الفصل الاول

اللوغاريتمات

نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات /

اكتشفت اللوغاريتمات في أوائل القرن السابع عشر لأهميتها في تبسيط الحسابات المعقدة للعلوم الطبيعية والهندسية. واللوغاريتمات أساسية في الحسابات التجارية والفكرة القائمة عليها اللوغاريتمات هي تحويل الأعداد على شكل أس ، والتعامل معها عوضا عن الأعداد الأصلية.
لقد اتت فكرة اللوغاريتم على أنها العملية العكسية للرفع، وهي رفع رقم لأس،

الصورة اللوغاريتمية

$$\underset{\text{للاساس}}{2}^{\overset{\text{العدد}}{\textcircled{3}}} = 8$$

Log ↗

العدد 3 للاساس 2 يساوي Log8

على سبيل المثال رفع الرقم 2 للأس 3 هو 8 ،
لأن الـ 8 تنتج عن ضرب 2 بنفسها 3 مرات

أي: $\underbrace{8 = 2\times2\times2 = 2^3}_{\text{الصورة الاسية}}$ وبالتالي تكون العملية العكسية للرفع هي $\underbrace{\text{Log}_2\ 8 = 3}_{\text{الصورة اللوغاريتمية}}$

الصورة الاسية ⟷ الصورة اللوغاريتمية

يمكننا القول أن ناتج رفع رقم ما b الى الأس 3
هو حاصل ضرب الرقم b بنفسه ثلاث مرات.

$$b^3 = \underbrace{b_1 \times b_2 \times b_3}_{n\ factor}$$

وبالتعميم فإن ناتج رفع الرقم b إلى الاس n
هو حاصل ضرب b بنفسه n مرة أي:

$$b^n = \underbrace{b_1 \times b_2 \times b_3 \times \dots\dots \times b_n}_{n\ factor}$$

يعرف لوغاريتم عدد ما ليكن (x) بالنسبة للأساس b بأنه الأس الذي يجب أن يرفع له b لينتج عنه (x)

أو يمكننا القول بأن لوغاريتم (x) بالنسبة للأساس b هو الأس (y) في المعادلة اللوغاريتمية $\boxed{b^y = x}$

وتكتب العبارة { لوغاريتم (x) بالنسبة للأساس b } رياضيا بالشكل: $\boxed{\text{Log}_b\,(x)}$

وناتج هذه المعادلة هو الأس (y) $\boxed{\text{Log}_b\,(x) = y}$

ولتعريف اللوغاريتم يجب أن يكون الأساس عدد حقيقي موجب لايساوي الصفر وX عدد موجب

مثال / (تدريب) اكتب الصورة المكافئة لكل مما ياتي :

$$\text{Log}_{10} 10000 = 4\ ,\ 7^3 = 343\ ,\ \text{Log}_5 1 = 25\ ,\ (0.01)^2 = 0.0001$$

صورة أسية	$10000 = 10^4$	⟷	صورة لوغاريتمية	$\text{Log}_{10} 1000 = 4$
صورة لوغاريتمية	$\text{Log}_7 343 = 3$	⟷	صورة أسية	$7^3 = 343$
صورة أسية	$5^{-2} = \frac{1}{25}$	⟷	صورة لوغاريتمية	$\text{Log}_5 \frac{1}{25} = -2$
صورة لوغاريتمية	$\text{Log}_{0.01} 0.0001 = 2$	⟷	صورة أسية	$(0.01)^2 = 0.0001$

$\text{Log}_{10} 10000 = 4$ يقرأ (لوغاريتم 1000 للاساس عشرة) ويسمى اللوغاريتم العشري

$\text{Log}_{2} 10 = ?$ يقرأ (لوغاريتم 10 للاساس أثنين) ويسمى اللوغاريتم الثنائي

صورة أسية $10 = 10^1$ $\longleftrightarrow$ صورة لوغاريتمية $\text{Log}_{10} 10 = 1$

صورة أسية $100 = 10^2$ $\longleftrightarrow$ صورة لوغاريتمية $\text{Log}_{10} 100 = 2$

صورة اسية $1000 = 10^3$ $\longleftrightarrow$ صورة لوغاريتمية $\text{Log}_{10} 1000 = 3$

صورة اسية $10000 = 10^4$ $\longleftrightarrow$ صورة لوغاريتمية $\text{Log}_{10} 10000 = 4$

تعلمنا كيفية تحويل اللوغاريتم من الصورة الاسية الى الصورة اللوغاريتمية وبالعكس

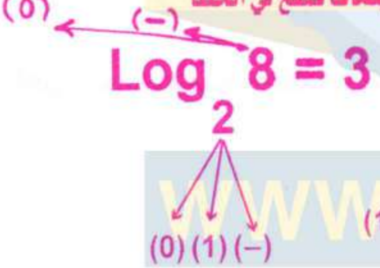
والان لو كان عندك في السؤال Log واحدة فقط (مفردة) جد حل $\text{Log}_{2} 8 = 3$

عند الحل نقوم بتحويله الى صورة اسية ونطبق قواعد الاسس

$$\underbrace{2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8}_{\text{الصورة الاسية}} \longleftrightarrow \underbrace{\text{Log}_{2} 8 = 3}_{\text{الصورة اللوغاريتمية}}$$

و لو كان عندك في السؤال $\text{Log}_n 1 = 0$ لوغاريتم (واحد) لاي اساس = صفر

واحذر من خمسة اشياء ممنوعة في الاجابة (مرفوضة) في حل اللوغاريتمات فتقع في الخطأ



امام اللوغاريتم

لا يجوز ان يكون امام اللوغاريتم اشارة سالبة (—) أو صفرا (0)

تحت اللوغاريتم

لا يجوز ان يكون تحت اللوغاريتم اشارة سالبة (—) أو صفرا (0) أو (1)

والسؤال المهم هنا / هل هناك اساسات متشابهة واساسات مختلفة للوغاريتم

نعم هناك اساسات متشابهة مثل $\boxed{\text{Log}_{10} 10 = 1}$ ، $\text{Log}_{10} 10 + \text{Log}_{10} 100 + \text{Log}_{10} 1000$

الحل / $\boxed{\text{Log}_{10} 10 = 1}$ ، $\boxed{\text{Log}_{10} 100 = 2}$ ، $\boxed{\text{Log}_{10} 1000 = 3}$

نقوم بتعويض عن كل لوغاريتم بما يساويه

$$\text{Log}_{10} 10 + \text{Log}_{10} 100 + \text{Log}_{10} 1000 = 1 + 2 + 3 = 4$$

لو اعطاني $\boxed{\text{Log}_{10} 100 = 2}$ فقط

فالحل نطبق قانون تحويل الى الصورة الاسية $\underbrace{10^2 = 10 \times 10 = 100}_{\text{الصورة الاسية}}$

$$\text{Log}_{10} 100 = 2 \longleftrightarrow 10^2 = 10 \times 10 = 100$$

والان لو اعطاني اكثر من Log فالحل يكون اما بتطبيق قانون اللوغاريتمات (مثل الجمع والطرح)

كما في المثال $4 = 3 + 2 + 1 = \text{Log}_{10} 1000 + \text{Log}_{10} 100 + \text{Log}_{10} 10$

الجمع والطرح يصح فقط الاساسات المتشابهة. والان اذا كانت الاساسات مختلفة ؟ ماذا نفعل

نعلم ان قوانين اللوغاريتمات هي خمسة قوانين مهمة

يطبق الجمع والطرح في حالة تشابه الاساسات كما في اعلاه

$$\text{Log}_n (a_1) + \text{Log}_n (a_2) = \text{Log}_n (a_1) \times (a_2) \quad (1)$$

$$\text{Log}_n (a_1) - \text{Log}_n (a_2) = \text{Log}_n \frac{(a_1)}{(a_2)} \quad (2)$$

$$\text{Log}_n (a_1)^b = b \, \text{Log}_n (a_1) \quad (3)$$

$$\text{Log}_n n = 1 \quad (4)$$

$$\text{Log}_n 1 = 0 \quad (5)$$

الجمع والطرح يطبق في تشابه الاساسات ، ولا يطبق الجمع او الطرح في الاساسات المختلفة

اذن لا نستطيع تطبيق قوانين اللوغاريتمات كما في المثال

اختصر $\dfrac{\text{Log}_5 8 + \text{Log}_3 125 - \text{Log}_2 27}{\text{Log}_5 4 + \text{Log}_3 25 - \text{Log}_2 9}$

الحل / ما دام الاساسات مختلفة نقوم بحل كل Log على حدة

$$\frac{\text{Log}_5 (2)^3 + \text{Log}_3 (5)^3 - \text{Log}_2 (3)^3}{\text{Log}_5 (2)^2 + \text{Log}_3 (5)^2 - \text{Log}_2 (3)^2}$$

$$\frac{3\text{Log}_5 (2) + 3\text{Log}_3 (5) - 3\text{Log}_2 (3)}{2\text{Log}_5 (2) + 2\text{Log}_3 (5) - 2\text{Log}_2 (3)}$$

$$\frac{3\left(\cancel{\text{Log}_5 (2) + \text{Log}_3 (5) - \text{Log}_2 (3)}\right)}{2\left(\cancel{\text{Log}_5 (2) + \text{Log}_3 (5) - \text{Log}_2 (3)}\right)} = \frac{3}{2}$$

اللوغاريتم الطبيعي /

دالة اللوغاريتم الطبيعي هي دالة اللوغاريتم للأساس e وهي الدالة الاصلية للدالة $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ ونرمز لهذه الدالة بـ Log والتي ترمز لدالة اللوغاريتم العشري أو Ln بصفة عامة:

حقائق حول اللوغاريتم /

$\forall x, y > 0$

if $x = y \rightarrow \text{Log}\, x = \text{Log}\, y$, if $x = \text{Log}\,y \rightarrow y = 10^x$

$\text{Log}10^x = x$, $\text{Log}x^y = y\text{Log}x$,

$\text{Log}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\text{Log}x$ مثال / $\text{Log}\sqrt{x} = \text{Log}(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\text{Log}x$

$\text{Log}xy = \text{Log}x + \text{Log}y$, $\text{Log}\frac{x}{y} = \text{Log}x - \text{Log}y$

$\text{Log}0.1 = -1$, $\text{Log}1 = 0$, $\text{Log}10 = 1$,

نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات

اكتشفت اللوغاريتمات في أوائل القرن السابع عشر لأهميتها في تبسيط الحسابات المعقدة للعلوم الطبيعية والهندسية. واللوغاريتمات أساسية في الحسابات التجارية والفكرة القائمة عليها اللوغاريتمات هي تحويل الأعداد على شكل أس . والتعامل معها عوضا عن الأعداد الأصلية .

استخدام اللوغاريتمات وتطبيقها في كافة العلوم /

(1)استخدامه في قياس قوة الزلازل على مقياس ريختر .

(2)يصف الرقم الهيدروجيني للمادة (PH)درجة حموضة المادة وتحسب باستخدام اللوغاريتمات للأساس 10 حيث الرقم الهيدروجيني $(PH = -\log(H^+))$. حيث H^+ تركيز ايون الهيدروجين في المادة .

(3)يستخدم في قياس شدة الصوت (L) بالديسيبل حيث $L = 10 \log \frac{a}{a^\circ}$ ، حيث a : تمثل شدة الصوت تستطيع الاذن تمييزها.

(4)حساب سرعة الصواريخ (V) حيث $V = 0.0098N + V_0Ln(R)$

N : زمن اشتعال وقود المحرك ، V_0 : سرعة انطلاق البخار ، Ln : اللوغاريتم الطبيعي

R : نسبة كتلة الصاروخ محمل بالوقود الى كتلته بدون وقود

(5)في الاحصاء يستخدم اللوغاريتم : في حساب الفائدة المركبة المستثمرة a $\boxed{a = Me^{R.N}}$

حيث M : المبلغ المستثمر ، R : الفائدة ، N : عدد السنوات

R : نسبة كتلة الصاروخ محمل بالوقود الى كتلته بدون وقود

(6)حساب الوسط الهندسي Geometric Mean $= \sqrt{x_1x_2x_3 \;.....\; x_n}$ =

وفي البنود اللاحقة سوف نتعلم اللوغاريتمات العشرية والطبيعية .

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

الدوال الاسية /لناخذ الدالة الحقيقية $f : R \longrightarrow R$ المعرفة بالقاعدة (قاعدة الاقتران) $f(x) = 2^x$

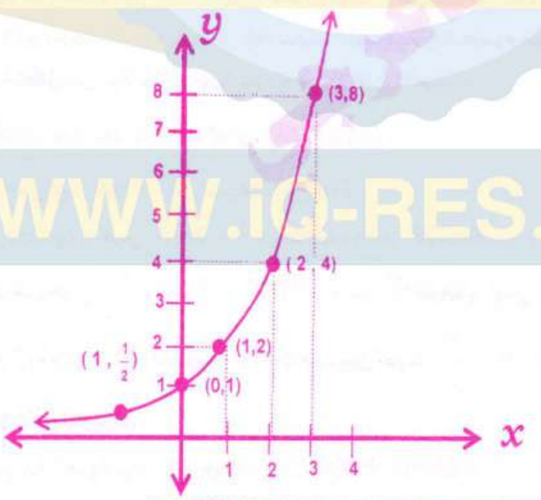
نقوم باعطاء قيم لـ (x) ولتكن $\{3 , 2 , 1 , 0 , -1 , -2 , -3\}$ كما في الجدول ادناه.

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$f(3) = 2^3 = 8 \;,\; f(2) = 2^2 = 4 \;,\; f(1) = 2^1 = 2 \;,\; f(0) = 2^0 = 1$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \;,\; f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^{-2}} = \frac{1}{4} \;,\; f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{8}$$

حيث ان كل زوج مرتب (x , y) يعين نقطة في المخطط البياني للدالة f حيث يمكن تمثيل الازواج المرتبة في المستوي الاحداثي والذي يمثل جزء من التمثيل البياني للدالة $\boxed{f(x) = 2^x}$



تعريف الدالة الاسية

اذا ان $a > 0$ حيث $a \neq 1$

فان الدالة $f : R \longrightarrow R$

حيث $f(x) = a^x$ وان $\forall x \in R$

حيث $f(x) = a^x$

تسمى الدالة الأسية للأساس a

الدالة اللوغاريتمية/هي دالة عكسية f^{-1} ، وهي دالة تقابل حيث $a \neq 1$ ، $a > 0$ فمجالها هو المجال المقابل للدالة الاسية R^+ وهي كذلك تقابل ايضا

تعريف/يرمز للدالة العكسية الدالة $y = a^x$ بالرمز $x = \text{Log}_a\, y$

ونقول ان x هو لوغاريتم y للأساس a

ويمكننا ان نكتب العلاقة الاتية: $x = \text{Log}_a y \longleftrightarrow y = a^x$ حيث $x \in R \,,\, y \in R$

مثال 1/ (كتاب)

أكتب $5^3 = 125$ بالصورة اللوغاريتمية

الحل / $5^3 = 125$ يكافيء

$y = a^x$ صورة اسية

$x = \text{Log}_a y$ يكافيء $\text{Log}_5 125 = 3$

مثال 2/ (كتاب)

أكتب $\text{Log}_2 32 = 5$ بالصورة اللوغاريتمية

الحل / $\text{Log}_a y = x$ يكافيء

$\text{Log}_2 32 = 5$ صورة لوغاريتمية

$y = a^x$ يكافيء $32 = 2^5$ صورة اسية

مثال / (تدريب) اكتب الصورة المكافئة لكل مما ياتي :

$$\text{Log}_{10} 10000 = 4 \ , \ 7^3 = 343 \ , \ \text{Log}_5 1 = 25 \ , \ (0.01)^2 = 0.0001$$

الحل /

صورة أسية $10000 = 10^4$ ⟷ صورة لوغاريتمية $\text{Log}_{10} 1000 = 4$

صورة لوغاريتمية $\text{Log}_7 343 = 3$ ⟷ صورة أسية $7^3 = 343$

صورة أسية $5^{-2} = \frac{1}{25}$ ⟷ صورة لوغاريتمية $\text{Log}_5 \frac{1}{25} = -2$

صورة لوغاريتمية $\text{Log}_{0.01} 0.0001 = 2$ ⟷ صورة أسية $(0.01)^2 = 0.0001$

خواص الدالة اللوغاريتمية /

(a) لكل عدد حقيقي موجب لوغارتيم وليس للأعداد الحقيقية السالبة لوغارتيمات حقيقية .

(b) بما ان الدالة اللوغاريتمية تقابل فان : $x = y \longleftrightarrow \text{Log}_a x = \text{Log}_b y \ , \ x, y \in R^+$

(c) لما كان $a > 0 \ , \ a \neq 1$ فلكل $x, y \in R^+$ ستقبل القواعد التالية بدون برهان

① $$\text{Log}_a (x) \times (y) = \text{Log}_a (x) + \text{Log}_a (y)$$

② $$\text{Log}_a \frac{x}{y} = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$$

③ $$\text{Log}_a x^y = y \, \text{Log}_a x$$

④ $$\text{Log}_a a = 1$$

⑤ $$\text{Log}_a 1 = 0$$

مثال 3/ (كتاب) أثبت ان $\mathrm{Log}_2\left(\frac{17}{5}\right)-\mathrm{Log}_2\left(\frac{34}{45}\right)+2\mathrm{Log}_2\left(\frac{2}{3}\right)=1$

خطوات الحل / الاساسات متشابهة وهي الاساس 2

الطرف الايسر $= \mathrm{Log}_2\left(\frac{17}{5}\right)-\mathrm{Log}_2\left(\frac{34}{45}\right)+\textcircled{2}\,\mathrm{Log}_2\left(\frac{2}{3}\right)$

حسب القاعدة رقم ③ $\mathrm{Log}_a x^y = y\,\mathrm{Log}_a x$

$$= \mathrm{Log}_2\left(\frac{17}{5}\right)-\mathrm{Log}_2\left(\frac{34}{45}\right)+\mathrm{Log}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \mathrm{Log}_2\left(\frac{17}{5}\right)-\mathrm{Log}_2\left(\frac{34}{45}\right)+\mathrm{Log}_2\left(\frac{4}{9}\right)$$

حسب القاعدة رقم ② $\mathrm{Log}_a \frac{x}{y} = \mathrm{Log}_a x - \mathrm{Log}_a y$

$$= \mathrm{Log}_2 \frac{\frac{17}{5}}{\frac{34}{45}} \times \frac{4}{9}$$

نستخدم عملية قلب البسط مقام والمقام بسط

$$= \mathrm{Log}_2 \frac{\cancel{17}}{\cancel{5}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{45}}}{\underset{2}{\cancel{34}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{9}$$

نستخدم القاعدة رقم ④ $\mathrm{Log}_a a = 1$ الطرف الايمن $= \mathrm{Log}_2 2 = 1 =$

الحل / الأساسات متشابهة وهي للأساس 2

الطرف الايسر $= \mathrm{Log}_2\left(\frac{17}{5}\right)-\mathrm{Log}_2\left(\frac{34}{45}\right)+2\,\mathrm{Log}_2\left(\frac{2}{3}\right)$

$$= \mathrm{Log}_2\left(\frac{17}{5}\right)-\mathrm{Log}_2\left(\frac{34}{45}\right)+\mathrm{Log}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \mathrm{Log}_2\left(\frac{17}{5}\right)-\mathrm{Log}_2\left(\frac{34}{45}\right)+\mathrm{Log}_2\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \mathrm{Log}_2 \frac{\frac{17}{5}}{\frac{34}{45}} \times \frac{4}{9} = \mathrm{Log}_2 \frac{\cancel{17}}{\cancel{5}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{45}}}{\underset{2}{\cancel{34}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{9}}$$

الطرف الأيمن $= \mathrm{Log}_2 2 = 1 =$

مثال 4/ (كتاب) جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

$$(a)\ \boxed{\log_3 x = 4}\ ,\quad (b)\ \boxed{\log_x 64 = 6}\ ,\quad (c)\ \boxed{\log_5 \frac{1}{125} = x}$$

خطوات الحل / تعلمنا كيفية تحويل اللوغاريتم من الصورة الاسية الى الصورة اللوغاريتمية وبالعكس

والان لو كان عندك في السؤال Log واحدة فقط (مفردة) مثل $\log_3 x = 4$

نحول الـ Log الى صورة اسية لانه مفرد ويطلب مجموعة حل الـ Log

$$\log_3 x = 4 \longleftrightarrow x = 3^4,\ x = 3^4 = 81\ ,\ \therefore S = \{81\}$$

(a) الحل /	(b) الحل /	(c) الحل /
$\log_3 x = 4 \leftrightarrow x = 3^4$	$\log_x 64 = 6 \leftrightarrow x^6 = 64$	$\log_5 \frac{1}{125} = x \leftrightarrow \frac{1}{125} = 5^x$
$x = 3^4$	$x^6 = 64 \rightarrow x^6 = 2^6$	$\frac{1}{5^3} = 5^x \rightarrow 5^{-3} = 5^x$
$x = 3^4 = 81$	$\therefore x = \mp 2$	$x = -3$
$\therefore S = \{81\}$	$\therefore S = \{2\}$	$\therefore S = \{-3\}$

مثال (اثرائي) جد مجموعة حل $\log_x 343 = 3$

الحل /

$$\log_x 343 = 3 \longleftrightarrow 343 = x^3$$

$$7^3 = x^3 \rightarrow x = 7$$

$$\therefore S = \{7\}$$

نحلل العدد 343

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}\quad 7^3$$

مثال (اثرائي) جد العدد الذي لوغاريتمه للأساس $\frac{1}{4}$ هو 2.5

الحل / نفرض ان العدد = x ، اذن $\longleftarrow$ $\log_{\frac{1}{4}} x = 2.5$

$$x = \left(\frac{1}{4}\right)^{2.5} \rightarrow x = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{2.5}$$

$$x = \frac{(1)^{2.5}}{(2^2)^{2.5}} \rightarrow x = \frac{1}{2^5} \rightarrow x = \frac{1}{32}$$

قاعدة مهمة /

اذا كان $X < 1$ (أي ان X عدد عشري موجب) فان $\text{Log } x$ سوف يتكون من جزئين وهما :
الجزء الاول : هو العدد البياني والذي ينتمي للاعداد الصحيحة الموجبة والسالبة
الجزء الثاني : هو الكسر اللوغاريتمي العشري الموجب ، حيث يستخرج هذا الكسر من الجداول اللوغاريتمية
اما العدد البياني فاننا نستخرجه كالاتي : حيث ان العدد اللوغاريتمي لـ لوغاريتم اي عدد موجب اقل من (1) صحيح يساوي عددا مساويا لـ [عدد الاصفار التي تلي الفارزة العشرية مباشرة + 1] وباشارة سالبة (−)

مثال / (تدريب) جد Log 0.03

الحل / كما في الجزء الاول فاننا نجد العدد البياني (حيث ان عدد الاصفار في هذا المثال التي تاتي بعد الفارزة العشرية هو صفرا واحدا فقط) ، لذلك فان العدد البياني = 1 + 1 = 2 ونضع فوق الناتج اشارة سالبة فيصبح العدد البياني $(^{-}2)$

اما الجزء الثاني وهو الكسر اللوغريتمي العشري الموجب فاننا نستخرجه من جدول اللوغاريتمات حيث ان لوغاريتم الرقم 3 والذي ياتي بعد الاصفار العشرية يساوي 0.4771

$$\text{Log } 0.03 = \overset{\text{العدد البياني}}{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\;{}^{-}2}.\overbrace{4771}^{\text{الكسر اللوغاريتمي}}$$

مثال / جد Log 0.002

الحل / كما في الجزء الاول فاننا نجد العدد البياني (حيث ان عدد الاصفار في هذا المثال التي تاتي بعد الفارزة العشرية هو صفران فقط) . لذلك فان العدد البياني = 2 + 1 = 3 ونضع فوق الناتج اشارة سالبة فيصبح العدد البياني $(^{-}3)$
اما الجزء الثاني وهو الكسر اللوغريتمي العشري الموجب فاننا نستخرجه من جدول اللوغاريتمات حيث ان لوغاريتم الرقم 3 والذي ياتي بعد الاصفار العشرية يساوي 0.3010

$$\text{Log } 0.002 = {}^{-}3.3010$$

مثال (اثرائي) اذا كانت $\text{Log}_{10} 2 = 0.3010$, $\text{Log}_{10} 3 = 0.4771$ جد قيمة ما ياتي :

ⓒ $\text{Log}_{10} 5$	ⓑ $\text{Log}_{10} 30$	ⓐ $\text{Log}_{10} 2000$
الحل /	الحل /	الحل / $= \text{Log}_{10} 2 \times 1000$
$= \text{Log}_{10} \frac{10}{2}$	$= \text{Log}_{10} 3 \times 10$	$= \text{Log}_{10} 2 + \text{Log}_{10} 1000$
$= \text{Log}_{10} 10 - \text{Log}_{10} 2$	$= \text{Log}_{10} 3 + \text{Log}_{10} 10$	$= \text{Log}_{10} 2 + \text{Log}_{10} 10^3$
$= 1 - 0.3010$	$= 0.4771 + 1$	$= \text{Log}_{10} 2 + 3\text{Log}_{10} 10$
$= 0.6990$	$= 1.4771$	$= 0.3010 + 3 \times 1 = 3.3010$

تمارين (1 − 1)

1) فيما يلي علاقات غير صحيحة دائما . مثلا اعط $x = a$, $y = a$ وبين ذلك .

