب عدد المربعات، ولكن ليس مضروب الخمسة لان الشرط استثنى مربعين وهما الاول والاخر اذا ان يكون مضروب الثلاثة طرق $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ اذان الحل صحيح.

ملاحظة / لو لم يكن هنالك شرط بحيث المربع الاسود والاصفر الكان الناتج هو مضروب الخمسة وهكذا بنسبه شرط نقصه من العدد الكلي للمربعات ونستخرك عدد الطرق المختلفة.

سؤال : **الأرقام:** لديك الأرقام $4, 3, 2, 1$ كم عدد يمكن تكوينه من 4 ارقام شرط عدم تكرار الرقم في العدد والعدد الاكبر من 4000 ؟

الحـل /

ما معطيات المسالة: لدينا الأرقام $4, 3, 2, 1$
ما المطلوب من المسالة: ايجاد عدد الطرق للتكوين عدد مكون من ارقام شرط عدم كرار الرقم في العدد والعدد اكبر من 4000

خطط :
كيف تحل المسالة: انشئ نموذجا لتوضيح تلك الطرق المختلف.

حل :
نلتزم بالشرط المعطي في السؤال وهو عدد مكون من 4 ارقام شرط عدم تكرار الرقم في العدد والعدد اكبر من 4000 بما انه ان العدد اكبر من 4000 اذن نثبت الرقم 4 في مرتبه الالاف

❶	4	3	2	1
❷	4	3	1	2
❸	4	2	3	1
❹	4	2	1	3
❺	4	1	3	2
❻	4	1	2	3

اذ ان هنالك ستة طرق لترتيب الاعداد

تحقق:
نتحقق من عدد الطرق باستخدام مضروب عدد الارقام ماعدا رقم الالاف فيكون عددهم ثلاثة
اذا يكون مضروب الثلاثة طرق $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
اذن الحل الصحيح

سؤال أشجار: في بستان فلاح 28 شتلة برتقال وتفاح فاذا كان مقابل كل 4شتلات برتقال 3 شتلات تفاح ما عدد شتلات البرتقال؟

الحـل /

افهم :

ما معطيات المسائلة: بستان فلاح 28 شتلة برتقال وتفاح فاذا كان مقابل كل 4شتلات برتقال 3 شتلات تفاح

ما المطلوب من المسالة: ما عدد شتلات البرتقال

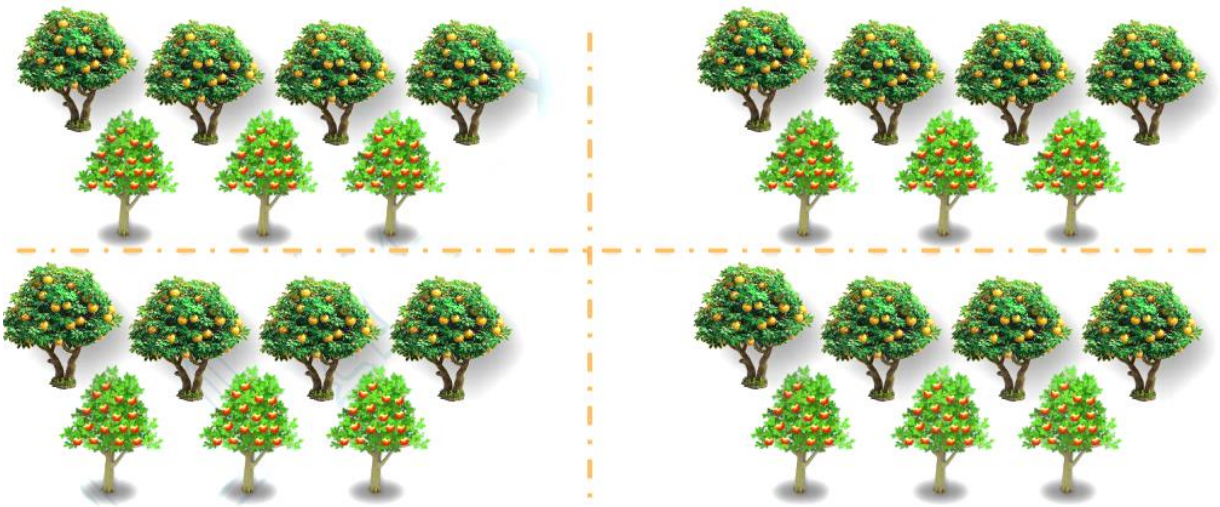
خطط :