ⓑ $\text{Log}_a (x - y) \neq \frac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a y}$ الحل / $\text{Log}_a (x - y) \neq \frac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a y}$ $\text{Log}_a (x - y) \neq \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$ $\text{Log}_a (a - a) \neq \text{Log}_a a - \text{Log}_a a$ $\text{Log}_a (0) \neq 1 - 1$ $\text{Log}_a (0) \neq 0$	ⓐ $\text{Log}_a (x + y) \neq \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$ الحل / $\text{Log}_a (x + y) \neq \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$ $\text{Log}_a (a + a) \neq \text{Log}_a a + \text{Log}_a a$ $\text{Log}_a (a + a) \neq \text{Log}_a a + \text{Log}_a a$ $\text{Log}_a (2a) \neq \text{Log}_a a + \text{Log}_a a$ $\text{Log}_a 2 + \text{Log}_a a \neq \text{Log}_a a + \text{Log}_a a$ $\text{Log}_a 2 + 1 \neq 1 + 1$ $0.3010 + 1 \neq 2$ $1.3010 \neq 2$
ⓓ $\text{Log}_a x^2 \neq (\text{Log}_a x)^2$ الحل / $\text{Log}_a a^2 \neq (\text{Log}_a a)^2$ $2\text{Log}_a a \neq (\text{Log}_a a)^2$ $2 \times 1 \neq (1)^2$ $2 \neq 1$	ⓒ $\text{Log}_a (x . y) \neq \text{Log}_a x \cdot \text{Log}_a y$ الحل / $\text{Log}_a (a . a) \neq \text{Log}_a a \cdot \text{Log}_a a$ $\text{Log}_a a^2 \neq \text{Log}_a a \cdot \text{Log}_a a$ $2\text{Log}_a a \neq \text{Log}_a a \cdot \text{Log}_a a$ $2 \times 1 \neq 1 \times 1$ $2 \neq 1$

2) جد قيمة x

ⓑ $\text{Log}_x \frac{1}{8} = -3$ الحل / $\text{Log}_x \frac{1}{8} = -3 \rightarrow x^{-3} = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{2^3} \rightarrow x^3 = 2^3 \rightarrow x = 2$	ⓐ $\text{Log}_{10} 0.001 = x$ الحل / $\text{Log}_{10} 0.001 = x \rightarrow 10^x = 0.001$ $10^x = \frac{1}{10^3} \rightarrow 10^x = 10^{-3} \rightarrow x = -3$ اذا تساوت الأساسات تساوت الأسس
	ⓒ $\text{Log}_{10} x = 5$ الحل / $\text{Log}_{10} x = 5 \rightarrow x = 10^5$ $x = 100000$

3)جد قيمة ما ياتي

ⓐ $\log_{10}\frac{40}{9} + 4\log_{10}5 + 2\log_{10}6$

الحل /

$\log_{10}\frac{40}{9} + 4\log_{10}5 + 2\log_{10}6$

$= \log_{10}\frac{40}{9} + \log_{10}(5)^4 + \log_{10}(6)^2$

$= \log_{10}\frac{40}{9} \times (5\times5\times5\times5) \times (6\times6)$

$= \log_{10}\frac{40}{9} \times (25\times25) \times (36)$

$= \log_{10}\frac{40}{\cancel{9}} \times \frac{625}{1} \times \frac{\overset{4}{\cancel{36}}}{1}$

$= \log_{10} 40\times625\times4$

$= \log_{10}100000 = \log_{10}10^5$

$= 5\log_{10}10 = 5\times1 = 5$

ⓑ $2\log_{10}8 + \log_{10}125 - 3\log_{10}200$

الحل /

$2\log_{10}8 + \log_{10}125 - 3\log_{10}200$

$= \log_{10}(8)^2 + \log_{10}125 - 3\log_{10}(200)^3$

$= \log_{10}\frac{64\times125}{200\times200\times200}$

$= \log_{10}\frac{\cancel{8}000}{\cancel{8}000000} = \log_{10}\frac{1}{1000}$

$= \log_{10}\frac{1}{1000} = \log_{10}\frac{1}{10^3} = \log_{10}10^{-3}$

$= -3\log_{10}10 = -3\times1 = -3$

Ⓒ $\log_a(x^2-1) - 2\log_a(x-1) + \log_a\frac{(x-1)}{(x+1)}$

الحل /

$\log_a(x^2-1) - 2\log_a(x-1) + \log_a\frac{(x-1)}{(x+1)}$

$= \log_a(x^2-1) - \log_a(x-1)^2 + \log_a\frac{(x-1)}{(x+1)}$

$= \log_a \frac{\overset{\text{فرق بين مربعين}}{(x^2-1)}}{\underset{\text{مربع حدانية}}{(x-1)^2}} \times \frac{(x-1)}{(x+1)} = \log_a \frac{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-1)}} \times \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}} = \log_a 1 = 0$

ⓓ $\log_2 8 - \log_3 27 - \log_5 625$

الحل /

$$\log_2 8 - \log_3 27 - \log_5 625 = \log_2 2^3 - \log_3 3^3 - \log_5 5^4$$
$$= 3\log_2 2 - 3\log_3 3 - 4\log_5 5 = 3\times1 - 3\times1 - 4\times1$$
$$= \cancel{3} - \cancel{3} - 4 = -4$$

---

4)اذا كانت $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 2 = 0.3010$ جد قيمة :

ⓒ $\log_{10} 12$	ⓑ $\log_{10} 3000$	ⓐ $\log_{10} 0.002$
الحل /	**الحل /**	/ **الحل**$\log_{10} 0.002$
$\log_{10} 12$	$\log_{10} 3000$	$= \log_{10} \frac{2}{1000}$
$= \log_{10} 3\times4$	$= \log_{10} 3\times1000$	$= \log_{10} 2 - \log_{10} 1000$
$= \log_{10} 3\times2\times2$	$= \log_{10} 3 + \log_{10} 10^3$	$= \log_{10} 2 - \log_{10} 10^3$
$= \log_{10} 3 + \log_{10} 2 + \log_{10} 2$	$= \log_{10} 3 - 3\log_{10} 10$	$= \log_{10} 2 - 3\log_{10} 10$
$= 0.4771 + 0.3010 + 0.3010$	$= 0.4771 + (3\times1)$	$= 0.3010 - (3\times1)$
$= 1.0791$	$= 0.4771 + 3$	$= 0.3010 - 3$
	$= 3.4771$	$= -3.3010$

---

5)حل المعادلات الاتية :

ⓐ $\log_3 (2x-1) + \log_3 (x+4) = \log_3 5$

الحل /نشاهد الأساسات متساوية فنستخدم قانوني الجمع والطرح في اللوغاريتمات

$$\log_3 (2x-1) + \log_3 (x+4) - \log_3 5 = 0$$

$$\log_3 \frac{(2x-1)\times(x+4)}{5} = 0 \longleftrightarrow \frac{(2x-1)(x+4)}{5} = 3^0$$

حولنا المعادلة من صورة لوغاريتمية الى صورة اسية $a^x = y$ حسب القاعدة

$$\frac{(2x-1)(x+4)}{5} = 1$$

حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين

$$(2x-1)(x+4) = 5$$
$$(2x-1)(x+4) - 5 = \cancel{5} - \cancel{5}$$
$$2x^2 + 8x - x - 4 - 5 = 0$$
$$2x^2 + 7x - 9 = 0$$
$$(2x+9)(x-1) = 0$$

اما $2x + 9 = 0 \rightarrow 2x = -9 \rightarrow x = \frac{-9}{2}$ تهمل $\notin R^+$

أو $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ $\quad \therefore S = \{1\}$

طريقة ثانية للحل /نشاهد الأساسات متساوية فنستخدم قانوني الجمع والطرح في اللوغاريتمات

$$\text{Log}_3(2x-1)+\text{Log}_3(x+4)=\text{Log}_3 5$$

$$\text{Log}_3(2x-1)\times(x+4)=\text{Log}_3 5$$

$$\cancel{\text{Log}_3}(2x-1)\times(x+4)=\cancel{\text{Log}_3}\,5$$

$$(2x-1)(x+4)=5$$

$$(2x-1)(x+4)-5=\cancel{5}-\cancel{5}$$

$$2x^2+8x-x-4-5=0$$

$$2x^2+7x-9=0$$

$$(2x+9)(x-1)=0$$

أما $2x+9=0 \rightarrow 2x=-9 \rightarrow x=\frac{-9}{2}$ تهمل $\notin R^+$

أو $x-1=0 \rightarrow x=1$

$\therefore S=\{1\}$

ⓑ $\text{Log}_2(3x+5)-\text{Log}_2(x-5)=3$

الحل /نشاهد الأساسات متساوية فنستخدم قانوني الجمع والطرح في اللوغاريتمات

$$\text{Log}_2(3x+5)-\text{Log}_2(x-5)=3$$

$$\text{Log}_3\frac{(3x+5)}{(x-5)}=3 \longleftrightarrow \frac{(3x+5)}{(x-5)}=2^3$$

حولنا المعادلة من صورة لوغاريتمية الى صورة اسية $a^x=y$ حسب القاعدة

$$\frac{(3x+5)}{(x-5)}=\frac{8}{1}$$

حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين

$$8(x-5)=(3x+5)$$

$$8x-8\times5=3x+5$$

$$8x-3x-40=\cancel{3x}-\cancel{3x}+5$$

$$5x-40-5=\cancel{5}-\cancel{5}$$

$$5x-45=0 \rightarrow 5x=45 \rightarrow x=\frac{45}{5}=9 \in R^+$$

$\therefore S=\{9\}$

اللوغاريتمات العشرية/

ان اللوغاريتم الذي اساسه ($a = 10$) 10 يسمى اللوغاريتم العشري وقد اتفق على عدم كتابة الاساس حين استعماله حيث $\text{Log}_{10}\, y$ يكتب بشكل $\text{Log}\, y$

$\text{Log}_{10}\, 10000 = 4$ يقرأ (لوغاريتم 10000 للاساس عشرة) ويكتب $\text{Log}\,10000$

مثال / (**تدريب**)جد ناتج لكل مما ياتي :

ⓐ $\text{Log}_{10}\, 10000$, ⓑ $\text{Log}_{10}\, 1000$, Ⓒ $\text{Log}_{10}\, 100$, ⓓ $\text{Log}_{10}\, 10$

الحل / ⓐ $\text{Log}10000 = \text{Log}10^4 = 4$, ⓑ $\text{Log}1000 = \text{Log}10^3 = 3$

Ⓒ $\text{Log}100 = \text{Log}10^2 = 2$, ⓓ $\text{Log}10 = \text{Log}10^1 = 1$

اللوغاريتمات الطبيعية /

والتي تسمى باللوغاريتمات الطبيعية وتكتب ($a = e = 2.71828$) وهي اللوغاريتمات التي اساسها

$\boxed{x = \ln y \longleftrightarrow y = e^x}$ ويمكن ان نحصل على ($a = e$) حيث $\ln y$ بالشكل

نتيجة 1/ $\ln e^x = x \ , \ x \in R$

البرهان / $\ln e^x = x \times \ln e = x \times 1 = x$

$\therefore \ln e^x = x$

مثال 1/ (**كتاب**)جد قيمة x اذا علمت ان $e^{2x-1} = 8$

الحل / ناخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين $\ln e^{2x-1} = \ln 8$ وحسب نتيجة (1)

$2x - 1 = \ln 8 \rightarrow 2x - \cancel{1} + \cancel{1} = \ln 8 + 1$

$2x = 1 + \ln 8 \rightarrow x = \dfrac{1 + \ln 8}{2}$

نتيجة2 / (**تبديل الاساس**) $\text{Log}_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \ , \ \forall a > 0 \ , \ a \neq 1$

أو يمكن كتابتها بالشكل : $\text{Log}_a x = \dfrac{\text{Log}\ x}{\text{Log}\ a}$

البرهان / ناخذ الطرف الايسر $y = \text{Log}\ x \longleftrightarrow x = a^y$ .... (1)

نقوم باخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين في العلاقة (1) $\ln x = \ln a^y$

$\ln x = y \ln a \rightarrow y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ ← الطرف الايسر

وبنفس الطريقة ناخذ اللوغاريتم العشري لطرفي العلاقة (1) فينتج $\text{Log}_a x = \dfrac{\text{Log}\ x}{\text{Log}\ a}$

مثال 2/ (كتاب) ما قيمة $\frac{1}{\text{Log}_3 15}+\frac{1}{\text{Log}_5 15}$

الحل / باستخدام نتيجة (2)

$$\frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 3}}+\frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 5}}=\frac{\ln 3}{\ln 15}+\frac{\ln 5}{\ln 15}$$

$$=\frac{\ln 3+\ln 5}{\ln 15}=\frac{\ln 15}{\ln 15}=1$$

استخدام الالة الحاسبة / في هذا الموضوع ندرس كيفية استخدام الالة الحاسبة Calculator لايجاد لوغاريتم عدد ، ولوغاريتمات الاعداد المقابلة .

أولا – ايجاد لوغاريتم العدد /

① **اللوغاريتمات العشرية/** نكتب العدد المراد ايجاد لوغاريتمه ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر الناتج

مثال 1/ (كتاب) جد ⓓ Log 1.5 ، ⓒ Log 0.08 ، ⓑ Log 13 ، ⓐ Log 7

الحل / ⓐ نكتب 7 ثم نضغط على Log فيكون الناتج 0.84509804

اي ان Log 7 = 0.8450984

ⓑ نكتب العدد 13 ثم نضغط على Log فيكون الناتج 1.11394335

اي ان Log 13 = 1.11394335

ⓒ نكتب العدد 0.8 ثم نضغط على Log فيكون الناتج −1.096910013

اي ان Log 0.8 = −1.096910013

ⓓ نكتب العدد 1.5 ثم نضغط على Log فيكون الناتج 0.17609125

اي ان Log 1.5 = 0.17609125

② **اللوغاريتمات الطبيعية ln /** نكتب العدد المراد ايجاد لوغاريتمه ثم نضغط على مفتاح ln فيظهر الناتج

مثال 1/ (كتاب) جد ⓓ ln 1.5 ، ⓒ ln 0.08 ، ⓑ ln 13 ، ⓐ Ln 7

الحل / ⓐ نكتب 7 ثم نضغط على ln فيكون الناتج 1.94510149

اي ان ln 7 = 1.94510149

ⓑ نكتب العدد 13 ثم نضغط على ln فيكون الناتج 2.56494935

اي ان ln 13 = 2.56494935

ⓒ نكتب العدد 0.8 ثم نضغط على Ln فيكون الناتج −2.52572864

اي ان ln 0.8 = −2.52572864

ⓓ نكتب العدد 1.5 ثم نضغط على ln فيكون الناتج 0.405465108

اي ان Ln 1.5 = 0.405465108

ثانيا – ايجاد العدد المقابل اذا علم لوغاريتمه /

① **في حالة اللوغاريتمات العشرية** / نكتب لوغاريتم العدد (المعطى) ونضغط على مفتاح **2ndF** ويكون لونه (لون المفتاح) مغاير للون الاسود (اما اصفر أو أزرق) ثم نضغط بعدها على مفتاح Log فيظهر العدد المطلوب

مثال 3/ (كتاب) جد الأعداد المقابلة للأعداد التي لوغاريتماتها العشرية هي :

ⓓ 0.176091259 ، ⓒ −1.096910013 ، ⓑ 1.113943352 ، ⓐ 0.84509804

الحل / ⓐ نكتب العدد 0.84509804 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على مفتاح Log
فيظهر العدد 7

ⓑ نكتب العدد 1.113943352 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على
مفتاح Log فيظهر العدد $12.99999999 \simeq 13$

ⓒ نضغط مفتاح ⊖ نكتب العدد 1.096910013 .ثم نضغط على ⊜
فيظهر 1.096910013− ثم نضغط 2ndF ثم نضغط على مفتاح Log
فيظهر العدد 0.08

ⓓ نكتب العدد 0.176091259 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على مفتاح Log
فيظهر العدد 1.5

---

② في حالة اللوغاريتمات الطبيعية ln / نكتب لوغاريتم العدد (المعطى) ونضغط على مفتاح 2ndF
ثم نضغط على مفتاح ln فيظهر العدد المطلوب

مثال 4/ (كتاب) جد الأعداد المقابلة للأعداد التي لوغاريتماتها الطبيعية هي :

ⓓ 0.405465108 ، ⓒ −2.525728644 ، ⓑ 2.564949357 ، ⓐ 1.945910149

الحل / ⓐ نكتب العدد 1.945910149 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على مفتاح ln
فيظهر العدد 7

ⓑ نكتب العدد 2.564949357 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على
مفتاح ln فيظهر العدد $12.99999999 \simeq 13$

ⓒ نضغط مفتاح ⊖ نكتب العدد 2.525728644 ثم نضغط على ⊜
فيظهر 2.525728644− ثم نضغط 2ndF ثم نضغط على مفتاح ln
فيظهر العدد 0.08

ⓓ نكتب العدد 0.405465108 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على مفتاح ln
فيظهر العدد 1.5

أمثلة تطبيقية على قواعد اللوغاريتمات (استخدم التك الحاسبة)

مثال 1/ (كتاب)/ جد قيمة $\text{Log}_8 5$

الحل /

بتبديل الاساسات الى اساس 10 يكون (نتيجة 2)

$$\text{Log}_8 5 = \frac{\text{Log}5}{\text{Log}8} = \frac{0.69897}{0.90309} \simeq 0.77397$$

مثال 2/ (كتاب)/ جد قيمة $ln3 + \text{Log}3$

الحل /

$\text{Log}3 = 0.4771$, $ln3 = 1.0986$

$ln3 + \text{Log}3 = 1.0986 + 0.4771$

$= 1.5757$

مثال 3/ (كتاب)/ جد قيمة

$\text{Log}_5 14 - \text{Log}_5 7$

الحل / $\text{Log}_5 14 - \text{Log}_5 7 = \text{Log}_5 \frac{14}{7}$

وباستخدام تبديل الاساس نتيجة 2

$$\text{Log}_5 \frac{14}{7} = \frac{\text{Log}2}{\text{Log}2} = \frac{0.3010}{0.6989} = 0.4307$$

مثال 4/ (كتاب)/ جد قيمة

$x = \sqrt[3]{(65.26)^2}$

الحل / $x = (65.26)^{2/3}$

وباستخدام الالة الحاسبة

$\text{Log}x = \text{Log}(65.26)^{2/3}$

$\text{Log}x = \frac{2}{3}\text{Log}(65.26)$

$\text{Log}x = \frac{2}{3} \times 1.8147 = 1.2098$

$x = 16.2106$

مثال 5/ (كتاب)/ حل المعادلة $7^{3x} = 81$

الحل / $7^{3x} = 81$ ناخذ Log_7 للطرفين

$\text{Log}_7 7^{3x} = \text{Log}_7 81$

$3x\text{Log}_7 7 = \text{Log}_7 81$

$3x \, \overset{1}{\cancel{\text{Log}_7 7}} = \frac{\text{Log}81}{\text{Log}7} \rightarrow 3x = \frac{\text{Log}81}{\text{Log}7}$

$3x = \frac{1.9085}{0.8451}$ باستخدام الالة الحاسبة

$3x \simeq 2.2583 \rightarrow x \simeq \frac{2.2583}{3} = 0.7528$

مثال 6/ (كتاب) بفرض انك تستثمر (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستثمرة قدرها 5.5%

أوجد جملة ما ستحصل عليه بعد (5) سنوات

الحل / قانون حساب الفائدة المركبة المستثمرة هو $a = \text{M}e^{\text{R}\times\text{N}}$
حيث M المبلغ ، R : الفائدة السنوية ، N: عدد السنوات

$a = 2000000 \times e^{\frac{55}{1000}\times 5} \rightarrow a = 2000000 \times e^{0.275}$ باخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$ln\, a = ln\, 2000000 + 0.275\, ln\, e$

$ln\, a = 14.78365774 \rightarrow a \simeq 2633061$

مثال 7/ (كتاب) جد الوسط الهندسي للاعداد : 99 , 120 , 110 , 93 , 105

الحل / الوسط الهندسي $= \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times .... \times x_n}$

الوسط الهندسي $= \sqrt[5]{105 \times 93 \times 110 \times 120 \times 99}$

Log الوسط الهندسي $= \frac{1}{5}\left[(\text{Log}99 + \text{Log}120 + \text{Log}110 + \text{Log}93 + \text{Log}105)\right]$

$= \frac{1}{5}\left[(10.105881)\right] = 2.021176$

باستخدام الالة الحاسبة لايجاد العدد المقابل نجد ان

الوسط الهندسي = 104.996851

تمارين (2 – 1)

1) جد قيمة كل من : $\text{Log}_{10} 8 , \text{Log}_5 11 , ln\ 20$

الحل / استخدم الالة الحاسبة

$\text{Log}_{10} 8 = 0.903090 , \text{Log}_5 11 = \frac{\text{Log}11}{\text{Log}5} = 1.489896 , ln\ 20 = 2.995732$

---

2) جد قيمة كل مما ياتي :

ⓐ $2\text{Log}_4 58 - \text{Log}_7 21$, ⓑ $\text{Log}_6 26 + \text{Log}26 + ln26$

الحل / ⓐ $2\text{Log}_4 58 - \text{Log}_7 21$

$2\text{Log}_4 58 - \text{Log}_7 21 = 2\frac{\text{Log}58}{\text{Log}4} - \frac{\text{Log}21}{\text{Log}7} = 4.293406$

ⓑ $\text{Log}_6 26 + \text{Log}26 + ln26 = \frac{\text{Log}26}{\text{Log}6} + \text{Log}26 + ln26 = 6.491448$

---

3) جد قيمة كل مما ياتي : ⓑ $(11.023)^9$ ، ⓐ $\sqrt[4]{0.0562}$

الحل /

ⓑ $(11.023)^9$

$x = (11.023)^9$

$ln\ x = ln\ (11.023)^9$

$ln\ x = 9ln\ (11.023)$

$x = 2402692909$

ⓐ $\sqrt[4]{0.0562}$

$x = (0.0562)^{\frac{1}{4}}$

$ln\ x = ln\ (0.0562)^{\frac{1}{4}}$

$ln\ x = \frac{1}{4}\left[ln\ (0.0562)\right]$

$ln\ x = \frac{1}{4}\left[ln\ (0.0562)\right]$

$x = 0.486894$

4) حل كلا مما ياتي : ⓑ $e^{2x+1}= 10$ ، ⓐ $2^x = 25$

الحل /

ⓑ $e^{2x+1}= 10$

$$\ln e^{2x+1} = \ln 10$$

$$2x + 1 = \ln 10$$

$$2x + \cancel{1} - \cancel{1} = \ln 10 - 1$$

$$x = \frac{\ln 10 - 1}{2}$$

$$x = \frac{2.30258 - 1}{2}$$

$$x = 0.651293$$

ⓐ $2^x = 25$

$$2^x = 5^2$$

$$\ln 2^x = \ln 5^2$$

$$x\ln 2 = 2\ln 5$$

$$x = \frac{2\ln 5}{\ln 2}$$

$$x = \frac{2 \times [1.6094]}{0.693147}$$

$$x = 4.643856$$

5)باستخدام قانون الفائدة المركبة $a = Me^{R\times N}$ لاستثمار مليون دينار بفائدة قدرها 55% ولمدة (3) سنوات . جد جملة ما تحصل عليه .

الحل /

$$a = 1000000\times e^{0.105} \quad a = 1000000\times e^{\frac{55}{1000}\times 3} \rightarrow$$

بأخذ $\ln$ للطرفين

$$\ln a = \ln 1000000 + 0.105 \ln e$$

$$\ln a = 13.815511 + 0.105$$

$$\ln a = 13.815511 + 0.105$$

$$a = 1110710.610$$

6)جد الوسط الهندسي للأعداد 93 , 84 , 96 , 88 , 60 ; 71 , 89 , 90 , 82 , 4

الحل /

$$M = \sqrt[10]{93 \times 84 \times 96 \times 88 \times 60 \times 71 \times 89 \times 90 \times 82 \times 4}$$

$$\ln M = \ln (93 \times 84 \times 96 \times 88 \times 60 \times 71 \times 89 \times 90 \times 82 \times 4)^{\frac{1}{10}}$$

$$\ln M = \frac{1}{10}(\ln 93 + \ln 84 + \ln 96 + \ln 88 + \ln 60 + \ln 71 + \ln 89 + \ln 90 + \ln 82 + \ln 4)$$

$$\ln M = \frac{1}{10}(41.143585)$$

$$\ln M = 1.114359$$

$$M = 61.212936$$

7) اثبت ان ⓐ $\frac{1}{\text{Log}_a abc}+\frac{1}{\text{Log}\,abc}+\frac{1}{\text{Log}\,abc}=1$

الحل /

الطرف الايسر $=\frac{1}{\text{Log}_a a+\text{Log}_a b+\text{Log}_a c}+\frac{1}{\text{Log}_a a+\text{Log}_a b+\text{Log}_a c}+\frac{1}{\text{Log}_a a+\text{Log}_a b+\text{Log}_a c}$

$$=\frac{1}{\frac{\text{Log}_a a}{\text{Loga}}+\frac{\text{Log}_a b}{\text{Loga}}+\frac{\text{Log}_a c}{\text{Loga}}}+\frac{1}{\frac{\text{Log}_a a}{\text{Logb}}+\frac{\text{Log}_a b}{\text{Logb}}+\frac{\text{Log}_a c}{\text{Logb}}}+\frac{1}{\frac{\text{Log}_a a}{\text{Logc}}+\frac{\text{Log}_a b}{\text{Logc}}+\frac{\text{Log}_a c}{\text{Logc}}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\text{Loga Logb + Logc}}{\text{Loga}}}+\frac{1}{\frac{\text{Loga Logb + Logc}}{\text{Logb}}}+\frac{1}{\frac{\text{Loga Logb + Logc}}{\text{Logc}}}$$

$$=\frac{\text{Loga}}{\text{Loga + Logb + Logc}}+\frac{\text{Logb}}{\text{Loga + Logb + Logc}}+\frac{\text{Logc}}{\text{Loga Logb + Logc}}$$

$=\frac{\cancel{\text{Loga + Logb + Logc}}}{\cancel{\text{Loga + Logb + Logc}}}=1=$ الطرف الايمن

ⓑ $\text{Log}\frac{40}{9}+2(2\text{Log}5+\text{Log}6)=5$

الحل /

الطرف الايسر $=\text{Log}\frac{40}{9}+4\text{Log}5+2\text{Log}6$

$$=\text{Log}\frac{40}{9}+\text{Log}5^4+\text{Log}6^2$$

$$=\text{Log}\frac{40}{9}\times 5^4\times 6^2=\text{Log}\frac{40}{\cancel{9}}\times 625\times \overset{4}{\cancel{36}}$$

$=\text{Log}100000=\text{Log}10^5=5\text{Log}10=5\times 1=5=$ الطرف الايمن

---

8) اي مقدار من المقادير التالية يكافيء المقدار 3Loga + Logb

ⓐ $\text{Log}(ab)^3$, ⓑ $\text{Log}a^3b$ $\xleftrightarrow{\text{يكافيء}}$ 3Loga + Logb

ⓒ $\text{Log}a^3\times\text{Log}b$, ⓓ $\text{Log}a^3+\text{Log}b$ $\xleftrightarrow{\text{يكافيء}}$ 3Loga + Logb

---

9) أختر الاجابة الصحيحة اذا علمت ان $\text{Log}a\times b$ هي :

ⓐ $\text{Log}a\times\text{Log}b$, $\boxed{ⓑ\ \text{Log}a+\text{Log}b}$

ⓒ $\text{Log}\,(a+b)$, ⓓ ليس اي منها

الفصل الثاني

المتتابعات

نبذة مختصرة عن المتتابعات / نستذكر بعض المعلومات التي تهمنا في هذا الفصل

(1) مجموعة الأعداد الصحيحة ويرمز لها بالحرف (z) وتشمل الاعداد الموجبة والسالبة الى ما لا نهاية + الصفر

(2) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ويرمز لها بالحرف (z^+) وهي نفسها التي تمثل

الاعداد الطبيعية الموجبة (N^+) $Z^+ = N^+ = \{ 1,2,3,4, ... \}$

ملاحظة/ اذا ذكرت الاعداد الصحيحة الموجبة فان الصفر غير مشمول
واذا ذكرت الاعداد الطبيعية الموجبة فان الصفر غير مشمول .

(3) **الدالة/** ومعنى الدالة وتمثيل بعض انواع الدوال

(4) تكون الدالة معلومة متى ما كان كل من قاعدة اقترانها ومجالها ومجالها المقابل معلوما لدينا.

(5) تسمى الدالة (دالة عددية) اذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية R^+

سوف ندرس في هذا الفصل دوال من شكل خاص يكون مجالها

(مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (z^+) . أو بالمعنى نفسه مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة (N^+)
ومجالها المقابل اي مجموعة غير خالية

تعريف المتتابعة كل دالة مجالها المجموعة (z^+) أو (N^+) / $\{ 0 \}$ أو مجموعة جزئية من (z^+)

كما في الاتي $\{ 1,2,3,4, ..., n \}$ حيث n : عدد طبيعي موجب معين

ومجالها المقابل مجموعة جزئية غير خالية تسمى المتتابعة *Sequences*
في الامثلة المسردة لاحقا سوف نهمل ذكر المجال ونكتفي بذكر قاعدة الاقتران فقط .

مثال 1/ (كتاب)

$\forall n \in N^+$ [أونقول $\forall n \in Z^+$] حيث $U_{(n)} = 2n - 5$

حيث $U_{(1)} = (2 \times 1) - 5 = -3$ يسمى الحد **الاول** للمتتابعة ويرمز له U_1

$U_{(2)} = (2 \times 2) - 5 = -1$ يسمى الحد **الثاني** للمتتابعة ويرمز له U_2

$U_{(3)} = (2 \times 3) - 5 = 1$ يسمى الحد **الثالث** للمتتابعة ويرمز له U_3

$U_{(4)} = (2 \times 4) - 5 = 3$ يسمى الحد **الرابع** للمتتابعة ويرمز له U_4

$U_{(5)} = (2 \times 5) - 5 = 5$ يسمى الحد **الخامس** للمتتابعة ويرمز له U_5

وهكذا فان $U_{(n)} = 2n - 5$ يسمى الحد النوني للمتتابعة ويرمز له U_n

فتكتب $U = \left\{ (1,-3),(2,-1), (3,1),(4,3),(5,5), ... \right\}$

أو تكتب بالشكل $U = \left\{ (n , 2n-5) : \forall n \in Z^+ \right\}$

ولتمييز المتتابعة عن المجموعات سنكتب حدود المتتابعة بين قوسين كما في الشكل $< >$

حيث يكتب المثال السابق $\langle U_{(n)} \rangle = \langle -3 , -1 , 1 , 3 , 5 \rangle$

مثال 1/ (كتاب) اكتب الحدود الستة الاولى لكل من المتتابعات الاتية ثم اكتب المتتابعة بالشكل اعلاه (كما في المثال السابق)

① $\langle U_n \rangle = \langle n^2 \rangle$

الحل /

الحد الاول $U_1 = (1)^2 = 1$

الحد الثاني $U_2 = (2)^2 = 4$

الحد الثالث $U_3 = (3)^2 = 9$

الحد الرابع $U_4 = (4)^2 = 16$

الحد الخامس $U_5 = (5)^2 = 25$

الحد السادس $U_6 = (6)^2 = 36$

$\langle U_n \rangle = \langle 1,4,9,16,....n^2,... \rangle$

② $\langle H_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$

الحل /

الحد الاول $H_1 = \frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1$

الحد الثاني $H_2 = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

الحد الثالث $H_3 = \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$

الحد الرابع $H_4 = \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$

الحد الخامس $H_5 = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$

الحد السادس $H_6 = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$

$\langle H_n \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, ... \rangle$

③ $\langle U_n \rangle = \langle 2n + (-1)^n \rangle$

الحل $U_1 = 2 \times 1 + (-1)^1 = 1$

$U_2 = 2 \times 2 + (-1)^2 = 5$

$U_3 = 2 \times 3 + (-1)^3 = 5$

$U_4 = 2 \times 4 + (-1)^4 = 9$

$U_5 = 2 \times 5 + (-1)^5 = 9$

$U_6 = 2 \times 6 + (-1)^6 = 13$

$\langle U_n \rangle = \langle 1,5,5,9,9,13,....2n + (-1)^n,... \rangle$

④ $U_n = 1$, $U_{n+1} = (n+1) \cdot U_n$

الحل /

$U_1 = 1$

$U_2 = 2U_1 = 2 \times 1 = 2$

$U_3 = 3U_2 = 3 \times 2 = 6$

$U_4 = 4U_3 = 4 \times 6 = 24$

$U_5 = 5U_4 = 5 \times 24 = 120$

$U_6 = 6U_5 = 6 \times 120 = 720$

$\langle U_n \rangle = \langle 1,2,6,24,..,U_n=1,U_{n+1}=(n+1) \cdot U_n \rangle$

ملاحظة 1 / في المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 2,4,6,8, ... \rangle$ هنالك اختلاف عن المتتابعة $\langle H_n \rangle = \langle 4,2,6,8, ... \rangle$ حيث $\{ U_1 \neq H_1 \}$ اي ان $(2 \neq 4)$ من هذه المثال تبين لنا ان ترتيب حدود المتتابعة مهم جدا ويؤثر في تغيير المتتابعة اي ان الترتيب يعتبر الخواص المميزة للمتتابعات.

ملاحظة 2 / $\langle U_n \rangle = \langle n^2 - n \rangle$ ، $\langle H_n \rangle = \langle 2^{n-1} \rangle$ لكل متتابعة حد عام معين يختلف عن الحد العام للمتتابعة الاخرى.

ملاحظة 3 / هناك متتابعة منتهية والتي يكون مجالها مجموعة جزئية غير خالية من (z^+) ومرتبة تصاعديا ابتداءا بالعدد (1) الى عدد معين (n) كما في الشكل $\langle 1,2,3,4, ..., n \rangle =$

اما المتتابعة الغير منتهية التي يكون مجالها (z^+)

مثال 2/ (كتاب) ① اذا كانت $U : \{ 1,2,3,4,5,6 \} \to R$ معرفة كما ياتي

$\langle U_n \rangle = \langle 2n-9 \rangle$ أكتب حدها الاول وحدها الاخير وعدد حدودها

الحل / $\langle U_n \rangle = \langle -7 , -5 , -3, -1 , 1 , 3 \rangle$

$= \langle U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 , U_6 \rangle$

حدها الاول $U_1 = 2\times 1 - 9 = -7$

حدها الاخير $U_6 = 2\times 6 - 9 = 3$ عدد حدودها $n = 6$

---

② اذا كانت $H : \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \} \to R$ معرفة كما ياتي

$\langle H_n \rangle = \langle \frac{n+1}{n} \rangle$ أكتب حدها الاول وحدها الاخير وعدد حدودها

الحل / حدها الاول $H_1 = \frac{1+1}{1} = 1$

حدها الاخير $H_{10} = \frac{10+1}{10} = \frac{11}{10}$ ، عدد حدودها $n = 10$

مثال (اثرائي) أكتب اربعة حدود للمتتابعة المعرفة كالاتي: $\langle U_n \rangle = \langle 2n-9 \rangle$

الحل / حدها الاول $U_1 = (2\times 1) - 9 = -7$

حدها الثاني $U_2 = (2\times 2) - 9 = -5$

حدها الثالث $U_3 = (2\times 3) - 9 = -3$

حدها الرابع $U_4 = (2\times 4) - 9 = -1$

$\langle U_n \rangle = \langle -7 , -5 , -3, -1 , ... \rangle$

حيث حدها الاول $U_1 = (2\times 1) - 9 = -7$ ، وعدد حدودها $n = 4$

التمثيل البياني للمتتابعة /

بما ان المتتابعات هي دوال عددية مجالها اما المجموعة (z^+)

أو مجموعة بالشكل التالي $\{1,2,3,4, ..., n\}$ بشرط ان يكون n عدد صحيح موجب معين وانه يمكن تمثيل المتتابعات بأشكال بيانية كما في الأمثلة :

مثال 1/ (كتاب) مثل بيانيا المتتابعة التالية $\langle U_n \rangle = \langle 7-3n \rangle$

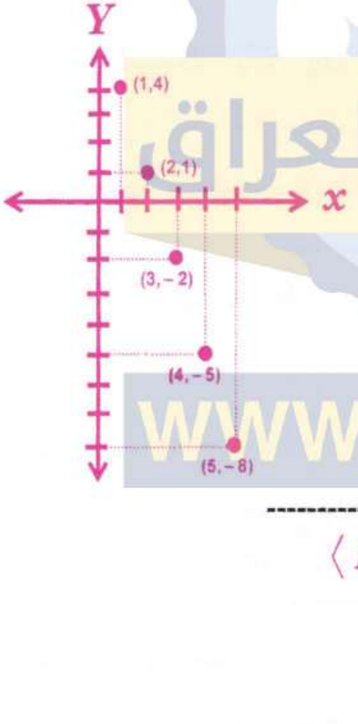
الحل / لتمثيل المتتابعة بيانيا نكتب عددا معقولا من حدودها ابتداء من الحد الاول ثم نرسم محوري الاحداثيات السيني والصادي ونعتبر المجال المقابل (R) والذي يعين على محور الصادات .

$U_1 = 7-(3\times1) = 4$, $U_2 = 7-(3\times2) = 1$,

$U_3 = 7-(3\times3) = -2$, $U_4 = 7-(3\times4) = -5$

$U_5 = 7-(3\times5) = -8$,

نعين النقط $(1,4),(2,1),(3,-2),(4,-5),(5,-8)$



نعين النقاط	⟷	نكتب الحدود
$(1,4)$		$U_1 = 7-(3\times1) = 4$
$(2,1)$		$U_2 = 7-(3\times2) = 1$
$(3,-2)$		$U_3 = 7-(3\times3) = -2$
$(4,-5)$		$U_4 = 7-(3\times4) = -5$
$(5,-8)$		$U_5 = 7-(3\times5) = -8$

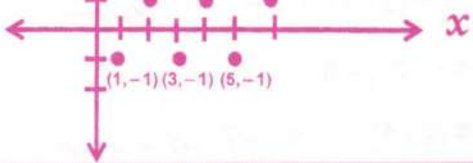
مثال 2/ (كتاب) مثل بيانيا المتتابعة التالية $\langle H_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$

الحل / $H_1 = (-1)^1 = 1$ ، $H_2 = (-1)^2 = 1$

$H_3 = (-1)^3 = -1$, $H_4 = (-1)^4 = 1$

$H_5 = (-1)^5 = -1$, $H_6 = (-1)^6 = 1$

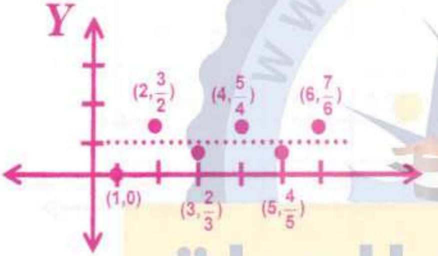
نعين النقط $(1,-1),(2,1),(3,-1),(4,1),(5,-1),(6,1)$



مثال 3/ (كتاب) مثل بيانيا المتتابعة التالية $\langle G_n \rangle = \langle 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rangle$

الحل / $G_2 = 1 + \frac{(-1)^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad G_1 = 1 + \frac{(-1)^1}{1} = 1 - 1 = 0$

$G_4 = 1 + \frac{(-1)^4}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $\quad G_3 = 1 + \frac{(-1)^3}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



$G_5 = 1 + \frac{(-1)^5}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

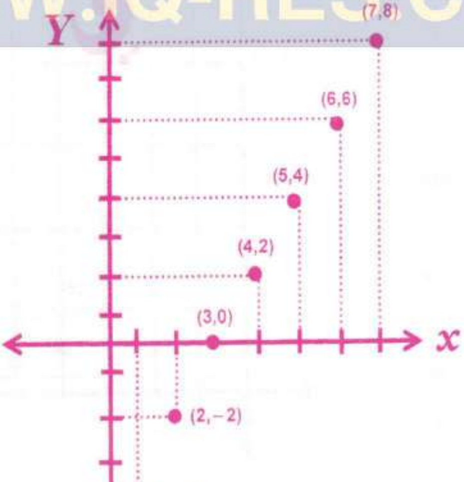
$G_6 = 1 + \frac{(-1)^6}{6} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

نعين النقط $(1,0), \left(2, \frac{3}{2}\right), \left(3, \frac{2}{3}\right), \left(4, \frac{5}{4}\right), \left(5, \frac{4}{5}\right), \left(6, \frac{7}{6}\right)$

مثال 4/ (كتاب) مثل بيانيا المتتابعة التالية $\langle H_n \rangle = \langle -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8 \rangle$

الحل / نلاحظ ان هذه المتتابعة هي متتابعة منتهية وعليه نرسم حدودها بتعيين النقط

$(1,-4), (2,-2), (3,0), (4,2), (5,4), (6,6), (7,8)$



تمارين (1 - 2)

1) لكل من المتتابعات الآتية اكتب الحدود السبعة الاولى ثم مثلها بيانيا :

① $\langle U_n \rangle = \langle 1 + (-1)^n \rangle$

الحل /

$U_1 = 1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$

$U_2 = 1 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$

$U_3 = 1 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$

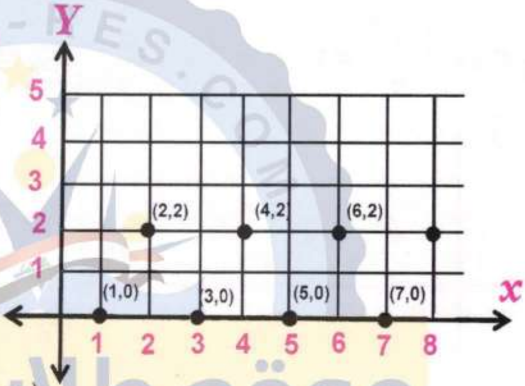
$U_4 = 1 + (-1)^4 = 1 + 1 = 2$

$U_5 = 1 + (-1)^5 = 1 - 1 = 0$

$U_6 = 1 + (-1)^6 = 1 + 1 = 2$

$U_7 = 1 + (-1)^7 = 1 - 1 = 0$

$\langle U_n \rangle = \langle 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0 \rangle$



② $\langle H_n \rangle = \langle \frac{1}{n^2 + 1} \rangle$

الحل /

$H_1 = \frac{1}{(1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$

$H_2 = \frac{1}{(2)^2 + 1} = \frac{1}{5}$

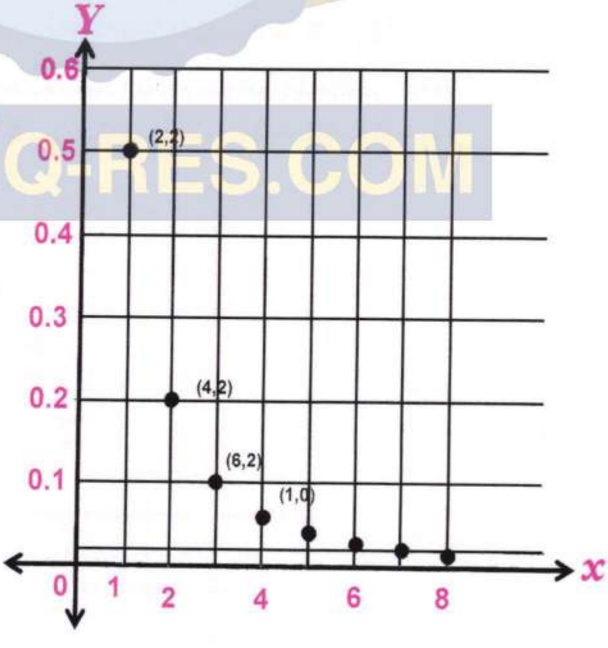
$H_3 = \frac{1}{(3)^2 + 1} = \frac{1}{10}$

$H_4 = \frac{1}{(4)^2 + 1} = \frac{1}{17}$

$H_5 = \frac{1}{(5)^2 + 1} = \frac{1}{26}$

$H_6 = \frac{1}{(6)^2 + 1} = \frac{1}{37}$

$\langle H_n \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \frac{1}{37} \rangle$



③ $\langle H_n \rangle = \langle n^2 - 3 \rangle$

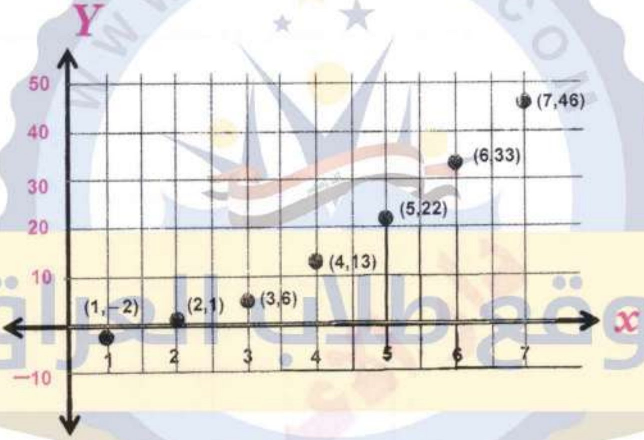
الحل /

$H_1 = (1)^2 - 3 = -2$

$H_2 = (2)^2 - 3 = 1$ $\quad H_3 = (3)^2 - 3 = 6$ $\quad H_4 = (4)^2 - 3 = 13$

$H_5 = (5)^2 - 3 = 22$ $\quad H_6 = (6)^2 - 3 = 33$ $\quad H_7 = (7)^2 - 3 = 46$

$\langle H_n \rangle = \langle -2, 1, 3, 13, 22, 33, 46 \rangle$



④ $\langle U_n \rangle = \langle 10 - 2n \rangle$

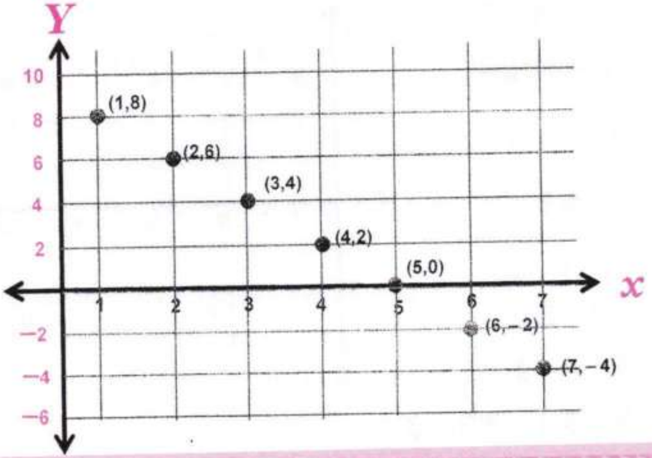
الحل /

$U_1 = 10 - 2(1) = 8$

$U_2 = 10 - 2(2) = 6$ $\quad U_3 = 10 - 2(3) = 4$ $\quad U_4 = 10 - 2(4) = 2$

$U_5 = 10 - 2(5) = 0$ $\quad U_6 = 10 - 2(6) = -2$ $\quad U_7 = 10 - 2(7) = -4$

$\langle U_n \rangle = \langle 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4 \rangle$



⑤ $\langle G_n \rangle = \langle 4 \rangle$

الحل / $G_1 = 4$

$G_2 = 4$

$G_2 = 4$

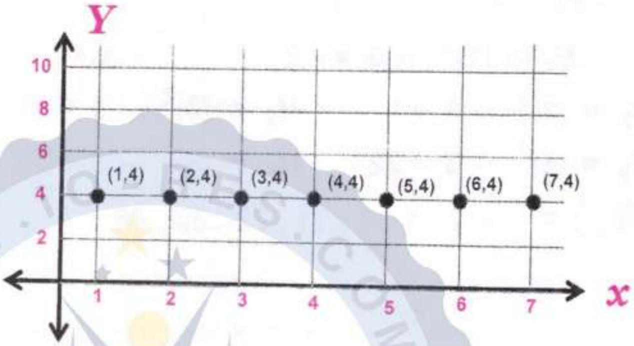
$G_4 = 4$

$G_5 = 4$

$G_6 = 4$

$G_7 = 4$

$\langle G_n \rangle = \langle 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4 \rangle$



---

⑥ $\langle U_n \rangle =$ { عندما n عدد فردي 3 ؛ عندما n عدد زوجي 3- }

الحل / $U_1 = 3$

$U_2 = -3$

$U_2 = 3$

$U_4 = -3$

$U_5 = 3$

$U_6 = -3$

$U_7 = 3$

$\langle U_n \rangle = \langle 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3 \rangle$

---

⑦ $\langle M_n \rangle = \langle -3(-1)^n \rangle$

الحل / $M_1 = -3(-1)^1 = 3$

$M_2 = -3(-1)^2 = -3$

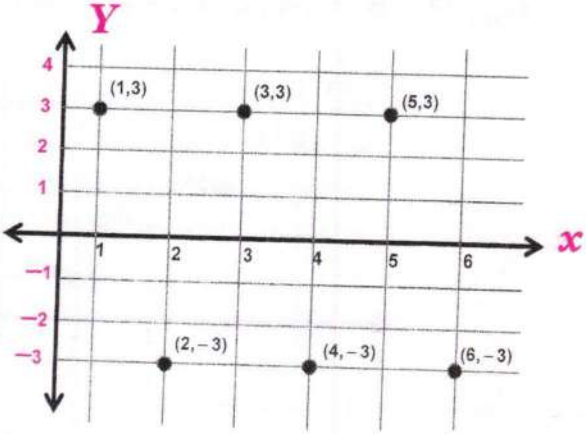
$M_3 = -3(-1)^3 = 3$

$M_4 = -3(-1)^4 = -3$

$M_5 = -3(-1)^5 = 3$

$M_6 = -3(-1)^6 = -3$

$\langle M_n \rangle = \langle 3, -3, 3, -3, 3, -3 \rangle$



⑧ $\langle G_n \rangle = \langle 2^{n-1} \rangle$

الحل / $G_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$

$G_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$

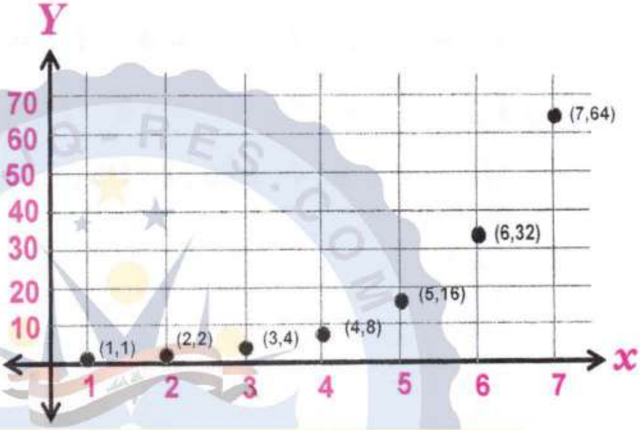
$G_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4$

$G_4 = 2^{4-1} = 2^3 = 8$

$G_5 = 2^{5-1} = 2^4 = 16$

$G_6 = 2^{6-1} = 2^5 = 32$

$G_7 = 2^{7-1} = 2^6 = 64$



$\langle G_n \rangle = \langle 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 \rangle$