كيف تحل المسالة: انشئ نموذجا لتوضيح عدد شتلات البرتقال

حل

نضع مقابل كل 4 شتلات برتقال 3 شتلات تفاح ثم احسب عدد شتلات البرتقال

28 شجرة كونت 4 مجموعات كل مجموعه تحتوي على 4 شتلات برتقال 3 شتلات تفاح عدد اشجار البرتقال 16 شجره والتفاح 12 شجره



تحقق:

28شجره نقسمها على 7 اشجار يكون الناتج 4 مجموعات كل مجموعه تحتوي. على 4 اشجار برتقال فيكون الناتج $4 \times 4 = 16$ شجره

اذن الحل صحيح

سؤال بستان: مزرع بسقي بستان مره كل اسبوعين كم مره يسقي البستان في 6 أشهر ؟

الحـل /

افهم:

ما معطيات المسالة: مزرع يسقي بستانه مره كل اسبوعين

ما لمطلوب من المسالة: كم مره يسقي البستان في 6 أشهر

خطط :
كيف تحل المسالة: انشئ نموذجا لتوضيح هددمرات اسقي البستان

حل :
كل. شهر يتكون من رابع اسابيع تقريا ويتبقى. يومين.

6اشهر $\times$ 30 يوم = يوم نقسمها على اسبوعين $\frac{180}{14}$ يساوي مرة تقريبا
نلاحظ ان عدد مرات السقي في المخطط ليست أشهر 12 مرة / اي فرق مره واحدة اين الفرق

تحقق:
4 اسابيع × 7 ايام = 28 يوم فيتبقى يومين من الشهر
الفرق هو: الشهر يتبقى منه يومين $\times$ 6 أشهر = 12 يوم اي تقريبا اسبوعين وفي هذه الاسبوعين يسقي البستان مرة واحده
فيكون الحل الصحيح في النماذج $12 + 1 = 13$ مرة

سؤال
اشكال هندسيه: قسمه 24 قطعه على شكل مثلثات ومربعات ودوائر الى أربع مجموعات فاذا كان عدد المربعات يزيد بمقدار 1 على عدد الدوائر ويقل بمقدار 1 عن عدد المثلثات فما عدد القطع لكل نوع ؟

الحـل /
افهم:
ما معطيات المسالة: 24 قطعه على شكل مثلثات ومربعات ودوائر الى أربع مجموعات فاذا كان عدد المربعات يزيد بمقدار 1 على عدد الدوائر ويقل بمقدار 1 عن عدد المثلثات
ما المطلوب من المساله: فما عدد القطع لكل نوع

خطط :
كيف تحل المسالة: انشئ نموذجا لتوضيح عدد القطع لكل نوع

حل :
24 قطعه مقسمه على 4 مجموعات كل مجموعه تحتوي على 6 قطع وحسب الشرط عدد المربعات يزيد بمقدار 1 على عدد الدوائر ويقل بمقدار 1 عن عدد المثلثات يكون عدد كل نوع في المجموعة 3 مثلثات 2 مربعات 1 دائرة
فيكون عدد كل نوع 12 مثلثات 8 مربعات 4 دوائر

تحقق :

لو قمنا بجمع اعداد الاشكال 12 مثلث + 8 مربعات + 4 دوائر = 24 قطعه.

الأستاذ رشيد عبد الله اللهيبي
مدرس رياضيات

نهاية الجزء الثاني

mathemat

2026

للصف الثالث المتوسط

وداعا لصعوبة المنهج

الرياضيات

اعداد الاستاذ

رشيد عبد الله اللهيبى

مرشحات وزارية - شرح مبسط للمادة - ملاحظات وافية للمواضيع