⑨ $\langle M_n \rangle = \langle \frac{1-2n}{n} \rangle$

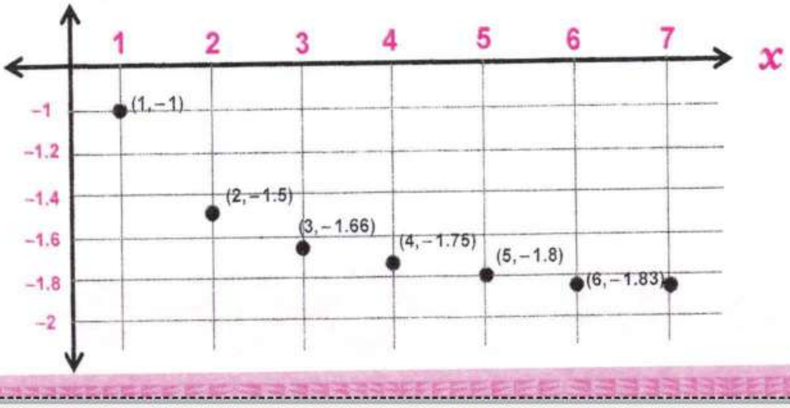
الحل / $M_1 = \frac{1-2(1)}{1} = \frac{-1}{1} = -1$

$M_2 = \frac{1-2(2)}{2} = \frac{-3}{2} = -1.5$ $M_3 = \frac{1-2(3)}{3} = \frac{-5}{3} = -1.66$

$M_4 = \frac{1-2(4)}{4} = \frac{-7}{4} = -1.75$ $M_5 = \frac{1-2(5)}{5} = \frac{-9}{5} = -1.8$

$M_6 = \frac{1-2(6)}{6} = \frac{-11}{6} = -1.833$ $M_7 = \frac{1-2(7)}{7} = \frac{-13}{7} = -1.857$

$\langle M_n \rangle = \langle -1 , -1.5 , -1.6 , -1.75 , -1.8 , -1.83 , -1.85 \rangle$



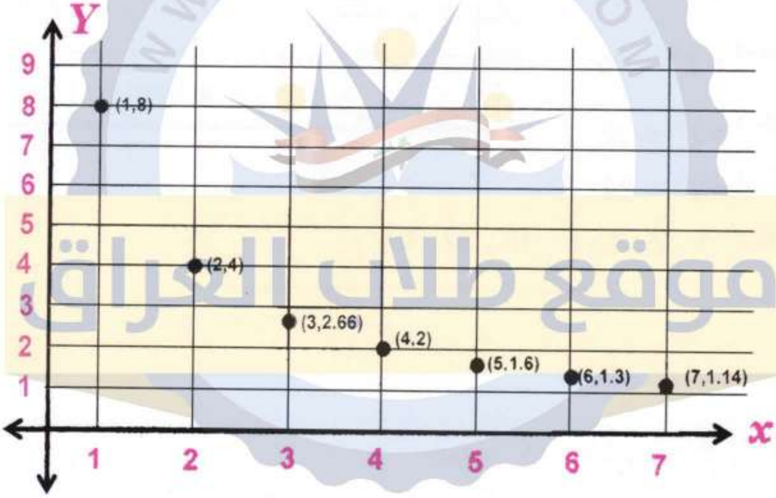
⑩ $\langle U_n \rangle = \langle \frac{8}{n} \rangle$

الحل /

$U_1 = \frac{8}{1} = 8 \quad U_2 = \frac{8}{2} = 4 \quad U_3 = \frac{8}{3} = 2.66$

$U_4 = \frac{8}{4} = 2 \quad U_5 = \frac{8}{5} = 1.6 \quad U_6 = \frac{8}{6} = 1.3 \quad U_7 = \frac{8}{7} = 1.14$

$\langle U_n \rangle = \langle 8, 4, 2.66, 2, 1.6, 1.33, 1.14 \rangle$



المتتابعة الحسابية (العددية) /

لنلاحظ في المثال الاول / ① $\langle U_n \rangle = \langle 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22 \rangle$

هي مجموعة من الاعداد مرتبة بالشكل 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22

1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22
3 3 3 3

ما بين العدد 4 والعدد 7 كم سيكون = $\boxed{3}$ ، ما بين العدد 7 والعدد 10 كم سيكون = $\boxed{3}$ ،

ما بين العدد 10 والعدد 13 كم سيكون = $\boxed{3}$ ، ما بين العدد 16 والعدد 19 كم سيكون = $\boxed{3}$ ،

اذن العدد $\boxed{3}$ سيكون اساس المتتابعة ولو فرضنا رمز الاساس d فيكون d = 3

ويمكن ان يكون الاساس موجب ، ويمكن الاساس ان يكون سالب . مثل d = 3 أو d = $\boxed{-3}$

مثال/ أوجد اساس المتتابعة 4 , 10 , 16 , 22

كم سيكون اساس المتتابعة ؟ اذن اساس المتتابعة سيكون = 6
لو قلنا : اكمل ثلاثة حدود للمتتابعة ؛ ستكون الحدود هي 28 , 34 , 40
ويكون السؤال بالشكل

مثال/ اكمل ثلاثة حدود للمتتابعة 4 , 10 , 16 , 22

الحل/ الاساس = $\boxed{6}$ = d

الحدود الثلاثة هي 22 + 6 = 28 , 28 + 6 =34 , 34 + 6 =40

اذن المتتابعة هي 4 , 10 , 16 , 22 , 28 , 34 , 36

مثال/ أوجد ثلاثة حدود للمتتابعة 3 , −10 , −23 , −36

الحل/ الاساس = $\boxed{-13}$ = d

ثلاثة حدود متتابعة هي $-36 - 13 = \boxed{-49}$, $-49 - 13 = \boxed{-62}$, $-62 - 13 = \boxed{-75}$
اذن المتتابعة هي 3 , −10 , −23 , −36 , −49 , −62 , −75

الحد النوني / نلاحظ ان الحد الأول في المثال ①

$$\overset{U_1}{1} , \overset{U_2}{4} , \overset{U_3}{7} , \overset{U_4}{10} , \overset{U_5}{13} , \overset{U_6}{16} , \overset{U_7}{19} , \overset{U_8}{22}$$
3 3 3 3

فالحد النهائي (الاخير) = الحد الأول a + (عدد الحدود n −1) × الأساس d

فالحد النوني $$\boxed{\underset{\text{الحد الاخير}}{U_n} = \underset{\text{الحد الاول}}{a} + (\underset{\text{عدد الحدود}}{n} - 1)\underset{\text{الاساس}}{d}}$$

مثال/ أوجد الحد السابع للمتتابعة −12 , −8 , −4 , 0

الحل / الاساس = $\boxed{+4}$ = d $\quad \boxed{U_n = a + (n-1)d}$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_n = -12 + (n-1) \times (+4)$$

$$U_n = -12 + 4n - 4$$

$$-16 \rightarrow \boxed{U_n = 4n - 16}$$

الحد السابع $U_7 = 4 \times 7 - 16$

$$U_7 = 28 - 16$$

$$\boxed{U_7 = 12}$$

$U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \quad U_7$

اذن المتتابعة هي $-12 , -8 , -4 , 0 , 4 , 8 , 12$

حدها العام / الحد النوني $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ **حفظ**

حيث / d يسمى اساس المتتابعة وهو عدد ثابت

a يسمى حدها الاول n يسمى رقم الحد المطلوب

وعليه تكون المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle a , a+d , a+2d , ... , a + (n-1)d , ... \rangle$

ونلاحظ في المثال الثاني /

② $\langle H_n \rangle = \langle 30 , 25 , 20 , 15 , 10 , 5 , 0 , -5 , -10 , -15 \rangle$

نلاحظ ان / طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة فان ناتج الطرح هو (5 −) وهو مقدار ثابت أي ان

$$H_2 - H_1 = -5 \quad , H_3 - H_2 = -5 \quad , H_4 - H_3 = -5 \quad , ...$$

أما في المثال الثالث /

③ $\langle G_n \rangle = \langle 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 \rangle$

نلاحظ ان / طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة هو مقدار متغير وليس عدد ثابت كما مر في المثالين السابقين **فلا يعتبر متتابعة حسابية**

مثال 1/ (كتاب) اكتب الحدود السبعة الاولى من المتتابعات الحسابية الاتية

(1) حدها الاول $H_1 = -7$ واساسها $d = 2$

الحل / الاساس = $\boxed{2}$ = d وحدها الاول = $\boxed{-7}$ = H_1

اذن المتتابعة $\langle H_n \rangle = \langle -7 , -5 , -3 , -1 , 1 , 3 , 5 , ... \rangle$

توضيح / نلاحظ ان الحد الاول $H_1 = -7$ موجود في السؤال والاساس $d = 2$ موجود ايضا

اذن لكتابة الحدود السبعة الاولى نكتب $U_n = a + (n-1)d$

الحد الثاني $H_2 = a + (n-1)d = -7 + (2-1)\times 2 = -7 + 2 = -5$

الحد الثالث $H_3 = a + (n-1)d = -7 + (3-1)\times 2 = -7 + 4 = -3$

الحد الرابع $H_4 = a + (n-1)d = -7 + (4-1)\times 2 = -7 + 6 = -1$

الحد الخامس $H_5 = a + (n-1)d = -7 + (5-1)\times 2 = -7 + 8 = 1$

الحد السادس $H_6 = a + (n-1)d = -7 + (6-1)\times 2 = -7 + 10 = 3$

الحد السابع $H_7 = a + (n-1)d = -7 + (7-1)\times 2 = -7 + 12 = 5$

اذن المتتابعة $\langle H_n \rangle = \langle -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots \rangle$

طريقة اخرى للحل / نلاحظ ان الحد الاول $H_1 = -7$ موجود في السؤال والاساس $d = 2$ موجود ايضا
اذن لكتابة الحدود السبعة الاولى نكتب المتتابعة

$$\langle H_n \rangle = \langle a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d, \dots \rangle$$

اذن المتتابعة $\langle H_n \rangle = \langle -7, -5, -3, -1, 1, 3, \dots \rangle$

(2) حدها الاول $U_1 = \frac{5}{2}$ واساسها $d = -1$

الحل / الاساس $= \boxed{-1} = d$ وحدها الاول $= \boxed{\frac{5}{2}} = U_1$

الحد الثاني $U_2 = a + (n-1)d = \frac{5}{2} + (2-1)\times -1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$

الحد الثالث $U_3 = a + (n-1)d = \frac{5}{2} + (3-1)\times -1 = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$

الحد الرابع $U_4 = a + (n-1)d = \frac{5}{2} + (4-1)\times -1 = \frac{5}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$

الحد الخامس $U_5 = a + (n-1)d = \frac{5}{2} + (5-1)\times -1 = \frac{5}{2} - \frac{8}{2} = -\frac{3}{2}$

الحد السادس $U_6 = a + (n-1)d = \frac{5}{2} + (6-1)\times -1 = \frac{5}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{5}{2}$

الحد السابع $U_7 = a + (n-1)d = \frac{5}{2} + (7-1)\times -1 = \frac{5}{2} - \frac{12}{2} = -\frac{7}{2}$

اذن المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \dots \rangle$

(3) حدها الاول $M_1 = 10$ واساسها $d = -3$

الحل / الاساس $= \boxed{-3} = d$ وحدها الاول $= \boxed{10} = M_1$

اذن المتتابعة $\langle H_n \rangle = \langle 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8, \dots \rangle$

مثال 2/ (كتاب) (1) اكتب الحد الثامن للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 3− واساسها (7)

الحل / الاساس = $\boxed{7}$ = d وحدها الاول = $\boxed{-3}$ = U_1

الحد الثامن $U_8 = a + (n-1)d = -3 + (8-1) \times 7 = -3 + 49 = 46$

اذن المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle -3, 4, 11, 18, 25, 32, 5, 46, \ldots \rangle$

(2) اكتب الحد العاشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 12 واساسها (3 −)

الحل / الاساس = $\boxed{-3}$ = d وحدها الاول = $\boxed{12}$ = U_1

الحد العاشر $U_{10} = a + (n-1)d = 12 + (10-1) \times -3 = 12 - 27 = -15$

اذن المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, -12, -15, \ldots \rangle$

(3) أستؤجر عامل في أول سنة براتب قدره (200000) دينار على ان يعطي زيادة ثابتة في نهاية كل شهر مبلغا مقداره (15000) دينار فكم يبلغ راتبه في نهاية السنة ؟

الحل / نلاحظ ان راتب الشهر الاول = 200000 دينار

راتب الشهر الثاني = 215000 دينار

راتب الشهر الثالث = 230000 دينار

راتب الشهر الرابع = 245000 دينار

نلاحظ ان مبالغ الرواتب تكون متتابعة حسابية حدها الاول $a = 200000$ واساسها $d = 15000$

والمطلوب ايجاد الراتب هي نهاية السنة (الشهر 12) أي ايجاد $\langle H_{12} \rangle$ فيكون

$H_{12} = a + (n-1)d = 200000 + (12-1) \times 15000$

$H_{12} = 200000 + 11 \times 15000$

دينار راتبه الشهري في شهر كانون الاول $H_{12} = 200000 + 165000 = 365000$

(4) متتابعة حسابية حدها الاول = 7 وحدها السادس = 8− جد اساسها واكتب الحدود الخمسة الاولى منها ؟

الحل / الاساس = $\boxed{?}$ = d وحدها الاول = $\boxed{7}$ = U_1 وحدها السادس = $\boxed{-8}$ = U_6

الحد السادس $U_6 = a + (n-1)d$

$U_6 = 7 + (6-1) \times d \rightarrow -8 = 7 + 5d$

$5d = -7 - 8 = -\frac{15}{5} = -3$

اذن المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 7, 4, 1, -2, -5, \ldots \rangle$

(5) في المتتابعة الحسابية $\langle 42 , 39 , 36 , \dots \rangle$ جد رتبة الحد الذي قيمته (-6) واي حد فيها يساوي صفر

الحل / $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ ، **المطلوب ايجاد رتبة الحد**

الاساس $= \boxed{-3} = 39 - 42 = d$ وحدها الاول $= \boxed{42} = a$ و $\boxed{-6} = U_n$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow -6 = 42 + (n-1) \times -3$$
$$+\cancel{6} - \cancel{6} = 42 - 3n + 3 + 6$$
$$0 = 42 - 3n + 9$$
$$3n = 51 \rightarrow n = \frac{51}{3} = 17$$

رتبة الحد الذي قيمته (-6) هو الحد السابع عشر $n = 17$ $\quad \therefore U_{17} = \boxed{-6}$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow 0 = 42 + (n-1) \times -3$$
$$0 = 42 - 3n + 3$$
$$3n = 45 \rightarrow n = \frac{45}{3} = 15$$

رتبة الحد الذي قيمته **(0)** هو الحد الخامس عشر **$n = 15$** $\quad \therefore U_{15} = \boxed{0}$

---

(6) اذا كان الحد العاشر في متتابعة حسابية يساوي (62) واساسها (5) أكتب المتتابعة مبتدأ من الحد الأول

الحل / $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ ، **المطلوب ايجاد الحد العاشر و ايجاد المتتابعة**

الاساس $= \boxed{5} = d$ وحدها الاول $= \boxed{?} = a$ وحدها العاشر $\boxed{62} = U_{10}$ و $\boxed{10} = n$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_{10} = a + (10-1)d \rightarrow$$
$$62 = a + (10-1) \times 5$$
$$+\cancel{62} - \cancel{62} = a + 9 \times 5 - 62$$
$$0 = a + 45 - 62$$
$$-a = -17 \rightarrow a = 17$$ الحد الاول

اذن المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 17 , 22 , 27, \dots , 62, \dots \rangle$

---

(7) جد المتتابعة الحسابية التي حدها التاسع $(= 5)$ وحدها الثالث عشر $(= -3)$

الحل / $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ ، **المطلوب ايجاد حدود المتتابعة**

الاساس $= \boxed{?} = d$ وحدها التاسع $\boxed{5} = U_9$ وحدها الثالث عشر $\boxed{-3} = U_{13}$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_9 = a + (9-1)d$$

$5 = a + 8d$ ---------- (1)

$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_{13} = a + (13-1)d$

$-3 = a + 12d$ ---------- (2)

$5 = \cancel{a} + 8d$ ---------- (1)

$-3 = \mp\cancel{a} \mp 12d$ ---------- (2)

$8 = -4d$

$d = \frac{8}{-4} = -2$ الاساس

نعوض (d) في معادلة (1) لايجاد قيمة (a) $5 = a + (8 \times -2)$

$-\cancel{5} + \cancel{5} = a - 16 - 5$

$0 = a - 21 \rightarrow -a = -21 \rightarrow a = 21$ الحد الاول

اذن المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 21, 19, 17, 15, \ldots \rangle$

(8) المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 3n + 1 \rangle$ توجد اربع اجابات واحدة منها صحيحة. أختر الاجابة الصحيحة

(أ) اساسها (= 3) وحدها الخامس (= 15) (ب) اساسها (= −3) وحدها الرابع (= 13)

(جـ) اساسها (= 4) وحدها الاول (= 6) (د) اساسها (= 3) وحدها الثالث (= 10)

الحل / المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 3n + 1 \rangle$

نوجد الحد الاول للمتتابعة وهو

$\langle U_n \rangle = \langle 3n + 1 \rangle \rightarrow U_1 = 3 \times 1 + 1 \rightarrow U_1 = 3 + 1 = 4$

الحد الثاني للمتتابعة وهو $U_2 = 3 \times 2 + 1 = 7$

الحد الثالث للمتتابعة وهو $U_3 = 3 \times 3 + 1 = 10$

اذن الاساس = $d = 7 - 4 = \boxed{3}$

اذن المتتابعة هي $\langle U_n \rangle = \langle 4, 7, 10, 13, 16 \rangle$

حدها الاول (= 4) وحدها الثاني (= 7)

وحدها الثالث (= 10) وحدها الرابع (= 13) وحدها الخامس (= 15)

الفرع **(د) صح** هو الحل الصحيح

الفرع (أ) **خطأ** الفرع (ب) **خطأ** الفرع (جـ) **خطأ**

الاوساط الحسابية /

لنفرض ان لدينا عددان وهما z , w وقمنا باخال اعداد بينهما فان هذه الاعداد التي تم ادخالها بين z , w تسمى **اوساط حسابية** . وان العددين مع هذه الاوساط يؤلف متتابعة حسابية حيث يكون w الحد الاول للمتتابعة و z هو الحد الاخير للمتتابعة الحسابية

عدد الاوساط + الحدين الذين هما z , w يساوي عدد حدود المتتابعة

مثال / (كتاب)

أدخل ستة اوساط حسابية بين العددين $2 , 37$

الحل /عدد الحدود $= 2 + 6 = 8$

حدها الاول $a = 2 =$

وحدها الاخير $U_8 = 37 =$

$$U_n = a + (n-1)d$$
$$U_8 = 2 + (8-1)d$$
$$37 = 2 + 7d$$
$$-2 + 37 = -\cancel{2} + \cancel{2} + 7d$$
$$7d = 37 - 2 \rightarrow d = \frac{35}{7} = 5$$

المتتابعة هي

$$\langle U_n \rangle = \langle 2,7,12,17,22,27,32,37 \rangle$$

الاوساط الحسابية 7,12,17,22,27,32

مثال / (اثرائي)

أدخل خمسة اوساط حسابية بين العددين $-13 , 245$

الحل /عدد الحدود $= 2 + 5 = 7$

حدها الاول $a = -13 =$

وحدها الاخير $U_8 = 37 =$

$$U_n = a + (n-1)d$$
$$U_7 = -13 + (7-1)d$$
$$245 = -13 + 6d$$
$$+13 + 245 = -\cancel{13} + \cancel{13} + 6d$$
$$6d = 245 + 13 \rightarrow d = \frac{258}{6} = 43$$

المتتابعة هي

$$\langle U_n \rangle = \langle -13,30,73,116,159,202,245 \rangle$$

الاوساط الحسابية 30,73,116,159,202

مجموع الاوساط الحسابية /

لتكن $\langle U_n \rangle$ متتابعة اساسها (d) وحدها الاول (a =)

$$\langle U_n \rangle = \langle U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , ... \rangle$$

$$\langle U_n \rangle = \langle a , a + d , a + 2d , a + 3d , ... \rangle$$

ولنرمز لمجموع (n) من الحدود من هذه المجموعة بالرمز (Sn) ابتداءا من الحد الاول فان

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + ... + (U_n - 2d) + (U_n - d) + U_n$ -------- (1)

ويمكن كتابة المجموع (Sn) بالشكل

$2S_n = U_n + (U_n - d) + (U_n - 2d) + (U_n - 3d) + ... + (a + 2d) + (a + d) + a$ -------- (2)

وبجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على : $2S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + ... + (a + U_n)$

عدد المقدار U_n هو n من المرات فيكون : $2S_n = n(a + U_n)$

$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)}$ -------- (1)

حيث (n) عدد الحدود ابتداءا من الحد الاول وبالترتيب الى الحد $U_n = an$

وبما ان $U_n = an$ وان $U_n = a + (n - 1)d$ وبالتعويض في (1) نحصل على :

$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right]}$

حيث (n) عدد الحدود **الحد الاول** = a ، الاساس = d

أمثلة / (كتاب)

(1) جد مجموع الحدود العشرة الاولى من المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 17,22,27,32, ... \rangle$

الحل / الاساس $d = 22 - 17 = 5$ وحدها الاول $a = \boxed{17}$ و $n = \boxed{10}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right] \rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}\left[(2 \times 17) + (10 - 1) \cdot 5\right]$$

مجموع الحدود العشرة الاولى $S_{10} = 5 [34 + 45] = 5 [79] = 395$

---

(2) بين نوع المتتابعة التي حدها العام $\langle H_n \rangle = \langle 2n - 7 \rangle$

وأوجد مجموع الحدود الخمسة عشر الاولى منها

الحل / $\langle H_n \rangle = \langle 2n - 7 \rangle$

الحد الاول $H_1 = 2 \times 1 - 7 = -5$

الحد الثاني $H_2 = 2 \times 2 - 7 = -3$

الحد الثالث $H_3 = 2 \times 3 - 7 = -1$

الحد الرابع $H_4 = 2 \times 4 - 7 = 1$

نلاحظ ان الفرق بين كل حد وسابقه ثابت = 2 وعليه تكون المتتابعة حسابية فيها $H_1 = -5$

الاساس $d = (-3) - (-5) = 2$ وحدها الاول $a = \boxed{-5}$ و $n = \boxed{15}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right] \rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}\left[(2 \times -5) + (15 - 1) \cdot 2\right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[(-10) + 28\right] \rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}\left[18\right] = 135$$

مجموع الحدود الخمسة عشر الاولى $S_{15} = 5 [34 + 45] = 5 [79] = 395$

(3) جد الأعداد الصحيحة المحصورة بين (100) , (1000) والتي تقبل القسمة على (9) بدون باقي ثم جد مجموعها

خطوات الحل / نلاحظ ان الاعداد الصحيحة المحصورة بين يعني العدد (100) , (1000) هي التي تدخل ضمن اعداد المتتابعة الحسابية . (الاعداد تكون كفترة مفتوحة)

لايجاد أول عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق بعد (100) نقسم (100) على (9)

فنقول $11 = \frac{100}{9}$ والباقي (1)

$$11\overset{\text{باقي القسمة}}{\left(\frac{1}{9}\right)} = \frac{(9\times 11)+1}{9} = \frac{99+1}{9} = \frac{100}{9}$$

ولكي يكون الباقي يقبل القسمة على (9) نضيف للعدد (8) فيكون اول عدد بعد (100) ويقبل القسمة على (9) وبدون باق

$$\frac{100}{9} + \underset{\text{العدد}}{\boxed{1} = \frac{100}{9} + \boxed{\frac{9}{9}}} \qquad -\left(\frac{1}{9}\right)$$

فيكون العدد $12 = \frac{108}{9}$

وعليه الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) , (1000) والتي تقبل القسمة على (9) بدون باق تكون متتابعة حسابية حدها الاول (108)

ولايجاد الحد الاخير الذي يقبل القسمة على (9) بدون باق هو (999 =1 - 1000)

فنقول $111 = \frac{1000}{9}$ والباقي (1)

ولكي يكون الباقي يقبل القسمة على (9) نضيف للعدد (8) فيكون اخر قبل (1000) ويقبل القسمة على (9) وبدون باق فيكون العدد $12 = \frac{108}{9}$

متتابعة حسابية هي $\langle U_n \rangle = \langle 108 , 117 , 126 , \ldots , 999 \rangle$

والان لدينا / الاساس $d = 117 - 108 = 9$ وحدها الاول $= \boxed{108} = a$ و $n = \boxed{?}$

$$U_n = a + (n-1)\cdot d \rightarrow 999 = 108 + (n-1)\cdot(9)$$

$$999 = 108 + 9n - 9 \rightarrow 999 = 99 + 9n$$

$$9n = 999 - 99 \rightarrow 9n = 999 - 99$$

$$9n = 900 \rightarrow n = \frac{900}{9} = 100 \rightarrow n = 100$$ حدا

مجموع الاعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على (9) بدون باق ومحصورة بين (100) , (1000)

الاساس $2 = (5-) - (3-) = d$ وحدها الاول $= \boxed{108} = a$ و $n = \boxed{100}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n \right] \rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}\left[(108) + (999)\right]$$

$$S_{100} = \frac{\overset{50}{\cancel{100}}}{\cancel{2}}\left[1107 \right]$$

$$S_{100} = 50 \times 1107 = 55350$$

(4) جد عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي اقل من (200) ثم جد مجموعها

الحل / الاعداد الفردية الصحيحة الموجبة التي اقل من (200) هي 1,3,5,7,9, ... , 199

والان لدينا / الاساس $d = 3 - 1 = 2$ وحدها الاول $= \boxed{1} = a$ و $U_n = \boxed{199}$

$$U_n = a + (n-1)\cdot d \rightarrow 199 = 1 + (n-1)\cdot(2)$$

$$199 = 1 + 2n - 2 \rightarrow 199 = -1 + 2n$$

$$2n = 199 + 1 \rightarrow 2n = 200$$

$$n = \frac{200}{2} = 100 \rightarrow n = 100$$ حدا

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n\right] \rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}\left[(1) + (99)\right]$$

$$S_{100} = \frac{\overset{50}{\cancel{100}}}{\cancel{2}}\left[200\right]$$

مجموع الاعداد $S_{100} = 50 \times 200 = 10000$

تمارين (2 – 2)

1) لكل مما ياتي اربع اجابات واحدة منها صحيحة. أختر الجواب الصحيح.

(أ) المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 10 - 5n \rangle$

① اساسها (5) وحدها العاشر (40 −)
② اساسها (5−) وحدها العاشر (= 40)
③ اساسها (5−) وحدها العاشر (40 −)
④ ليس ايا مما يذكر

الحل / المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 10 - 5n \rangle$

نوجد الحد الاول للمتتابعة وهو

$$\langle U_n \rangle = \langle 10 - 5n \rangle \rightarrow U_1 = 10 - 5\times1 \rightarrow U_1 = 10 - 5 = 5$$

الحد الثاني للمتتابعة وهو $U_2 = 10 - 5\times2 = 10 - 10 = 0$

الحد الثالث للمتتابعة وهو $U_3 = 10 - 5\times3 = 10 - 15 = -5$

الحد العاشر للمتتابعة وهو $U_{10} = 10 - 5\times10 = 10 - 50 = -40$

اذن الاساس $= \boxed{-5} = d = 0 - 5$

اذن المتتابعة هي $\langle U_n \rangle = \langle 5, 0, -5, -10, \dots, -40, \dots \rangle$

حدها الاول (= 5)   وحدها الثاني (= 0)
وحدها الثالث (= 5−)   وحدها العاشر (= 40−)

الفرع ③ **صح** هو الحل الصحيح

الفرع ① **خطأ**   الفرع ② **خطأ**   الفرع ④ **خطأ**

(ب) اذا كانت $\langle \dots, x, y, 9, 11, 13 \rangle$ متتابعة حسابية فان

① $y = -7,\ x = -5$ ② $y = -7,\ x = 5$

③ $y = 7,\ x = -5$ ④ $\boxed{y = 7,\ x = 5}$

الحل / اذن الاساس $= \boxed{2} = d = 11 - 9$

اذن المتتابعة هي $\langle U_n \rangle = \langle \dots, 5, 7, 9, 11, 13 \rangle$

الفرع ④ **صح** هو الحل الصحيح

الفرع ① **خطأ** الفرع ② **خطأ** الفرع ③ **خطأ**

---

2) جد الحد الثالث عشر من المتتابعة $\langle -4, 4, 12, \dots \rangle$

الحل / المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle -4, 4, 12, \dots \rangle$

اذن الاساس $= \boxed{8} = d = 4 - (-4)$

$d = 12 - 4 = \boxed{8}$

نوجد الحد الثالث عشر للمتتابعة وهو

$$U_n = a + (n-1)\cdot d \rightarrow U_{13} = a + (13-1)\cdot d$$

$$U_{13} = -4 + (12)\times 8$$

$$U_{13} = -4 + 96 = 92$$

---

3) جد عدد الحدود والاساس للمتتابعة المنتهية التي حدها الاول = 9 وحدها الاخير = 6− ومجموع حدودها = 24

الحل / الاساس $d = \boxed{?}$ وحدها الاول $a = \boxed{9}$ وحدها الاخير $a = \boxed{-6}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n\right] \rightarrow S_n = \frac{n}{2}\left[(9) + (-6)\right]$$

$$24 = \frac{n}{2}[3] \rightarrow 24 = \frac{3n}{2} \rightarrow 3n = 48$$

$$3n = \frac{48}{3} = 16$$ حد

$$U_n = a + (n-1)\cdot d \rightarrow -6 = 9 + (16-1)\cdot d$$

$$-6 = 9 + 15d \rightarrow 15d = -9 - 6$$

$$15d = -15 \rightarrow d = \frac{-15}{15} = -1$$

الاساس $d = \boxed{-1}$ وحدها الاول $a = \boxed{9}$ وحدها الاخير $a = \boxed{-6}$

$$U_n = a + (n-1)\cdot d \rightarrow -6 = 9 + (n-1)\cdot d$$

$$-6 = 9 + (n-1)\cdot(-1) \rightarrow -6 = 9 - n + 1$$

$$n = 9 + 1 + 6 = 16 \rightarrow n = 100$$ حدا

4) جد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) , (1000) والتي تقبل القسمة على (12) بدون باق ثم جد مجموعها .

الحل / نلاحظ ان الاعداد الصحيحة المحصورة بين العددين (100) , (1000) هي التي تدخل ضمن اعداد المتتابعة الحسابية فقط . اما العددين (100) , (1000) لا تدخل لايجاد أول عدد يقبل القسمة على (12) بدون باق ياتي بعد العدد (100) مباشرة أي نقسم (100) على (12) فنكتب $8 = \frac{100}{12}$ والباقي (4) ولكي يكون الباقي يقبل القسمة على (12) نضيف (1) للعدد (100) ونطرح منه $\frac{4}{12}$ فيكون

$$\frac{100}{12}+1-\frac{4}{12}=\frac{100}{12}+\left(\frac{12}{12}-\frac{4}{12}=\frac{8}{12}\right)=\frac{100+8}{12}=\frac{108}{12}$$

فيكون اول عدد بعد العدد (100) ويقبل القسمة على (12) وبدون باق **اذن هو العدد** (108)
ولايجاد آخر عدد يقبل القسمة على (12) بدون باق ياتي قبل العدد (1000) مباشرة أي نقسم (1000) على (12) فنكتب $83 = \frac{1000}{12}$ والباقي (4) ولكي يكون الباقي يقبل القسمة على (12) ونطرح $\frac{4}{12}$ من العدد (1000) فيكون $\frac{1000}{12}-\left(\frac{4}{12}\right)=\frac{1000-4}{12}=\frac{996}{12}$

فيكون آخر عدد قبل العدد (1000) ويقبل القسمة على (12) وبدون باق **هو العدد** (996)
متتابعة حسابية هي $\langle U_n\rangle = \langle 108, 120, 132, \ldots, 996\rangle$

والان لدينا / الاساس $d = 120 - 108 = 12$ وحدها الاول $a = \boxed{108}$ و $n = \boxed{?}$

$$U_n = a+(n-1)\cdot d \rightarrow 996 = 108+(n-1)\cdot(12)$$

$$996 = 108+12n-12 \rightarrow 996 = 96+12n$$

$$12n = 996 - 96 \rightarrow 12n = 900$$

$n = \frac{900}{12} = 75 \rightarrow n = 75$ حدا

مجموع الاعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على (12) بدون باق ومحصورة بين (100) , (1000)

الاساس $d = 12$ وحدها الاول $a = \boxed{108}$ و $n = \boxed{75}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a+U_n\right] \rightarrow S_{75} = \frac{75}{2}\left[(108)+(996)\right]$$

مجموع حدود المتتابعة $S_{75} = \frac{75\times1104}{2} = \frac{82800}{2} = 41400$

5) رتبت مقاعد قاعة في (25) يحتوي الصف الاول على (20) مقعدا والصف الثاني على (21) مقعدا والصف الثالث على (22) مقعدا فما عدد المقاعد في القاعة ؟

الحل /

الاساس $d = 21 - 20 = \boxed{1}$ وحدها الاول $a = \boxed{20}$ وعدد حدودها $n = \boxed{25}$

$d = 22 - 21 = \boxed{1}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\,2a + (n-1)\cdot d\,\right] \rightarrow S_n = \frac{25}{2}\left[(2\times 20) + (25-1)\cdot 1\right]$$

$S_n = \frac{25}{2}(40 + 24) = \frac{25}{\cancel{2}}\times \overset{32}{\cancel{64}} = 25\times 32 = 800$ مقعد تحتوي القاعة

6) جد مجموع الاعداد الصحيحة غير السالبة التي اقل من (500)

الحل / الاساس $d = 1 - 0 = \boxed{1}$ وحدها الاول $a = \boxed{0}$ وعدد حدودها $n = \boxed{500}$

$d = 2 - 1 = \boxed{1}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\,a + U_n\,\right] \rightarrow S_n = \frac{\overset{250}{\cancel{500}}}{\cancel{2}}\left[\,0 + 499\,\right] \rightarrow S_n = 250\times\left[\,499\,\right]$$

$S_n = 124750$ مجموع الأعداد الصحيحة غير السالبة

7) أكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة الحسابية والتي حدها الاول يساوي(7) واساسها يساوي (4-) ثم جد حدها الخامس عشر ومجوع الحدود العشرة الثانية منها .

الحل / الاساس $d = \boxed{-4}$ وحدها الاول $a = \boxed{7}$

المطلوب ايجاد حله

① ايجاد الحدود الستة الاولى

الحد الاول للمتتابعة معلوم وهو $U_1 = a = 7$

الحد الثاني للمتتابعة وهو $U_2 = a + d = 7 + (-4) = 3$

الحد الثالث للمتتابعة $U_3 = a + (n-1)d = 7 + (3-1)(-4) = 7 - (2\times 4) = -1$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle\, 7, 3, -1, -5, -9, -13, \dots \,\rangle$

② ايجاد الحد الخامس عشر

الحد الخامس عشر للمتتابعة وهو $U_{15} = a + (n-1)d = 7 + (14)(-4) = -49$

③ ايجاد مجموع الحدود العشرة الثانية /

أي ايجاد مجموع $U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}, U_{17}, U_{18}, U_{19}, U_{20}$

$U_{11} = a + (n-1)d = 7 + (10)(-4) = -33$

$U_{20} = a + (n-1)d = 7 + (19)(-4) = 7 - 76 = -69$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\,a + U_n\,\right] \rightarrow S_n = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{2}}\left[\,-33 - 69\,\right] \rightarrow S_n = 5\times\left[\,-102\,\right]$$

$S_n = -510$ مجموع الحدود العشرة الثانية -510

8) ضع ثمانية اعداد صحيحة بين 38 , 2 لتتكون لديك متتابعة حسابية حدها الاول = 38 وحدها الاخير = 2 ثم جد مجموع هذه الاعداد ؟

الحل / المطلوب ايجاد حله

① وضع ثمانية اعداد بين العددين 2 , 38

الحد الاول للمتتابعة معلوم وهو $U_1 = 2$

الحد الاخير للمتتابعة معلوم وهو $U_n = 38$

عدد الحدود = عدد الاوساط + 2

$$n = 8 + 2 = 10$$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow 38 = 2 + (10-1)d$$

$$-2 + 38 = -\cancel{2} + \cancel{2} + 9d$$

$$9d = 38 - 2$$

$$d = \frac{36}{9} = 4$$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38 \rangle$

② ايجاد مجموع الاعداد العشرة للمتتابعة

$$S_n = \frac{n}{2}[a + U_n] \rightarrow S_n = \frac{\overset{6}{\cancel{10}}}{\cancel{2}}[2 + 38] \rightarrow S_n = 5 \times [40]$$

$S_n = 200$ مجموع الحدود العشرة للمتتابعة

---

9) اذا بدأ بالعدد (5) فان الاعداد القابلة للقسمة على (5) بدون باق هي $\langle 5, 10, 15, \ldots \rangle$

ما مجموع أول (30) عددا منها

الحل / الاساس $d = 10 - 5 = \boxed{5}$ وحدها الاول $a = \boxed{5}$ وعدد حدودها $n = \boxed{30}$

$$d = 15 - 10 = \boxed{5}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \rightarrow S_n = \frac{\overset{15}{\cancel{30}}}{\cancel{2}}[(2 \times 5) + (30-1) \times 5]$$

$$S_n = 15 \times [10 + (29) \times 5]$$

$$S_n = 15 \times [10 + 145]$$

$$S_n = 15 \times [155]$$

$S_n = 2325$ مجموع اعدادها الـ (30)

10) كم من الاعداد يجب ان تاخذ من المتتابعة $\langle 1,2,3,4, \ldots \rangle$ لتحصل على مجموع يساوي (5050)

الحل / الاساس $d = 2 - 1 = \boxed{1}$ وحدها الاول $= \boxed{1} = a$ و $S_n = \boxed{5050}$

$$d = 3 - 2 = \boxed{1}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\, 2a + (n-1)d \,\right] \rightarrow 5050 = \frac{n}{2}\left[\, (2\times 1) + (n-1)\times 1 \,\right]$$

$$5050 = \frac{n}{2}\left[\, 2 + n - 1 \,\right] \rightarrow 5050 = \frac{n}{2}\left[\, 1 + n \,\right]$$

$$5050 = \frac{n\,(1+n)}{2} \rightarrow 5050 = \frac{n + n^2}{2}$$

$$2 \times 5050 = n + n^2$$

$$n^2 + n - 10100 = 0$$

$$(n - 100)(n + 101) = 0$$

أما $(n + 101) = 0 \rightarrow n = -101$ تهمل $\notin N$

أو $(n - 100) = 0 \rightarrow \boxed{n = 100}$ عدد الحدود التي يجب اخذها

---

11) جد عدد حدود المتتابعة $\langle -20, -17, -14, \ldots, 61 \rangle$ ثم اوجد مجموع حدودها

الحل / المطلوب ايجاد حله

① ايجاد عدد حدود المتتابعة / الاساس $d = -20 - (-17) = -20 + 17 = \boxed{-3}$

$$d = -17 - (-14) = -17 + 14 = \boxed{-3}$$

وحدها الاول $= \boxed{-20} = a$ و $U_n = \boxed{61}$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow 61 = -20 + (n-1)\times 3$$

$$61 + 3 = -20 + 3n - \cancel{3} + \cancel{3}$$

$$3n = 61 + 23$$

$$n = \frac{84}{3} = 28$$ عدد الحدود

② ايجاد مجموع حدود المتتابعة

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\, a + U_n \,\right] \rightarrow S_n = \frac{\overset{5}{\cancel{28}}}{\cancel{2}}\left[\, -20 + 61 \,\right] \rightarrow S_n = 14 \times \left[\, 41 \,\right]$$

مجموع حدود المتتابعة $S_n = 574$

12) جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = 8 وحدها الثامن عشر = -13 ثم جد مجموع الحدود العشرة الاولى منها.

الحل /

$U_5 = a + 4d$

$8 = a + 4d$ ---------- (1)

$U_{18} = a + 17d$

$-31 = a + 17d$ ---------- (2)

$8 = \cancel{a} + 4d$ ---------- (1)

$\mp 31 = \mp \cancel{a} \mp 17d$ ---------- (2)

بالطرح

$39 = -13d$

$d = \frac{39}{-13} = -3$ ∴ الاساس $d = -3$

نعوض قيمة (d) في المعادلة (1) لايجاد (a)

$8 = a + 4d$ ---------- (1)

$8 = a + (4)(-3)$

$a = 8 + 12 = 20$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 20 , 17 , 14 , ... \rangle$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \rightarrow S_n = \frac{10}{2}[(2 \times 20) + (10-1) \times (-3)]$

$S_n = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{2}}[40 - 27]$

$S_n = 5 \times [13]$

$S_n = 65$ مجموع الحدود العشرة الاولى من المتتابعة

---

13) أدخل عشرة اوساط حسابية بين 3 , 36

الحل / عدد الحدود = عدد الاوساط + 2

$n = 10 + 2 = 12$

الاساس $d = \boxed{?}$ وحدها الاول $a = \boxed{3}$ و $U_n = \boxed{36}$ و $n = \boxed{12}$

$U_n = a + (n-1)d \rightarrow 36 = 3 + (12-1)d$

$-3 + 36 = -\cancel{3} + \cancel{3} + 11d$

$11d = 36 - 3$

$d = \frac{33}{11} = 3$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , 21 , 24 , 27 , 30 , 33 , 36 \rangle$

14) متتابعة حسابية حدها الثاني = 71– وحدها ما قبل الاخير = 3–
ومجموع حدودها = 740– جد المتتابعة

الحل / الحد الثاني + الحد ما قبل الاخير = الحد الاول + الحد الاخير

$$U_n \quad U_n - 1 \quad a \quad U_n$$

$$a + U_n = U_n + (U_n - 1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n \right]$$ قانون المجموع

$$S_n = \frac{n}{2}\left[U_2 + (U_n - 1) \right]$$ بالاستعاضة

$$740 = \frac{n}{2}\left[-71 - 3 \right]$$

$$740 = \frac{n}{\cancel{2}}\left[-\overset{37}{\cancel{74}} \right]$$

$$n = \frac{-740}{-37} = 20$$ حدا

$U_2 = a + d \rightarrow -71 = a + d$ ---------- (1)

$U_{19} = a + 18d \rightarrow -31 = a + 17d$ ---------- (2)

$$\left.\begin{aligned} -71 &= \cancel{a} + d \quad \text{---------- (1)} \\ \mp 3 &= \mp \cancel{a} \mp 18d \quad \text{---------- (2)} \end{aligned}\right\}$$ بالطرح

$$-68 = -17\,d$$

$$d = \frac{-68}{-17} = 4 \qquad \therefore d = 4$$ الاساس

نعوض قيمة (d) في المعادلة (1) لايجاد (a)

$-71 = a + 4d$ ---------- (1)

$$-71 = a + (4) \times (1)$$

$$a = \times 71 - 4 = -75$$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle -75, \underbrace{-71, -67, \ldots, -3}_{-74\ =\ \text{المجموع}}, 1 \rangle$

المتتابعة الهندسية /

سنكمل شرح المتتابعات الهندسية بعد ان اكملنا شرح المتتابعات الحسابية
اولا سنتكلم عن كيفية ايجاد اساس المتتابعة الهندسية
فتعريف المتتابعة الهندسية / قسمة اي حد على الحد السابق له مباشرة

اذا كان $\frac{r^{n-1}}{r^n}$ = $\boxed{\text{عدد ثابت}}$ ، حيث ان r^n لا يساوي صفر
نرمز له بالرمز r

فان المتتابعة تكون هندسية اساسها = r = العدد الثابت

فمثلا ⟨ 2 , 4 , 8 , 16 , ... ⟩ متتابعة هندسية اول شيء كيف نحصل على اساس هذه المتتابعة
بقسمة 4 على 2 و 8 على 4 و 16 على 8

$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$ اذن الاساس يجب ان يكون ثابت في كل هذه المتتابعة

ما بين العدد 2 والعدد 4 كم سيكون = $\boxed{2} = \frac{4}{2}$ ،

ما بين العدد 4 والعدد 8 كم سيكون = $\boxed{2} = \frac{8}{4}$ ،

ما بين العدد 8 والعدد 16 كم سيكون = $\boxed{2} = \frac{16}{8}$

اذن العدد $\boxed{2}$ سيكون اساس المتتابعة ولو فرضنا رمز الاساس r فيكون r = 2

ويمكن ان يكون الاساس موجب ، ويمكن الاساس ان يكون سالب مثل $d = \boxed{2}$ أو $d = \boxed{-2}$

فلو كان الحد الاول a = 2 في المتتابعة الموجب والـ (r = 2) موجب

فان جميع حدود المتتابعة موجبة ⟨ 2 , 4 , 8 , 16 , ... ⟩ ، اما اذا كان الـ (r = −2) سالب فان الحد الاول موجب والحد الثاني يكون سالب والحد الثالث موجب والحد الرابع سالب وهكذا ... أي
⟨ 2 , −4 , 8 , −16 , ... ⟩

مثال/ أوجد اساس المتتابعة الهندسية ⟨ 2 , 4 , 8 , 16 , ... ⟩

كم سيكون اساس المتتابعة ؟ اذن اساس المتتابعة سيكون = $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \boxed{2}$

لو قلنا : اكمل ثلاثة حدود للمتتابعة الهندسية ⟨ 2 , 4 , 8 , 16 , ... ⟩ ؟
ستكون الحدود هي 128 , 64 , 32 ويكون السؤال بالشكل

مثال/ اكمل ثلاثة حدود للمتتابعة الهندسية ⟨ 2 , 4 , 8 , 16 , ... ⟩
أي ايجاد U_5 , U_6 , U_7

نشاهد ان قسمة اي حد على الحد السابق له مباشرة هو مقدار ثابت وهو (2) حيث ان = $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \boxed{2}$

تسمى مثل هذه المتتابعة بالمتتابعة الهندسية ويسمى العدد الثابت الناتج من قسمة حد على حد سابق له مباشرة باساس المتتابعة ويرمز لهذا الاساس بالحرف (r) وشرط ان يكون في هذه المتتابعات لا يوجد حد قيمته ((صفر))

يرمز للحد الاول في هذه المتتابعة بالحرف (a) ، يرمز للحد الاخير في هذه المتتابعة بالرمز U_n

وان (r) الاساس للمتتابعة هو ناتج قسمة حد على حد سابق له مباشرة .

الحد العام للمتتابعة الهندسية (الحد النوني) هو $\boxed{U_n = \underset{\text{الحد الاول}}{a} \cdot r^{n-1}}$

الحد الاول للمتتابعة معلوم وهو $U_1 = a = 2$

الحد الثاني للمتتابعة وهو $U_2 = U_1 \cdot r = 2 \times 2 = 4$

الحد الثالث للمتتابعة $U_3 = U_2 \cdot r = 4 \times 2 = 8$

الحد الرابع للمتتابعة $U_4 = U_3 \cdot r = 8 \times 2 = 16$

الحد الخامس للمتتابعة $U_5 = U_4 \cdot r = 16 \times 2 = 32$

الحد السادس للمتتابعة $U_6 = U_5 \cdot r = 32 \times 2 = 64$

الحد السابع للمتتابعة $U_7 = U_6 \cdot r = 64 \times 2 = 128$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots \rangle$

أمثلة / (كتاب)

(1) أكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة الهندسية التي حدها الاول $= 64$ واساسها $\frac{-1}{4}$

الحل / الاساس $\boxed{\frac{-1}{4}} = r$ وحدها الاول $= \boxed{64} = a$

① ايجاد الحدود الستة الاولى

الحد الاول للمتتابعة معلوم وهو $U_1 = a = 64$

الحد الثاني للمتتابعة وهو $U_2 = U_1 \cdot r = 64 \times (\frac{-1}{4}) = -16$

الحد الثالث للمتتابعة $U_3 = U_2 \cdot r = -16 \times (\frac{-1}{4}) = 4$

الحد الرابع للمتتابعة $U_4 = U_3 \cdot r = 4 \times (\frac{-1}{4}) = -1$

الحد الخامس للمتتابعة $U_5 = U_4 \cdot r = -1 \times (\frac{-1}{4}) = \frac{1}{4}$

الحد السادس للمتتابعة $U_6 = U_5 \cdot r = \frac{1}{4} \times (\frac{-1}{4}) = \frac{-1}{16}$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 64, -16, 4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \dots \rangle$

طريقة ثانية للحل / الاساس $\boxed{\frac{-1}{4}} = r$ وحدها الاول $= \boxed{64} = a$

الحد الاول للمتتابعة معلوم وهو $U_1 = a = 64$

الحد الثاني للمتتابعة وهو $U_2 = a \cdot r = 64 \times (\frac{-1}{4}) = -16$

الحد الثالث للمتتابعة $U_3 = a \cdot r^2 = 64 \times (\frac{-1}{4})^2 = \cancel{64} \times (\frac{1}{\cancel{16}}) = 4$

الحد الرابع للمتتابعة $U_4 = a \cdot r^3 = 64 \times (\frac{-1}{4})^3 = \cancel{64} \times (\frac{-1}{\cancel{64}}) = -1$

الحد الخامس للمتتابعة $U_5 = a \cdot r^4 = 64 \times (\frac{-1}{4})^4 = \cancel{64} \times (\frac{-1}{\cancel{256}}) = \frac{1}{4}$

الحد السادس للمتتابعة $U_6 = a \cdot r^5 = 64 \times (\frac{-1}{4})^5 = \cancel{64} \times (\frac{-1}{\cancel{1024}}) = \frac{-1}{16}$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 64, -16, 4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \dots \rangle$

---

(2) جد الحد السادس للمتتابعة الهندسية $\langle 7, 14, 28, \dots \rangle$

الحل / الاساس $\boxed{2} = \frac{14}{7} = r$ وحدها الاول $\boxed{7} = a$ وحدها السادس $\boxed{6} = n$

$U_n = a \cdot r^{n-1}$

الحد السادس $U_6 = 7 \times 2^5 = 7 \times 32 = 224$ ←

---

(3) متتابعة هندسية حدها الاول = 3 وحدها الخامس = 48 جد حدها الثامن

الحل / حدها الاول = $\boxed{3} = a$ وحدها الخامس $U_5 = a \cdot r^4$

$48 = 3r^4 \rightarrow 3r^4 = \frac{48}{3} = 16 \rightarrow r = \mp 2$

هنالك متتابعتان الاولى اساسها (2) والثانية اساسها (-2)

اولا : **حدها الاول = 3 واساسها** $\boxed{2} = r$

فيكون الحد الثامن $U_8 = 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$

ثانيا : حدها الاول = 3 واساسها $\boxed{-2} = r$

فيكون الحد الثامن $U_8 = 3 \times -2^7 = 3 \times -128 = -384$

---

(4) اي حد في المتتابعة الهندسية $\langle 2, 10, 50, 250, \dots \rangle$ يساوي 781250

الحل / الاساس $\boxed{5} = \frac{10}{2} = r$

وحدها الاخير $\boxed{781250} = U_n$

$U_n = a \cdot r^{n-1}$

$781250 = 2 \times (5)^{n-1}$ بالقسمة على (2)

$(5)^{n-1} = 390625 \rightarrow (5)^{n-1} = (5)^8$

$n - 1 = 8$
$n = 8 + 1$
$n = 9$

390625	5
78125	5
15625	5
3125	5
625	5
125	5
25	5
5	5
	1

الحد التاسع هو الحد الذي يساوي 781250

(5) جد المتتابعة الهندسية التي حدها السابع = 625 وحدها الرابع = 5 −

الحل : $U_7 = 625$ ، $U_4 = -5$

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$U_4 = a \cdot r^{4-1}$	$U_7 = a \cdot r^{7-1}$
$-5 = a \cdot r^{3}$ ----(2)	$625 = a \cdot r^{6}$ ----(1)

بقسمة المعادلة (1)على المعادلة (2)

$$\frac{625}{^{-}5} = \frac{a \cdot r^6}{a \cdot r^3}$$

$$r^3 = -125 \Rightarrow r = -\sqrt[3]{125} \Rightarrow r = -5$$

نعوض قيمة r في معادلة (2)

$$-5 = a \cdot (-5)^3$$

$$a = \frac{^{-}5}{(-5)^3} \Rightarrow a = \frac{^{-}5}{^{-}125} \Rightarrow a = \frac{1}{25}$$

المتتابعة الهندسية $\langle U_n \rangle = \langle \frac{1}{25}, \frac{-1}{5}, 1, ^{-}5, \dots \rangle$

الاوساط الهندسية /

بعد ان اكملنا شرح المتتابعات الحسابية والمتتابعة الهندسية والوسط الحسابي سوف نشرح الوسط الهندسي

مثلما لدينا الوسط الحسابي سيكون هنالك وسط هندسي

ما هو الوسط الهندسي

لو كان لدينا ثلاثة حدود من متتابعة هندسية a , b , c بشرط ان يكونوا متتاليين ، والعددين a و c

يجب ان يكونا موجبين معا أو سالبين معا فالحد الوسط $a , (b), c$ يكون هو الوسط الهندسي اي $\boxed{b}$

$$b^2 = ac \rightarrow b = \mp \sqrt{ac}$$

يسمى $\boxed{b}$ الوسط الهندسي ، والحد الاول للمتتابعة = $\boxed{a}$ ، وحدها الاخير = $\boxed{c}$

عدد حدود المتتابعة = عدد الاوساط + 2

مثل لو ارادنا ايجاد الوسط الهندسي للعددين 27 ، 3 (يجب ان يكون العددين موجبين معا او سالبين معا)

فالحل / سيكون $b = \mp \sqrt{ac}$

$$b = \mp \sqrt{3 \times 27} = \mp \sqrt{81} = \mp 9$$

مثل لو ارادنا ادخال عدد محدود من الاوساط الهندسية بين العددين 5 ، 640

مثال/ ادخل ستة اوساط هندسية بين 5 ، 640

عدد حدود المتتابعة = 2 + 6 = 8

$$U_n = U_8 = 5 \ , U_1 = a = 640$$

$$U_n = a \bullet r^{n-1}$$

$$5 = 640 \times r^{8-1}$$

$$r^7 = \frac{\cancel{5}}{\cancel{640}} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$r^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 640 , 320 , 160 , 80 , 40 , 20 , 10 , 5 \rangle$

الاوساط هي 5 , 10 , 20 , 40 , 80 , 160 , 320

مجموع عدد معين من حدود متتابعة هندسية /

تعلمنا ان المتتابعة الهندسية التي حدها الاول $= a$ واساسها $= r$ هي :

$$\langle U_n \rangle = \langle a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \rangle$$

واذا اخذنا (n) حدا ابتداءا من الحد الاول فتكون المتتابعة المختارة متتابعة منتهية هي :

$\langle a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \rangle$ ولو رمزنا بالرمز S_n لمجموع هذه الحدود يكون :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \quad (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في (r) نحصل على

$$r\,S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \quad (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a\,(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)} \qquad \text{بشرط } r \neq 1$$

وعندما يكون $r = 1$ تكون المتتابعة المنتهية التي عدد حدودها (n)

هي $\langle a, a, a, \ldots, a \rangle$ ويكون $S_n = na$

أمثلة / (كتاب)

(1) جد مجموعة الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية $\langle 3, 9, 27, 81, \ldots \rangle$

الحل / الاساس $r = \frac{9}{3} = \boxed{3}$ وحدها الاول $a = \boxed{3}$ وعدد حدودها $= \boxed{6} = n$

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_6 = \frac{3\,(1-3^6)}{(1-3)} = \frac{3\,(1-729)}{-2} = 3 \times \frac{-728}{-2} = 1092$$

---

(2) ما مجموع حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 3 وحدها الاخير = 48 واساسها = 2

الحل / الاساس $r = \boxed{2}$ وحدها الاول $a = \boxed{3}$ وحدها الاخير $= \boxed{48} = U_n$

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$48 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 16 = 2^4$$

$$n - 1 = 4 \rightarrow n = 4 + 1 = 5$$

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)} \rightarrow S_5 = \frac{3\,(1-2^5)}{(1-2)} = \frac{3\,(1-32)}{-1} = 3 \times \frac{-31}{-1} = 93$$

(3) اذا كان مجموع الحدود الستة الاولى من متتابعة هندسية يساوي تسعة امثال مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها فما اساس المتتابعة ؟

الحل / مجموع الحدود الستة الاولى $= \boxed{9}$ أمثال مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_6 = \frac{a\,(1-r^6)}{(1-r)}$$

$$S_3 = \frac{a\,(1-r^3)}{(1-r)}$$

$$\frac{a\,(1-r^6)}{(1-r)} = 9 \times \frac{a\,(1-r^3)}{(1-r)} \qquad (1-r)$$ بالضرب في

$$a\,(1-r^6) = 9 \times a\,(1-r^3)$$ بالقسمة على (a) وتحليل $(1-r^6)$

$$\cancel{a}\,\cancel{(1-r^3)}\,(1+r^3) = 9 \times \cancel{a}\,\cancel{(1-r^3)}$$ بالقسمة على $(1-r^3)$

$$1 + r^3 = 9 \rightarrow r^3 = 9 - 1 = 8 \rightarrow r^3 = 2^3$$

$r = 2$ الاساس

---

(4) متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها $= (26)$ ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها $= (702)$ فما هي المتتابعة

الحل / مجموع الحدود الثلاثة الاولى $= \boxed{26}$ ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها $= \boxed{702}$

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_3 = \frac{a\,(1-r^3)}{(1-r)} \qquad 26 = \frac{a\,(1-r^3)}{(1-r)} \text{ ------------ } (1)$$

$S_6 =$ مجموع الحدود الثلاثة الاولى + مجموع الحدود الثلاثة التالية لها

$$728 = 702 + 26$$

$$S_6 = \frac{a\,(1-r^6)}{(1-r)} \qquad 728 = \frac{a\,(1-r^6)}{(1-r)} \text{ ------------ } (2)$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1)

$$\frac{a\,(1-r^6)}{(1-r)} \div \frac{a\,(1-r^3)}{(1-r)} = \frac{728}{26}$$

$$\frac{\cancel{a}\,\cancel{(1-r^3)}\,(1+r^3)}{\cancel{(1-r)}} \times \frac{\cancel{(1-r)}}{\cancel{a}\,\cancel{(1-r^3)}} = 28$$

$1 + r^3 = 28 \rightarrow r^3 = 28 - 1 = 27 \rightarrow r^3 = 3^3$

$r = 3$ الاساس

نعوض في المعادلة (1) نحصل على

$$26 = \frac{a\,(1-r^3)}{(1-r)} \rightarrow 26 = \frac{a\,(1-3^3)}{(1-3)} \rightarrow 26 = \frac{a\,(1-27)}{-2}$$

$$-26\,a = 26 \times -2 \rightarrow -26\,a = -52 \rightarrow a = \frac{-52}{-26} = 2$$

$a = 2$ الحد الاول

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle\, 2 , 6 , 18 , 54 , \ldots \rangle$

طريقة ثانية للحل /

مجموع الحدود الثلاثة الاولى = $a + ar + ar^2 = \boxed{26}$

ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها = $ar^3 + ar^4 + ar^5 = \boxed{702}$

$$\frac{a + ar + ar^2}{ar^3 + ar^4 + ar^5} = \frac{26}{702} \rightarrow \frac{\cancel{a}\ \cancel{(1+r+r^2)}}{\cancel{a}r^3\ \cancel{(1+r+r^2)}} = \frac{1}{27}$$

$r^3 = 27 \rightarrow r^3 = 3^3 \rightarrow r = 3$ الاساس

$a + ar + ar^2 = 26 \rightarrow a(1 + r + r^2) = 26$

$a(1 + 3 + 3^2) = 26$

$a(1 + 3 + 9) = 26$

$13\,a = 26 \rightarrow a = \frac{26}{13} = 2$ الحد الاول

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle\, 2 , 6 , 18 , 54 , \ldots \rangle$

أمثلة تطبيقية على المتتابعات الهندسية في موضوع القيمة الحالية وجملة الدفعة السنوية /

الرموز المستخدمة /

المبلغ	(Amount)	ويرمز له بالحرف	(A)
السعر	(Price)	يمثل ربح المئة في سنة واحدة ويرمز له بالحرف	(P)
الزمن	(Time)	ويرمز له بالحرف	(T)
الربح	(Profit)	ويرمز له بالحرف	(Pr)

الجملة Wholesale / (المبلغ + الربح)

وهي ما يؤول اليه المبلغ الموضوع بسعر معين بعد فترة من الزمن

القيمة الحالية Currebt Value /

ويرمز له بالحرف (C) . الربح اما ان يكون بسيطا او يكون ربحا مركزيا .

الربح البسيط /

ويرمز له بالحرف (S•pr) ويحسب فقط على راس المال (المبلغ) وفق القانون التالي $S.Pr = \frac{A.T.P}{100}$

الربح المركب /

ويرمز له بالحرف (C•pr) يحسب فقط على راس المال وعلى الربح ايضا . ويمكن حساب جملة المبلغ الذي يحسب له ربحا مركبا وفق القانون التالي : $W = A\ (1.0P)\ T$

وقد تضاف الارباح في كسور من السنة وهكذا فيكون القانون بالشكل التالي حيث (n) عدد مرات اضافة الارباح في السنة

$$W = A\left[1 + \frac{0.0P}{n}\right]^h$$

القيمة الحالية Current Value /

عندما يحتاج البعض للحصول على المبلغ المودع قبل موعد الاستحقاق فتعتمد البنوك في هذه الاحوال الى تنزيل قيمة المبلغ حيث يخصم من المبلغ مقدار من المبلغ مقدارا من المال يسمى عمولة أو (تنزيل داخلي)

فمثلا / اذا كان لدى احدهم كمبيالة قيمتها (A) تستحق الدفع بعد (t) من الزمن بالسنين واراد ان ينزلها عند احد المصارف ، فان المصرف ياخذ عليها عمولة وهذه العمولة هي عبارة عن ربح المبلغ المعطى لصاحب الكمبيالة بحيث لو وضع بالربح المركب لمدة (t) من الزمن وبسعر (p%) تصبح جملة (A) . وهكذا فالمبلغ المعطى لصاحب الكمبيالة يسمى القيمة الحالية (C) بينما (A) يسمى القيمة الاسمية للكمبيالة لذلك فان القيمة الحالية لمبلغ معين هي المبلغ الذي تغير جملته في نهاية المدة بمقدار المبلغ المعين. وعليه يكون

$$A = C.(1.0P)^t\ ,\ C = \frac{A}{(1.0P)^t}\ ,\ C = A.(1.0P)^{-t}$$

مثال 1/ (كتاب)

لدى رجل كمبيالة بمبلغ (3) ملايين دينار تستحق الدفع بعد مرور (5) سنوات ولكنه اراد ان يستلم قيمتها الان فاذا كان سعر الربح المركب (5%) في السنة فما مقدار ما يستلمه ؟

الحل /

$$C = A.(1.0P)^{-t}$$

$$C = 3000000 \times (1.05)^{-5}$$

لايجاد قيمة (C) نستخدم اللوغاريتمات (استخدام التك الحاسبة) كما تعلمت من الفصل السابق :

$$LogC = Log\left[3000000 \times (1.05)^{-5}\right]$$

$$LogC = Log\ 3000000 + Log\ (1.05)^{-5}$$

$$LogC = Log\ 3000000 - 5Log\ (1.05)$$

$$LogC = 6.4771 - (5)\ (0.0212)$$

حيث : $Log\ 3 = 0.4771$

$$LogC = 6.4771 - 0.1060$$

$$LogC = 6.3711$$

$$\therefore C = 2351000$$

صورة لوغاريتمية ← $Log_{10} C = 6.3711$

صورة أسية ← $C = 10^{6.3711}$

$x = 2350$

مثال 2/ (كتاب)

يودع رجل في نهاية كل سنة مبلغ (5) خمسة ملايين دينار ليربح ربحا مركبا بسعر (4%) في السنة. فما مقدار رصيده عند ايداعه المبلغ العاشر ؟

الحل / الرصيد هو عبارة عن جملة عدة مبالغ متساوية وضعت لمدة مختلفة وعليه يكون:

الرصيد للمبلغ الاول = W_1 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة تسع سنوات أي ان :

$$W_1 = 5000000(1.04)^9$$

الرصيد للمبلغ الثاني = W_2 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة ثمان سنوات أي ان :

$$W_2 = 5000000(1.04)^8$$

الرصيد للمبلغ الثالث = W_3 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة سبع سنوات أي ان :

$$W_3 = 5000000(1.04)^7$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_{10}$$

$$W = 5000000\left[(1.04)^9 + (1.04)^8 + (1.04)^7 + \ldots + 1\right]$$

نلاحظ ان المقدار المحصور بين القوسين حدها الاول = 1 عند فرض ان الحد الاول هو في اليمين وليس من اليسار وان اساسها = (1.04) وعدد حدودها = (10) فيكون

$$W = 5000000\left[\frac{1(1-(1.04)^{10}}{(1-(1.04)}\right]$$

$$W = 5000000\left[\frac{1-(1.04)^{10}}{-0.04}\right]$$

وباستخدام اللوغاريتمات نجد قيمة (1.04) فنقول: $x = (1.04)^{10}$

$$Log\ x = Log(1.04)^{10}$$

$$Log\ x = 10Log(1.04)$$

$$Log\ x = 10 \times 0.017$$

$$Log\ x = 0.17$$

$$x = 1.479$$

$$W = 5000000 \times \frac{1-1.479}{-0.07}$$

$$W = 59875000$$

$\text{Log}_{10} x = 0.17$ ← صورة لوغاريتمية
$x = 10^{0.17}$ ← صورة أسية
$x = 1.4791$

تمارين (3 − 2)

1) جد مجموع حدود كل من المتتابعات الهندسية الاتية :

ⓐ $\langle 1, 2, 4, \dots, 128 \rangle$

الحل / الاساس $r = \frac{2}{1} = \boxed{2}$ وحدها الاول $a = \boxed{1}$ وحدها الاخير $U_n = \boxed{128}$

$$r = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$128 = 1 \times 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 128 = 2^7$$

$n - 1 = 7$ اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

$$n = 7 + 1 = 8$$

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

$$S_n = \frac{1\,(1 - 2^8)}{(1 - 2)} = \frac{1\,(1 - 256)}{-1}$$

$$S_n = 1 \times \frac{-255}{-1} = 255$$

$S_n = 255$ مجموع حدود المتتابعة الهندسية

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

ⓑ $\langle 3, -6, 12, \dots, 768 \rangle$

ملاحظة هامة / اذا كان الحد الاول موجب $a = +$ في المتتابعة موجب والـ $(r = +)$ موجب فان جميع حدود المتتابعة موجبة $\langle 2, 4, 8, 16, \dots \rangle$.
اما اذا كان الـ (**سالب** $- = r$) سالب فان الحد الاول موجب والحد الثاني يكون سالب والحد الثالث موجب والحد الرابع سالب وهكذا ... أي $\langle 3, -6, 12, \dots, -512 \rangle$

الحل / بما ان المتتابعة حدودها موجب الاول موجب والثاني سالب والثالث موجب فان المتتابعة اساسها سالب القيمة

الاساس $r = \frac{-6}{3} = \boxed{-2}$ وحدها الاول $a = \boxed{3}$ وحدها الاخير $U_n = \boxed{-512}$

$$r = \frac{12}{-6} = \boxed{-2}$$

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$768 = 3 \times (-2)^{n-1}$$

$$(-2)^{n-1} = \frac{768}{3} = 256 = (-2)^8$$

لماذا جعلت $(-2)^8$ وليس $(2)^8$ لان كليهما يعطي القيمة نفسها عند الرفع حيث يساويا (256) حيث القيمة السالبة المرفوعة الى اس زوجي تصبح موجبة. وفي هذا السؤال جعلت (−2) بدل (−2) لكي نساوي الاساسات حتى تتساوى الاسس بعد ذلك.

$n - 1 = 8$ ← اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

$n = 8 + 1 = 9$

ملاحظة هامة / الاساس المرفوع الى اس فردي يبقى سالبا

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_n = \frac{3\,(1-(-2)^9)}{(1-(-2))} = \frac{3\,(1-(-512))}{1+2}$$

$$S_n = \frac{\cancel{3}\,(1-(-512))}{\cancel{3}} = 1-(-512) = 1+512 = 513$$

$S_n = 513$ مجموع حدود المتتابعة الهندسية

ⓒ $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{-1}{256} \right\rangle$

الحل / بما ان المتتابعة حدودها موجب الاول موجب والثاني سالب والثالث موجب فان المتتابعة اساسها سالب القيمة

الاساس $r = \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{2}}{1} = \boxed{\frac{-1}{2}}$ ، $r = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{-1}{4}} = \frac{1}{\cancel{8}} \times \frac{\cancel{4}}{-1} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

وحدها الاول = $\boxed{\frac{1}{2}}$ = a وحدها الاخير = $\boxed{256}$ = U_n

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$\frac{-1}{256} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{2}{1} \times \frac{-1}{256} = \frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{-1}{\underset{128}{\cancel{256}}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{-1}{128} = \left(-\frac{1}{2}\right)^7$$

$n - 1 = 7$ ← اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

$n = 7 + 1 = 8$ حدا

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{256}\times\frac{1}{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{512}\right)}{\frac{3}{2}}$$

$$S_n = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{512}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{512}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{256} = \frac{256-1}{768} = \frac{255}{768} = 0.332$$

$S_n = 0.332$ مجموع حدود المتتابعة الهندسية

---

2) جد المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 16 ومجموع الحدود الثلاثة الاولى يساوي (48 −)

الحل /

$S_n = a + ar + ar^2$

$S_n = a(1+r+r^2)$

$-48 = -16(1+r+r^2)$

$(1+r+r^2) = \frac{\cancel{-48}}{\cancel{-16}} = 3$

$r^2+r+1-3=0$

$r^2+r-2=0$

$(r+2)(r-1)=0$

اما $(r+2)=0 \rightarrow r=-2$

او $(r-1)=0 \rightarrow r=1$

∴ المتتابعة الهندسية عندما $r=-2$ هي

$\langle U_n\rangle = \langle -16, 32, -64, \ldots\rangle$

عندما $r=1$ هي

$\langle U_n\rangle = \langle -16, -16, -16, \ldots\rangle$

---

3) جد الحد العاشر من المتتابعة الهندسية التي يكون مجموع الحدود السبعة الاولى منها (547) واساسها (3 −)

الحل /

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$547 = \frac{a(1-(-3)^7)}{1-(-3)}$$

$$547 = \frac{a(1-(-2187))}{1+3}$$

$$547 = \frac{a(1+2187)}{1+3}$$

$$547 = \frac{a(2188)}{4} \rightarrow 2188a = 547\times 4$$

$$a = \frac{2188}{2188} = 1$$

$$U_{10} = ar^9 = 1\times(-3)^9$$

$U_{10} = -19683$ الحد العاشر

4) متتابعة هندسية حدها الاول (256) واساسها ($-\frac{1}{2}$) ومجموع (n) من حدودها ابتداءا من الحد الاول يساوي = $170\frac{1}{2}$ فما قيمة (n) ؟

الحل /

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} \rightarrow 170\frac{1}{2} = \frac{256\times\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$170\frac{1}{2} = \frac{256\times\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{170}{2}\times\frac{3}{2} = 256\times\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\frac{170}{2}\times\frac{3}{2} = 256-256\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{170}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{510}{2}\times\frac{1}{2} = \boxed{255\times\frac{1}{2}}$$

$$\frac{510}{2}\times\frac{1}{2} = 256-256\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$255\times\left(\frac{1}{2}\right) = 256-256\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$255\frac{1}{2}-256 = -\cancel{256}+\cancel{256}-256\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-\frac{1}{2} = 256\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{256} = \frac{256}{256}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-\frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow -\frac{1}{2^{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow n = 10$$

اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

الحل / الاساس $r = 2 - 1 = \boxed{2}$

$r = 4 - 2 = \boxed{2}$

وحدها الاول = $a = \boxed{1}$

وعدد حدودها = $n = \boxed{64}$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{1(1 - 2^{64})}{1 - 2}$$

$$S_n = \frac{1 - 2^{64}}{-1} = 2^{64}$$

$$LogS_n = Log(2)^{64}$$

$$LogS_n = 64\,Log(2)$$

$$LogS_n = 64 \times 0.3010$$

$LogS_n = 19.2659$ صورة لوغارتمية

$S_n = 10^{19.2659}$ صورة أسية

$S_n \simeq 1.8 \times 10^{19}$ حبة المجموع

$\mathrm{Log}_{10} x = 0.17$ ← صورة لوغاريتمية

$x = 10^{0.17}$ ← صورة أسية

$x = 1.4791$

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$U_{64} = 1 \times (2)^{64-1}$$

$$U_{64} = 1 \times (2)^{63}$$

$$U_{64} = (2)^{63}$$

$$LogU_{64} = Log(2)^{63}$$

$$LogU_{64} = 63Log(2)$$

$$LogU_{64} = 63 \times 0.3010$$

$LogU_{64} = 18.96489$ صورة لوغارتمية

$U_{64} = 10^{18.96489}$ صورة اسية

$U_{64} \simeq 9 \times 10^{18}$ عدد حبات المربع الاخير

---

6) عين المتتابعة الهندسية التي حدها الاول هو (16 −) ومجموع الحدود الثلاثة الاولى منها =(48)

الحل / حدها الاول = $a = \boxed{16}$ مجموع الحدود الثلاثة الاولى = $S_n = \boxed{48}$

$$S_n = a + ar + ar^2$$

$$S_n = a(1 + r + r^2)$$

$$48 = -16(1 + r + r^2)$$

$$(1 + r + r^2) = \frac{\cancel{48}}{\cancel{16}} = 3$$

$$r^2 + r + 1 - 3 = 0$$

$$r^2 + r - 2 = 0$$

$$(r + 2)(r - 1) = 0$$

أما $(r + 2) = 0 \rightarrow r = -2$

أو $(r - 1) = 0 \rightarrow r = 1$

∴ المتتابعة الهندسية عندما $r = -2$ هي

$$\langle U_n \rangle = \langle 16, -32, 64, \ldots \rangle$$

عندما $r = 1$ هي

$$\langle U_n \rangle = \langle 16, 16, 16, \ldots \rangle$$

---

7) اذا كانت النسبة بين مجموع الحدود الاربعة الاولى لمتتابعة هندسية الى مجموع الحدود الثمانية الاولى منها كنسبة $\frac{1}{17}$ فما اساس المتتابعة ؟

الحل /

$$S_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r} \rightarrow S_8 = \frac{a(1-r^8)}{(1-r)} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{(1-r)}$$

$$\frac{S_4}{S_8} = \frac{1}{17} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{a(1-r^4)}{1-r}}{\frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{(1-r)}} = \frac{1}{17}$$

$$\frac{\cancel{a}\,\cancel{(1-r^4)}}{\cancel{(1-r)}} \times \frac{\cancel{(1-r)}}{\cancel{a}\,\cancel{(1-r^4)}(1+r^4)} = \frac{1}{17}$$

$$\frac{1}{(1+r^4)} = \frac{1}{17} \rightarrow (1+r^4) = 17$$

$$r^4 = 17 - 1$$

$$r^4 = 16 \rightarrow r^4 = 2^4 \rightarrow r = \mp 2$$

(عند اخذ الاس الزوجي فان القيم تاخذ بالسالب والموجب) $\therefore r = \mp 2$

---

8) متتابعة هندسية حدها الثاني (128) وحدها السابع (4) فما مجموع الحدود التسعة الاولى منها؟

الحل / حدها الثاني = $\boxed{128}$ وحدها السابع = $\boxed{4}$

$$U_n = a \bullet r^{n-1}$$

$128 = a \bullet r^1$ ------------- (1) الحد الثاني

$4 = a \bullet r^6$ ------------- (2) الحد السابع

بقسمة طرفي المعادلة (1) على المعادلة (2) نحصل على $\frac{ar^6}{ar} = \frac{4}{128}$

$$\frac{\cancel{a}r^6}{\cancel{a}r} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{128}} = \frac{1}{32}$$

$r^5 = \frac{1}{32} \rightarrow r^5 = \frac{1}{2^5} \rightarrow r^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \rightarrow r = \frac{1}{2}$ الاساس

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على (1) ------------- $128 = a \times \frac{1}{2}$

$128 = \frac{1}{2}a \rightarrow 128 \times 2 = a \rightarrow a = 256$ الحد الاول

∴ المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle\, 256 , 128 , 64 , 32 , 16 , 8 , 4 , 2 , 1, \ldots \rangle$

$$S_9 = \frac{a\,(1 - r^9)}{(1 - r)} = \frac{256 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{256 \times \left(\frac{1 - 512}{512}\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_9 = \cancel{256} \times \left(\frac{-511}{\underset{2}{\cancel{512}}}\right) \times -\frac{\cancel{2}}{1} = 511$$

$S_9 = 511$ مجموع الحدود التسعة الاولى

---

9) يودع رجل في بداية كل سنة مبلغ (5) ملايين دينار في مصرف ليربح ربحا مركبا بسعر % 5 فما مقدار رصيده في نهاية السنة السادسة .

مع العلم ان Log3767 = 3.5767 , Log(105)=2.0212 ؟

الحل /

$$W_t = A \left[1 + \frac{0.0P}{n}\right]^h$$

$$W_t = 5000000 \times (1.05) \times \frac{1 \times [\,(1.05)^6 - 1\,]}{(1.05 - 1)}$$

$$W_t = \frac{5000000 \times (1.05)}{1} \times \frac{(1.05)^6 - 1}{0.05}$$

$$W_t = 21 \times 5000000 \times [\,(1.05)^6 - 1\,]$$

اكمل الحل

---

10) وضع رجل مبلغ (500000) دينار في مصرف بحساب الربح المركب بسعر (% 4) لمدة (20) سنة فما جملة المبلغ مع العلم ان

Log(104)=2.0170 , Log500=2.6990 , Log1094 = 3.0390 ؟

الحل / $W_t = A.(1.0P)^{-t}$

$W = 500000 \times (1.04)^{20}$

$Log W = Log\left[\,500000 \times (1.04)^{20}\right]$

$Log W = Log 500000 + Log(1.04)^{20}$

$Log W = 5.698970 + (20 \times 0.017033)$

$Log W = 5.698970 + (0.340660)$

$Log W = 6.039630$

صورة لوغاريتمية	صورة أسية
↓	↓
$\mathrm{Log}_{10} W = 6.039630$	$W = 10^{6.039630}$ $W = 1.095.544$

$\therefore W = 1,095,544$ دينار جملة المبلغ لمدة (عشرين سنة)

مليون دينار وخمسة وتسعون الف وخمسمائة واربعة واربعون

تمارين عامة على الفصل الثاني

1) لكل مما ياتي توجد أربعة اجابات واحدة منها فقط صحيحة . اختر الاجابة الصحيحة :

(أ) اذا كانت $\langle 10 , x , 0 , -5 , \dots \rangle$ متتابعة حسابية فان :

$\boxed{(1) \quad x = 5}$ (2) $x = 5$ والحد السادس $= -10$

(3) $x = -5$ (4) ليس ايا مما ذكر

الحل / الاساس $\boxed{d} = x - 10$ ، $\boxed{d} = 0 - x$

$$x - 10 = 0 - x \rightarrow x + x - 10 = 0 - \cancel{x} + \cancel{x}$$

$$2x - \cancel{10} + \cancel{10} = 0 + 10 \rightarrow 2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow \boxed{\therefore x = 5}$$

(ب) متتابعة حسابية حدها الثامن = 28 وحدها الحادي والعشرين = 67 فان :

(1) اساسها = 3 وحدها الاول = -7 (2) اساسها = -3 وحدها الاول = -7

$\boxed{\text{(3) اساسها = 3 وحدها الاول = 7}}$ (4) اساسها = -3 وحدها الاول = 7

الحل / $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ **المطلوب ايجاد الاساس والحد الاول**

الاساس = $\boxed{?}$ = d وحدها الثامن $U_8 = \boxed{28}$ وحدها الحادي والعشرين $U_{21} = \boxed{67}$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_8 = a + (8-1)d$$

$$28 = a + 7d \text{ ---------- } (1)$$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_{21} = a + (21-1)d$$

$$67 = a + 20d \text{ ---------- } (2)$$

$$28 = \cancel{a} + 7d \text{ ------------ } (1)$$

$$\mp 67 = \mp \cancel{a} \mp 20d \text{ ------------ } (2)$$

$$-39 = -13d$$

$$d = \frac{-39}{-13} = 3 \quad \text{الاساس}$$

نعوض (d) في معادلة (1) لايجاد قيمة (a)

$$28 = a + (7 \times 3)$$

$$-\cancel{28} + \cancel{28} = a + 21 - 28$$

$$0 = a - 7 \rightarrow -a = -7 \rightarrow a = 7 \quad \text{الحد الاول}$$

اذن المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 7 , 10 , 13 , 16 , \dots , 28 , \dots , 67 , \dots \rangle$

(جـ) عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين (1000) ، (2000) ويقبل القسمة على (7) بدون باق هو

(1) 142 $\boxed{(2)\ 143}$ (3) 144 (4) 285

الحل / نلاحظ ان الاعداد الصحيحة المحصورة محصورة بين العددين (1000) ، (2000) هي التي تدخل ضمن اعداد المتتابعة الحسابية فقط . اما العددين (1000) ، (2000) لا تدخل

لايجاد أول عدد يقبل القسمة على (7) بدون باق ياتي بعد العدد (1000) مباشرة أي نقسم (1000) على (7) فيكون بصورة تقريبية $\frac{1000}{7} \simeq 143$

فيكون اول عدد بعد العدد (1000) ويقبل القسمة على (7) وبدون باق **اذن هو العدد (143)**

(د) رتبة الحد الذي قيمته $\frac{1}{192}$ في المتتابعة $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \dots \right\rangle$ هي

$\boxed{(1)\ 8}$ (2) -8 (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{2}$

الحل / $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ **المطلوب ايجاد رتبة الحد**

الاساس = $d = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$ = $d = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{-1}{3}}$ =

الاساسات مختلفة

ارجوا كمال الحل

---

2) يوجد (n) من الأوساط العددية بين 3 ، 36 ونسبة الوسط الثاني الى الوسط الذي ترتيبه (n–1) هي $\frac{3}{10}$ فما قيمة (n)

الحل / الحد الاول = $a = 36$ ، الحد الاخير = $U_n = 3$ ، الاوسط الثاني $U_2 = 36 + 2d$

$$\frac{3}{10} = \frac{\text{الاوسط الثاني}}{(n-1)}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{(36 + 2d)}{(n-1)}$$

$$(n-1) = \frac{10 \times (36 + 2d)}{3}$$

$$U_n = a + (n-1)d$$

$$3 = 36 + \frac{72 + 4d}{3} \times d$$

$$3 = \frac{36}{3} + \frac{72d + 4d^2}{3}$$

$$3 = \frac{108 + 72d + 4d^2}{3}$$

$$9 - 9 = -9 + 108 + 72d + 4d^2$$

$$0 = 99 + 72d + 4d^2$$

$$4d^2 + 72d + 99 = 0$$

$$(2d + 33)(2d + 3) = 0$$

اما $2d + 33 = 0 \rightarrow d = \frac{-33}{2}$

او $2d + 3 = 0 \rightarrow d = \frac{-3}{2}$

$$\boxed{d = \frac{-3}{2}}$$

$$(n-1) = \frac{10 \times (36 + \cancel{2} \times \frac{-3}{\cancel{2}})}{3}$$

$$(n-1) = \frac{10 \times (36 - 3)}{3}$$

$$(n-1) = \frac{10 \times (33)}{3}$$

$$(n-1) = \frac{\cancel{330}}{\cancel{3}} = 110$$

$n = 110 + 1 = 111$ حدا

3) أوجد مجموع الأعداد الصحيحة التي أكبر من (100) وأصغر من (1000) والتي تقبل القسمة على (5) بدون باق

الحل / الاعداد التي تقبل القسمة على (5) يجب ان يكون احادها أما (0) أو (5)

فالعدد الاول الذي يلي العدد (100) هو العدد $\frac{100}{5} + 1 = \frac{100}{5} + \frac{5}{5} = \frac{105}{5} =$

الحد الاول $100 + 5 = 105$

الحد الاخير $1000 - 5 = 995$

الاساس $= \boxed{5} = d$

$$U_n = a + (n-1)d$$

$$995 = 105 + (n-1) \times 5$$

$$995 = 105 + 5n - 5$$

$$995 = 100 + 5n$$

$$5n = 995 - 100$$

$$5n = 895$$

$$n = \frac{895}{5} = 179$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + U_n]$$

$$S_n = \frac{179}{2}[105 + 995]$$

$$S_n = \frac{179}{\cancel{2}}[\cancel{1100}]$$

$$S_n = 179 \times 550$$

$$S_n = 98450$$

مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين (100) و (1000) وتقبل القسمة على (5)


أكثر من 500 كتاب ومساعد مدرسي
دار الاعرجي
للطباعة والنشر والتوزيع
07713087016
almaktab1@yahoo.com

الفصل الثالث

المصفوفات والمحددات

مقدمة / نستذكر بعض المعلومات التي تهمنا في هذا الفصل
اول شيء يدور في ذهننا هو ما هو تعريف المصفوفة ؟ يجب ان نفهم معنى ما ندرسه

المصفوفة / المصفوفة عبارة عن ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية (rows) عددها (m) واعمدة رأسية (Columns) عددها (n) محصورة بين قوسين كبيرين . وتنظم الاعداد او البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى وتسمى كل قيمة في المصفوفة عنصرا يرمز للمصفوفة عادة باستعمال الحروف الكبيرة مثل A أو B وهكذا تقرأ المصفوفة A أو المصفوفة B

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ \bigcirc\!\!\!\!-1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & \bigcirc\!\!\!\!-8 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{4 اربعة اعمدة}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}\right\} \text{3 ثلاثة صفوف}$$

العنصر 1- موجود في الصف الثاني العمود الاول ويرمز اليه بالرمز a_{21}

العنصر 8- موجود في الصف الثالث العمود الثاني ويرمز اليه بالرمز a_{32}

مثال (تمهيدي)

عندنا مصنع أدوات كهربائية ينتج (غسالات ، تلفزيون ، ثلاجات) ينتج من كل نوع نوعين
ينتج من الغسالات نوعين صنف (أ) وصنف (ب)
وكذلك من التلفزيونات نوعين صنف (أ) وصنف (ب)
وكذلك من الثلاجات نوعين صنف (أ) وصنف (ب)

	تلفزيون	غسالة	ثلاجة
(أ)	50	40	37
(ب)	74	25	49

صفوف
اعمدة

مصفوفة

صف 1 ← 50 40 37

صف 2 ← 74 25 49

عمود 1 عمود 2 عمود 3

ملاحظة/ فالافقي = صف ، والراسي = عمود

والجدولة هي صفوف افقية واعمدة راسية

اهم ما في المصفوفة هي معرفة من اي رتبة ، اي من كم صف ومن كم عمود

ويجب ان نبدأ بالصفوف اولا ولا يجوز ان نبدأ بالاعمدة كما مر بنا سابقا في الاعداد (مثل الازواج المرتبة)

فلو كان نظام المصفوفة 2×3 فتقرا صفين في ثلاثة اعمدة

ولا يجوز ان نقراها $2 \times 3 = 6$ اثنين في ثلاثة يساوي 6 ، ولكن معناها صفين × في ثلاثة اعمدة

هل يجوز ان نبدل 3 بدل 2 كلا والسبب اننا قد اخذنا الاعمدة في الاول بدل الصفوف

والان نسال سؤال العدد 50 في اي صف وفي اي عمود ، والجواب يكون [الصف الاول العمود الاول a_{11}]

الصف الاول العمود الاول يكون مقداره يساوي $a_{11} = 50$

والان نسال سؤال العدد 49 في اي صف وفي اي عمود ، والجواب يكون [الصف الثاني العمود الثالث] a_{13}

الصف الثاني العمود الثالث يكون مقداره يساوي $a_{23} = 49$

المصفوفات وخواصها /

في اغلب مجالات الرياضيات والاحصاء والعلوم الاخرى يتم تبويب وتنظيم البيانات حيث ترتيب بشكل قاعدة منظمة من البيانات .

مثلا/ في الجدول الاتي اعداد تبين ترتيب اول اربعة فرق في الدوري العراقي لكرة القدم سابقا بعد مرور 10 مباريات من بدء الدوري الممتاز .

اسم الفريق	عدد الفوز	التعادل	الخسارة	النقاط
الزوراء	6	3	1	21
الجوية	5	2	3	17
الطلبة	5	1	4	16
الشرطة	4	3	3	15

نلاحظ ان العمود الاول يمثل اعداد المباريات التي فاز فيها كل فريق والصف الاول يحتوي على اعداد

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 21 \\ 5 & 2 & 3 & 17 \\ 5 & 1 & 4 & 16 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

تمثل نتائج فريق الزوراء من فوز وتعادل وخسارة وعدد النقط.

مثلا عندما نسأل عن عدد تعادلات نادي الطلبة فأن الصف الثالث يمثل نتائج نادي الطلبة والعمود الثاني يمثل عدد التعادلات فالعدد الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني هو 1 يمثل عدد تعادلات نادي الطلبة.

وبنفس الطريقة نجد عدد الفوز لنادي الشرطة والذي هو في الصف الرابع والعمود الاول والعدد هو.4

وهذا التنظيم العددي للبيانات وبهذا الشكل يسمى المصفوفة.

تعريف المصفوفة /

عبارة عن ترتيب للاعداد على شكل مستطيل مرتبة بشكل صفوف (rows) عددها (m) واعمدة (Columns) عددها (n) حيث (m , n) اعداد صحيحة موجبة.

يرمز للمصفوفة بالحرف A أو B وهكذا تقرأ المصفوفة A أو المصفوفة B

رتبة المصفوفة /

لكل مصفوفة رتبة تتمثل بعدد الصفوف أولا ثم عدد الاعمدة ثانيا وتكتب $m \times n$ حيث عدد الصفوف , m عدد الأعمدة n

مثلا / رتبتها 2×3
$$A = \begin{bmatrix} 40 & 31 & 45 \\ 30 & 41 & 36 \end{bmatrix}$$

رتبتها 1×3
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

رتبتها 2×1
$$C = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

الاعداد الموجودة في المصفوفة تدعى **بعناصر المصفوفة**

مثال (تمهيدي)

استعمل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 40 & 31 & 45 \\ 30 & 41 & 36 \end{bmatrix}$ للاجابة عن كل مما يأتي :

ⓐ حدد رتبة المصفوفة ⓑ ما قيمة العنصر a_{21}

الحل / ⓐ رتبة المصفوفة تساوي 2×3

نلاحظ ان / ① ان المصفوفة مكونة من صفين

② ان المصفوفة مكونة من ثلاثة اعمدة

③ أي ان المصفوفة قد تكونت من صفين وثلاثة اعمدة ونكتبها بالشكل 2×3

$$A = \begin{array}{ccc} 40 & 31 & 45 \\ 30 & 41 & 36 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{عمود} & \text{عمود} & \text{عمود} \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cccc} 40 & 31 & 45 & \leftarrow \text{صف 1} \\ 30 & 41 & 36 & \leftarrow \text{صف 2} \end{array}$$

الحل / ⓑ قيمة العنصر a_{21}

$a_{21} = 30$

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 31 & 45 \\ 30 & 41 & 36 \end{bmatrix}$$
$$\uparrow$$
$$a_{21} = 30$$

تساوي مصفوفتين / يقال للمصفوفتين انهما متساويتين اذا وفقط اذا تحقق الشرطان:

1– المصفوفتان لهما نفس الرتبة.

2– عناصر المصفوفة الاولى تساوي نظائرها من عناصر المصفوفة الثانية.

مثلا / رتبتها 2 × 2 $A = \begin{bmatrix} 0.1 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 0.75 \end{bmatrix}$ ، رتبتها 2 × 2 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -0.5 \\ -4 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

نلاحظ ان / ① ان المصفوفتين A , B لهما نفس الرتبة 2 × 2

② ان كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره في المصفوفة B

$$\boxed{\therefore A = B}$$

مثال 1/ (كتاب)

بين هل ان المصفوفتين $B = \begin{bmatrix} 6 & \frac{\sin x}{6} \\ \frac{\cos \pi}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.25 \end{bmatrix}$ متساويتان ؟

الحل / **نلاحظ ان** / ① ان المصفوفتين A , B لهما نفس الرتبة 2 × 2

② ان كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره في المصفوفة B

$$a_{11} = b_{11} = 6 \qquad a_{12} = b_{12} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$a_{21} = b_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \qquad a_{22} = b_{22} = \frac{1}{4}$$

اذن المصفوفتان متساويتان $\therefore A = B$

مثال 2/ (كتاب) هل ان المصفوفتين متساويتان في كل مما ياتي ؟

$$ⓐ\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 0.8 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ \frac{4}{5} & \frac{10}{2} \end{bmatrix}$$

الحل / بما ان العنصر في الصف الاول في المصفوفة A هو = 2

اما العنصر في الصف الاول في المصفوفة B هو = 1

اذن $A \neq B$ لان $a_n \neq b_n$

ⓑ $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

الحل / بما ان رتبة المصفوفة A هي 2×2
ورتبة المصفوفة B هي 3×1
اذن المصفوفة A $\neq$ المصفوفة B

مثال 3 / (كتاب)

جد قيم y , X حيث $X, y \in R$ في كل مما ياتي :

① $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ y + 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x - 1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$

الحل / بما ان المصفوفتان متساويتان اذن العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساويتين ①

$\therefore 2x - 1 = 7$
$2x - \cancel{1} + \cancel{1} = 7 + 1$
$2x = 8 \rightarrow x = 4$

كذلك $y + 8 = 12$
$y + \cancel{8} - \cancel{8} = 12 - 8$
$y = 4$

---

② $\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 5y - 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$

الحل / بما ان المصفوفتان متساويتان اذن العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساويتين ②

$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
$5y - 1 = 4x$ كذلك

$5y - \cancel{1} + \cancel{1} = 1 + 4x \rightarrow 5y = 1 + \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$5y = 1 + 2 \rightarrow 5y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{5}$

---

③ $\begin{bmatrix} x + 1 & -4 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - 2 & -4 \\ 0 & y - 1 \end{bmatrix}$

الحل / بما ان المصفوفتان متساويتان

$\therefore x + 1 = y - 2$
$x - y = -3$ ------ (1)

وكذلك

$3x = y - 1$
$3x - y = -1$ ------ (2)

$$x \quad - \cancel{y} = -3$$
$$\mp 3x \mp \cancel{y} = \mp 1$$

بالطرح ---------------------------------

$$-2x = -2$$
$$x = \frac{-2}{-2} = 1$$

نعوض في المعادلة (1) عن x

$$1 - y = -3 \rightarrow -\cancel{1} + \cancel{1} - y = -1 - 3$$
$$-y = -4 \rightarrow y = 4$$

أنوا‌ع المصفوفات / فيما يلي بعض انواع المصفوفات

1- المصفوفة المربعة Square Matrix /

هي مصفوفة تكون فيها عدد الصفوف m مساوي لعدد الاعمدة n . أي انه $m = n$

وتكون رتبة المصفوفة بالشكل $m \times m$ أو $n \times n$ مثلا :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \overset{m \quad n}{2 \times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 8 & 9 & 11 \end{bmatrix} \overset{m \quad n}{3 \times 3}$$

مصفوفة مربعة

مصفوفة مربعة

2- مصفوفة الصف Row Matrix /

وهي مصفوفة تتكون من صف واحد فقط . أي m = 1 مثلا /

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{m \quad n}{1 \times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \overset{m \quad n}{1 \times 4}$$

مصفوفة صف واحد

مصفوفة صف واحد

3- مصفوفة العمود Column Matrix /

وهي مصفوفة تتكون من عمود واحد فقط . أي m = 1 مثلا /

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \overset{m \quad n}{3 \times 1} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \overset{m \quad n}{2 \times 1}$$

مصفوفة عمود واحد

مصفوفة عمود واحد

4- المصفوفة الصفرية Zero Matrix /

وهي مصفوفة جميع عناصرها مساوية للصفر . **مثلا /**

$$A = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{m\ \ n}{2\times 3}\ ,B = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\overset{m\ \ n}{2\times 2}\ ,\ C = \begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}\overset{m\ \ n}{2\times 2}$$

5- مصفوفة الوحدة Unit Matrix /

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها صفرا ماعدا عناصر قطرها الرئيسي يساوي = 1. **مثلا /**

$$A = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\overset{m\ \ n}{3\times 3}\quad B = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\overset{m\ \ n}{2\times 2}\quad C = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\ 1\times 1$$

جمع المصفوفات Addition of Matrix

لاحظ المثال الاتي : لدينا ثلاث طلاب متفوقين اشتركوا في اختبارات الاسئلة الذكاء وهي اسئلة علمية واسئلة رياضية واسئلة ثقافية وكانت درجاتهم في الاختبارات كالاتي :

$$\overset{\text{اسئلة رياضية}}{\begin{bmatrix}\text{الطالب الاول}&8\\\text{الطالب الثاني}&9\\\text{الطالب الثالث}&7\end{bmatrix}}\quad \overset{\text{اسئلة ثقافية}}{\begin{bmatrix}\text{الطالب الاول}&6\\\text{الطالب الثاني}&7\\\text{الطالب الثالث}&9\end{bmatrix}}\quad \overset{\text{اسئلة علمية}}{\begin{bmatrix}\text{الطالب الاول}&7\\\text{الطالب الثاني}&9\\\text{الطالب الثالث}&8\end{bmatrix}}$$

لمعرفة أي من الطلاب الثلاث فاز بالاختبارات وحصل على اعلى الدرجات . نجمع الدرجات كالاتي :

$$\begin{bmatrix}21\\25\\24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8+6+7\\9+7+9\\7+9+8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\9\\7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\7\\9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\9\\8\end{bmatrix}$$

نلاحظ ان الطالب الثاني حصل على اعلى الدرجات وهي **25** ويعتبر الفائز ، لذلك عندما يراد جمع مصفوفتين يقتضي ان تكون لهما نفس الرتبة ثم نجمع كل عنصر في المصفوفة الاولى مع نظيره من المصفوفة الثانية .

تعريف (3 – 3)

اذا كانت $A = \left[a_{ij}\right]$ ، $B = \left[b_{ij}\right]$ مصفوفتين لهما نفس الرتبة $m\times n$

فان $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$

مثال 4 / (كتاب) جد ناتج ما يلي

$$① \underset{\substack{m\ \ n\\2\times2}}{\begin{bmatrix}3&-1\\5&4\end{bmatrix}}+\underset{\substack{m\ \ n\\2\times2}}{\begin{bmatrix}1&8\\2&-2\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}3+1&-1+8\\5+2&4+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7\\7&2\end{bmatrix}$$

ملاحظة/ يمكن جمع المصفوفتان لانهما متناظرتين .

مثال / (مهم) أوجد ناتج الجمع للمصفوفتين التاليتين

$$\underset{\substack{m\ \ n\\2\times3}}{\begin{bmatrix}3&2&1\\5&0&3\end{bmatrix}}+\underset{\substack{m\ \ n\\3\times2}}{\begin{bmatrix}1&5\\4&8\\0&5\end{bmatrix}}$$

ملاحظة/ لا يمكن جمع المصفوفتان لانهما غير متناظرتين .

اي ان المصفوفة الاولى من الرتبة $\overset{m\ \ n}{2\times3}$ والمصفوفة الثانية من الرتبة $\overset{m\ \ n}{3\times2}$
لا يمكن الجمع لان ابعاد المصفوفتين غير متساويتين

المصــفوفة الاولى $\begin{array}{ccc} m & & n \\ \boxed{2} & \times & \boxed{3} \end{array}$

$\neq \qquad\qquad \neq$

المصــفوفة الثانيــة $\begin{array}{ccc} m & & n \\ \boxed{3} & \times & \boxed{2} \end{array}$

والآن السؤال المهم متى يمكن جمع مصفوفتين ؟

① اذا كان لهما نفس الرتبة

مثال / أوجد ناتج الجمع إن أمكن $\begin{bmatrix}0&2&8\\4&2&-1\end{bmatrix}+7$

② لا يمكن جمع مصفوفة مع عدد حقيقي

مثال / أوجد ناتج ما يلي إن أمكن $\begin{bmatrix}5&1\\-3&2\end{bmatrix}\ominus\begin{bmatrix}-4&2\\5&1\end{bmatrix}$

يمكن طرح المصفوفتين لان عملية الطرح هي عكس عملية الجمع في المصفوفات فيكون الناتج

$$\begin{bmatrix}5&1\\-3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4&2\\5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-(-4)&1-2\\-3-5&2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-1\\-8&1\end{bmatrix}$$

$$② \begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\\0.5&0.3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&\frac{3}{2}\\0.4&0.01\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}+\frac{7}{3}&\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\\0.5+0.4&0.3+0.01\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}&2\\0.9&0.31\end{bmatrix}$$

③ $$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+2)\sqrt{2} & -3-1 \\ 8+5 & (1+4)\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & -4 \\ 13 & 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

مثال 5 / (كتاب) اذا علمت ان

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ 5 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

جد قيمتي y , x حيث $x , y \in R$

الحل /

$$\begin{bmatrix} 3+4 & x+2 \\ 5-1 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$y + 3 = 2$ وكذلك $x + 2 = 6$

$y + \cancel{3} - \cancel{3} = 2 - 3$ وكذلك $x + \cancel{2} - \cancel{2} = 6 - 2$

$y = -1$ وكذلك $x = 4$

مثال 6 / (كتاب) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

جد كل من: ① $A + B$ ② $A + C$ ③ $B + C$

الحل /

$$① A + B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 & 5-2 \\ 2+4 & -1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$② A + C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0 & 5+8 \\ 2+4 & -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$③ B + C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+8 \\ 4+4 & 7+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع /

اذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ فان $-A = \begin{bmatrix} -a_{ij} \end{bmatrix}$ تسمى بالنظير الجمعي للمصفوفة A

مثلا/ اذا كانت المصفوفة $A_{2\times2}$ فان $-A_{2\times2}$ تسمى نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية الجمع

حيث $A+(-A)=(-A)+A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

أي انه اذا كان ناتج جمع مصفوفتين هو مصفوفة صفرية فيقال ان أحدى المصفوفتين هي نظير المصفوفة الأخرى بالنسبة لعملية الجمع وتسمى **المصفوفة الصفرية بالمصفوفة المحايدة** في عملية الجمع .

مثال 7 / (كتاب) ما هو النظير الجمعي للمصفوفات الاتية ؟

① $A=\begin{bmatrix}-0.8&2\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$ ② $B=\begin{bmatrix}-2&5&1\\3&-4&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

الحل / بما ان $A=\begin{bmatrix}-0.8&2\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$ اذن نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية الجمع هي المصفوفة $-A$

$-A=\begin{bmatrix}0.8&-2\\-\sqrt{3}&-1\end{bmatrix}$ لان $A+(-A)=(-A)+A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

② $B=\begin{bmatrix}-2&5&1\\3&-4&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

الحل / بما ان $B=\begin{bmatrix}-2&5&1\\3&-4&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ فان نظيرها الجمعي $-B=\begin{bmatrix}2&-5&-1\\-3&4&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

لان $A+(-A)=(-A)+A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

ملاحظة / ① عند ايجاد النظير الجمعي لاي مصفوفة تغير اشارة كل عنصر في المصفوفة.
أي انه ناخذ النظير الجمعي لكل عنصر في المصفوفة

② اذا كانت A , B مصفوفتان لهما نفس الرتبة فان $A-B=A+(-B)$

خواص عملية الجمع على المصفوفات /

① عند جمع مصفوفتين لهما نفس الرتبة $m \times n$ فالناتج هو مصفوفة لها نفس الرتبة $m \times n$
أي انه ناخذ النظير الجمعي لكل عنصر في المصفوفة

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 9 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

② عملية جمع مصفوفتين تتمتع بخاصية الابدال (Commutative) اذا كان A , B مصفوفتان لهما نفس الرتبة $m \times n$ فان $A + B = B + A$ لانه :
وتتمتع بخواص جمع الاعداد الحقيقية

$$\therefore A + B = B + A = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}]$$

مثال 8 / (كتاب)

ليكن : $B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

نلاحظ

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+(-4) & 2+7 \\ 1+5 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$B + A = \begin{bmatrix} -4+3 & 7+2 \\ 5+1 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

أي ان $A + B = B + A$

③ عملية جمع المصفوفات تتمتع بخاصية التجميع (Associative) اذا كان A , B , C مصفوفات لهما نفس الرتبة $m \times n$ فان $(A+B)+C = A+(B+C)$

مثال 9 / (كتاب)

ليكن : $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

جد ① $(A+B)+C$ ② $A+(B+C)$

الحل /

$$① \quad (A+B)+C=\begin{bmatrix}-4+0 & 2+(-2)\\ 5+3 & 1+7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 8 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+(-4) & 0+1\\ 8+(-3) & 8+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 1\\ 5 & 16\end{bmatrix}$$

$$② \quad A+(B+C)=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0+(-4) & -2+1\\ 3+(-3) & 7+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 0 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+(-4) & 2+(-1)\\ 5+0 & 1+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 1\\ 5 & 16\end{bmatrix}$$

نلاحظ من ① و ② أن: $(A+B)+C=A+(B+C)$

---

④ وجود المصفوفة المحايدة في عملية الجمع وهي المصفوفة الصفرية :

لتكن A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ توجد مصفوفة صفرية من الرتبة $m\times n$ فان

A = A + المصفوفة الصفرية $m\times n$ = المصفوفة الصفرية $m\times n$ + A

مثلا / لتكن: $A=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ ونلاحظ ان المصفوفة $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ محايدة

$$\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5}+0 & 4+0\\ 6+0 & -2+0\\ 5+0 & 1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

وكذلك

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

④ وجود النظير الجمعي للمصفوفة

اذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m \times n$ توجد مصفوفة $-A$ من الرتبة $m \times n$ تسمى بالنظير الجمعي للمصفوفة A حيث $A + (-A) = (-A) + A = 0$ مصفوفة صفرية من الرتبة $m \times n$

مثال / (اثرائي) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

جد كل من : ① $-A$ ② $A+(-A)$ ③ $(-A)+A$

الحل / ① بما ان $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore -A = \begin{bmatrix} -(-3) & -5 \\ -2 & -(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

② $$A + (-A) = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+3 & 5-5 \\ 2-2 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

③ $$(-A) + A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & -5+5 \\ -2+2 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نستنتج ان $A + (-A) = (-A) + A = 0$

مثال / (اثرائي) حل المعادلة التالية ؟ $X - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

الحل / اذا نظرنا الى هذه المعادلة . فباضافة هذه المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ الى الطرفين

$$X - \cancel{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} + \cancel{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 5+0 \\ 6+1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل بطريقة اخرى / من هذه المعادلة نجد ان المصفوفتين $\begin{bmatrix}4&5\\6&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}$ من الرتبة 2×2

لذا يمكن كتابة المصفوفة X بمصفوفة من الرتبة 2×2

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5\\6&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5\\6&1\end{bmatrix}$$

لذا بالنسبة لطرح العناصر المتناظرة يكون

$$\begin{array}{ll} a-3=4 & b-0=5 \\ a=4+3 & b=5+0 \\ \boxed{a=7} & \boxed{b=5} \\ c-1=6 & d-2=1 \\ c=6+1 & d=1+2 \\ \boxed{c=7} & \boxed{d=3} \end{array}$$

اذن المصفوفة X من الرتبة 2×2 تساوي $X=\begin{bmatrix}7&5\\7&3\end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

يجب التمييز بين عملية الضرب على الاعداد وبين عملية الضرب على المصفوفات

فتعلمنا سابقا في الأعداد . فعند ضرب عدد × عدد = عدد . مثل $20 = 4 \times 5$

والان اذا ضربنا العدد 5 في مصفوفة $\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}$ ماذا ينتج ؟ **الناتج طبعا سيكون**

ضرب العدد 5 في كل عنصر من عناصر المصفوفة. $5\times\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times1=5\\5\times3=15\\5\times-1=-5\end{bmatrix}$

اذن الناتج هو $5\times\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\15\\-5\end{bmatrix}$

والان اذا ضربنا العدد 4 في مصفوفة $\begin{bmatrix}1&4\\0&7\\-1&2\end{bmatrix}\times 4$ ماذا ينتج ؟ **الناتج طبعا سيكون**

ضرب العدد 4 في كل عنصر من عناصر المصفوفة.

$$4 \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times1 & 4\times4 \\ 4\times0 & 4\times7 \\ 4\times-1 & 4\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 28 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

اذن الناتج هو .

$$4 \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 28 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

والان لو جمعنا $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \times 5$ مع (+) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times 4$ ماذا ينتج ؟ **الناتج طبعا سيكون**

$$5 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ -5 \end{bmatrix} \boxed{+} \quad 4 \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 28 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

اذن الناتج هو

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 28 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+4 & 0+16 \\ 15+0 & 0+28 \\ (-5)+(-4) & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 15 & 28 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$$

تعريف (3 – 3)

اذا كانت $A = \left[a_{ij}\right]$ ، مصفوفة من الرتبة $m \times n$ و $k \in R$ فان $k \cdot A = \left[k \cdot a_{ij}\right]$

مثال 10 / **(كتاب)** جد ناتج : $3 \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix}$

الحل /

$$3 \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times (-2) & 3 \times 7 \\ \cancel{3} \times \frac{1}{\cancel{3}} & 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 21 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال 11 / (كتاب) اذا كان: $L = -2 , k = \sqrt{2}$, $A = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

جد كل من: ① $K . A$ ② $L . A$ ③ $KL . A$

الحل /

① $$K . A = \sqrt{2} \times \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} & 5 \times \sqrt{2} \\ 1 \times \sqrt{2} & \sqrt{2} \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

② $$L . A = -2 \times \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \times 3\sqrt{2} & -2 \times 5 \\ -2 \times 1 & -2 \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{2} & -10 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

③ $$KL . A = \sqrt{2} \times (-2) \times \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \times -2\sqrt{2} & 5 \times -2\sqrt{2} \\ 1 \times -2\sqrt{2} & \sqrt{2} \times -2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -10\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{bmatrix}$$

بعض الخواص لعملية ضرب عدد في مصفوفة /

تعلمنا سابقا في التعريف (3 – 3) اذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ و $k\in R$

فان $k\cdot A=\left[k\cdot a_{ij}\right]$ أي ضرب عدد ثابت في مصفوفة.

يعني ان ضرب العدد في كل عنصر من عناصر المصفوفة

والان نناقش ضرب مصفوفة × مصفوفة (غير مطلوبة في المنهج)

اذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ و B مصفوفة من الرتبة $m\times n$ ، $\forall k,L\in R$

ملاحظة مهمة / يجب ان تكون المصفوفتان A , B من نفس الرتبة $m\times n$

يعني ان m في المصفوفة الاولى = تساوي m في المصفوفة الثانية

وكذلك n في المصفوفة الاولى = تساوي n في المصفوفة الثانية

أو القاعدة في ضرب المصفوفات ذي الرتبة $m\times n$

$$(2\times3)\times(3\times1)=(2\times1)$$

$$2\times\boxed{3\times3}\times1=2\times1$$

$$(\overset{\boxed{2}}{m}\times\overset{3}{n})\times(\overset{3}{m}\times\overset{\boxed{1}}{n})=(\overset{\boxed{2}}{m}\times\overset{\boxed{1}}{n})$$

والان نعود الى موضوعنا ضرب عدد في مصفوفة

فحاصل ضرب عدد ثابت مثل $\forall k,L\in R$ يساوي $k\,[A+B]=kA+kB$

أي ان ① $k\,[A+B]=kA+kB$

مثال / (اثرائي) ليكن: $B=\begin{bmatrix}0&-2\\3&7\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}-4&2\\5&1\end{bmatrix}$, $k=1, L=2$

اثبت ان $k\,[A+B]=kA+kB$

الحل /

$$k\,[A+B]=1\times\begin{bmatrix}-4&2\\5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-2\\3&7\end{bmatrix}$$

$$=1\times\begin{bmatrix}-4+0&2-2\\5+3&1+7\end{bmatrix}=1\times\begin{bmatrix}-4&0\\8&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\times1&0\times1\\8\times1&8\times1\end{bmatrix}$$

$$\therefore k\,[A+B]=\begin{bmatrix}-4&0\\8&8\end{bmatrix}$$

$$kA + kB = 1\times\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix} + 1\times\begin{bmatrix}0 & -2\\ 3 & 7\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-4\times1 & 2\times1\\ 5\times1 & 1\times1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\times1 & -2\times1\\ 3\times1 & 7\times1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -2\\ 3 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4+0 & 2+(-2)\\ 5+3 & 1+7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 8 & 8\end{bmatrix}$$

$$\therefore kA + kB = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 8 & 8\end{bmatrix}$$

اذن تتحقق العلاقة $k\,[A+B] = kA + kB$

---

② $(kL)A = k(LA)$

③ $(k+L)A = kA + LA$

④ $kA = kB \quad k \neq 0$ فان $A = B$

⑤ $1\cdot A = A$

⑥ $kA =$ مصفوفة صفرية فان $k = 0$ أو $A =$ مصفوفة صفرية

⑦ $-1\cdot A = -A$

مثال 12 / **(كتاب)** جد المصفوفة A اذا علمت ان

$$-5\times\left[A - \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right] = -6\times A + \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$-5A + 5\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = -6A + \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$-5A + \begin{bmatrix}5 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix} = -6A + \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$-5A + 6A + \begin{bmatrix}5 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix} = \cancel{-6A} + \cancel{6A} + \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$-5A+\begin{bmatrix}5 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix} = -6A+\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$A+\cancel{\begin{bmatrix}5 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 5\\ -5 & 0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -5\\ 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+(-5) & 1+(-5)\\ -1+5 & 5+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

تمارين (1 - 3)

س 1) جد قيمتي y , x حيث $x , y \in R$ في كل مما ياتي :

① $$\begin{bmatrix}3x+y & 0.2\\ 3\sqrt{2} & x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & \frac{1}{5}\\ 3\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

الحل / بما ن المصفوفتان متساويتان
اذن العناصر المتناظرة فيهما متساويتان

$$3x + y = 8 \text{ ----------- } (1)$$
$$x - y = 0 \text{ ----------- } (2)$$

$$\left.\begin{aligned}3x + y &= 8\\ \mp x \pm y &= \mp 0\end{aligned}\right\} \text{بالجمع}$$

$$2x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

نعوض في معادلة (1)

$$(3 \times 2) + y = 8$$

$$y = 8 - 6 \rightarrow \boxed{y = 2} \in R$$

② $\begin{bmatrix} \sin x & 3 \\ -2 & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 3 \\ -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

الحل / بما ان المصفوفتان متساويتان اذن العناصر المتناظرة فيهما متساويتين

$\sin x = 0.5 = \frac{1}{2} \rightarrow \therefore x = 30°$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \therefore x = 45°$

---

③ $\begin{bmatrix} x^2 & 6 \\ y^2 - 2y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$

الحل / بما ان المصفوفتان متساويتان اذن العناصر المتناظرة فيهما متساويتين

$x^2 = 9 \rightarrow x = \mp 3$ باخذ جذري الطرفين

$y^2 - 2y = 15 \rightarrow y^2 - 2y - 15 = 0$

$(y-5)(y+3) = 0$

أما $(y-5) = 0 \rightarrow \boxed{y = 5}$

أو $(y+3) = 0 \rightarrow \boxed{y = -3}$

$\therefore x = \{3, -3\}$

س 2) جد ناتج ما يلي :

① $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -11 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3+(-2) & 1+4 & 0+6 \\ 5+(-11) & (-2)+2 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

---

② $4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times 4 & -\frac{1}{4}\times 4 \\ 2\times 4 & -1\times 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\times 3 & 1\times 3 \\ 0\times 3 & 3\times 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-6) & -1+3 \\ 8+0 & -4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

③ $$\begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & \frac{1}{4} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & \frac{1}{8} \\ \sqrt{2} & -3\sqrt{3} \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) & \frac{1}{4} \\ \sqrt{2} + \sqrt{2} & -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ 2 + 3 & 5 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & -\frac{1}{8} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

④ $$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1.6 \end{bmatrix} + 2\times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6 \\ -2 \\ 5.4 \end{bmatrix}$$

س 3) جد المصفوفة x في كل مما ياتي :

① $$2x + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2x + \cancel{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2x = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + (-5) & 7 + 2 \\ -5 + (-4) & 3 + (-1) \end{bmatrix}$$

$$2x = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{-9}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

② $$x - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \\ -10 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \cancel{\begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \\ -10 & 4 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \\ -10 & 4 & -5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \\ -10 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$x = - \begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \\ -10 & 4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -1 & -6 & -1 \\ 10 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

س 4) اذا كانت $A = 1 \quad -2 \quad 5 \quad , B = -4 \quad 3 \quad -2 \quad , C = 0 \quad -7 \quad 2$

جد المصفوفات الاتية

① $2A + 3B + C$

الحل /

$$2A = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$3B = 3 \times \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 9 & -6 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B + C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 9 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B + C = \begin{bmatrix} -10 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

② $A - B + 5C$

الحل /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} , -B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5C = 5 \times \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 35 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A - B + 5C = \begin{bmatrix} 1+4+0 & -2+(-3)+35 & 5+2+10 \end{bmatrix}$$

$$A - B + 5C = \begin{bmatrix} 5 & 30 & 17 \end{bmatrix}$$

③ $3A + B + C$

الحل /

$$3A = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \end{bmatrix} , C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3A + B + C = \begin{bmatrix} 3+(-4)+0 & -6+3+7 & 15+(-2)+2 \end{bmatrix}$$

$$3A + B + C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

④ $-A + 2B - C$

الحل /

$$-A = -\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2B = 2 \times \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-C = -\begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$-A + 2B - C = \begin{bmatrix} (-1)+(-8)+(-0) & 2+6+(-7) & (-5)+(-4)+(-2) \end{bmatrix}$$

$$-A + 2B - C = \begin{bmatrix} -9 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

المحددات وخواصها /

محددة المصفوفة / هو عدد حقيقي يستخرج من المصفوفة المربعة

اذا كانت المصفوفة $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ فان ← $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ هي محددة المصفوفة

ويرمز لها بالرمز Δ وان عدد حقيقي $= ad - cb = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta$

القطر الرئيسي

مثال 13 / (كتاب) جد قيمة كل مما ياتي :

① $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

القطر الاول القطر الثاني

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - (1 \times (-2)) = 12 + 2 = 14$$

② $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 2 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = (\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}) - ((-3) \times (2)) = 6 + 6 = 12$

نطرح ناتج ضرب القطر الثاني من ناتج ضرب القطر الاول لايجاد قيمة المحدد

③ $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = (\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}) - (3 \times 1) = \frac{3}{8} - \frac{3}{1} = \frac{-21}{8}$

④ $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = (3 \times 10) - (5 \times 6) = 30 - 30 = 0$

ملاحظات / اذا كان محدد المصفوفة يساوي صفرا فتسمى المصفوفة بالمصفوفة المنفردة

مثال 14 / (كتاب) جد قيمة h في كل مما ياتي :

① $\begin{vmatrix} 2h+3 & -1 \\ 2 & h \end{vmatrix} = 1$

$(2h + 3) \times h - (-1 \times (2)) = 1 \rightarrow 2h^2 + 3h + 2 - 1 = 1 - 1$

$2h^2 + 3h + 1 = 0 \rightarrow (2h + 1)(h + 1) = 0$

اما $(2h + 1) = 0 \rightarrow 2h + 1 - 1 = 0 - 1 \rightarrow 2h = -1 \rightarrow h = -\frac{1}{2}$

أو $(h + 1) = 0 \rightarrow h + 1 - 1 = 0 - 1 \rightarrow h = -1$

② $\begin{vmatrix} 3h & -2 \\ 3 & h \end{vmatrix} = 9$

$3h \times h - (3 \times (-2)) = 9$

$3h^2 + \cancel{6} - \cancel{6} = 9 - 6$

$3h^2 = 3 \rightarrow h^2 = \frac{3}{3} = 1 \rightarrow h = \mp 1$

حل المعادلات الانية /

حيث تستخدم المحددات في حل معادلتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين

مثال 15 / (كتاب) جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين بطريقة المحددات (كرامر)

$5x - 2y - 11 = 0 \quad , \quad 2x + 3y = 12$

ملاحظة مهمة / قبل ان نقوم بحل المعادلتين يجب ان نرتب المعادلات بحيث يكون حدود المتغيرين x, y في الطرف اليسر من المعادلة. ويكون الحد الذي يشبهه في المتغير يعني المتغير x في المعادلة الاولى وكذلك بالنسبة للمتغير y . اما الحد الخالي من المتغير ((الحد المطلق)) فانه يصبح في الطرف الايمن من كل معادلة.

نقوم بترتيب المعادلتين اعلاه :

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 \\ 5x & - & 2y & = & 11 \\ 2x & + & 3y & = & 12 \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \end{array}$$

نجد اولاً Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (5 \times 3) - (-2 \times 2) = 15 + 4 = 19$$

نجد Δx

$$\Delta x = \begin{vmatrix} C_1 & b_1 \\ C_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = (11 \times 3) - (-2 \times 12) = 33 + 24 = 57$$

نجد Δy

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & C_1 \\ a_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = (5 \times 12) - (11 \times 2) = 60 + 22 = 38$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{57}{19} = 3 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2$$

$$\therefore S = \{ (3 , 2) \}$$

مثال 16 / (كتاب) جد قيمتي x , y التي تحقق حل المعادلتين الآنيتين :

$$3x + 5y = -1 \quad , \quad x + 2y = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3 \times 2) - (5 \times 1) = 6 - 5 = 1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} C_1 & b_1 \\ C_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1 \times 2) - (5 \times 0) = -2 - 0 = -2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & C_1 \\ a_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (3 \times 0) - (-1 \times 1) = 0 + 1 = 1$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore S = \{ (-2 , 1) \}$$

مثال 17 / (كتاب) حل المعادلتين الانيتين أنيا : $5x - 2y - 3 = 0$, $y - 3 = x$

الحل / نرتب المعادلتين اولا $5x - 2y = 3$

$$x - y = -3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (5 \times -1) - (-2 \times 1) = -5 + 2 = -3$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} C_1 & b_1 \\ C_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = (3 \times -1) - (-2 \times -3) = -3 - 6 = -9$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & C_1 \\ a_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (5 \times -3) - (3 \times 1) = -15 - 3 = -18$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-18}{-3} = 6$$

$$\therefore S = \{ (3 , 6) \}$$

مثال 18 / (كتاب) حل المعادلتين آنيا بطريقة (كرامر) :

$$2x + 5y = 12 \quad , \quad 4x + 3y = 10$$

الحل / نلاحظ ان المعادلتين مرتبتين

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 \\ 2\,x & + & 5\,y & = & 12 \\ 4\,x & + & 3\,y & = & 10 \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (3\times3)-(5\times4) = 6 - 20 = -14$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} C_1 & b_1 \\ C_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = (12\times3)-(5\times10) = 36-50 = -14$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & C_1 \\ a_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = (2\times10)-(12\times4) = 20 - 48 = -28$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$\therefore S = \{(1\,,2)\}$$

محددات المصفوفة المربعة 3x3/

يمكن ايضا ايجاد محدد المصفوفة المربعة 3x3 وبالشكل :

لتكن المصفوفة ←
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{|ccc|} (+) & (-) & (+) \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

أولا / حيث نضرب (a_1) × المحددة الناتجة من حذف القيم الموجودة في نفس الصف لـ (a_1)

وكذلك حذف القيم الموجودة في نفس العمود لـ (a_1)

تسمى هذه الطريقة بـ (طريقة T) علما بان (a_1) تحمل الاشارة الموجبة (+)

$$\begin{array}{|ccc|} (+) & (-) & (+) \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

ثانيا/ نضرب (b_1) × المحددة الناتجة من حذف القيم الموجودة في نفس الصف لـ (b_1)

وكذلك حذف القيم الموجودة في نفس العمود لـ (b_1)

علما ان (b_1) تحمل الاشارة السالبة (−)

ثالثا / نضرب (c_1) × المحددة الناتجة من حذف القيم الموجودة
في نفس الصف لـ (c_1)
و حذف القيم الموجودة في نفس العمود لـ (c_1)
علما ان (c_1) تحمل الاشارة السالبة (+)
فتصبح المحددة للمصفوفة المربعة 3x3

$$\begin{array}{ccc} (+) & (-) & (+) \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال 19 / (كتاب) جد قيمة $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = +(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,[\,(1\times 0) - (2\times -3)]\; -5\,[(3\times 0) - (2\times 4)] + 4\,[(3\times -3) - (1\times 4)]$$
$$= -2\,[\,0 + 6\,] - 5\,[\,0 - 8\,] + 4\,[\,-9 - 4\,]$$
$$= (-2\times 6) - (5\times -8) + (4\times -13)$$
$$= -12 + 40 - 52$$
$$= -24$$

الطريقة الثانية لحل محدد المصفوفة المربعة 3x3 / طريقة الاسهم القطرية

الخطوة الاولى / تتلخص هذه الطريقة بتكرار العمود الاول والثاني بجانب المحددة الايمن . ثم نقوم بعدها بضرب القيم طرديا من النقطة العليا الاولى للمحددة (a_1) قطريا حيث يصبح $(a_1 \times b_2 \times c_3)$ وناتج الضرب هذا يجمع مع حاصل ضرب القطر الثاني المتمثل بـ $(b_1 \times c_2 \times a_3)$ وكذلك يجمع ناتج الضرب هذا مع حاصل ضرب القطر الثالث $(c_1 \times a_2 \times b_3)$ مجموع حاصل ضرب الاقطار الثلاث هذه نرمز له بالرمز (H_1)

الخطوة الثانية / هو ايجاد مجموع الاقطار المعاكسة للاقطار الاولى حيث يبدأ القطر الاول للجهة المعاكسة من اعلى نقطة في آخر عمود مضاف وهو العمود المضاف الثاني (b_1) ويكون اتجاه الاقطار يسار المحددة مجموع هذه الاقطار المعاكسة يرمز له بالرمز (H_2)

الخطوة الثالثة / هي عملية طرح (H_2) من (H_1) لايجاد قيمة المحددة للمصفوفة المربعة 3x3 بطريقة الاسهم كما موضح ادناه

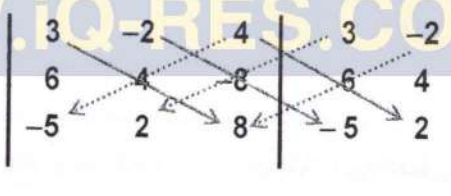
$$H_1 = \overset{\text{القطر الاول}}{(a_1 \times b_2 \times c_3)} + \overset{\text{القطر الثاني}}{(b_1 \times c_2 \times a_3)} + \overset{\text{القطر الثالث}}{(c_1 \times a_2 \times b_3)}$$

$$H_2 = \overset{\text{القطر الاول المعاكس}}{(a_1 \times b_2 \times c_3)} + \overset{\text{القطر الثاني المعاكس}}{(b_1 \times c_2 \times a_3)} + \overset{\text{القطر الثالث المعاكس}}{(c_1 \times a_2 \times b_3)}$$

$H_1 - H_2 =$ ناتج المحدد

مثال 20 / (كتاب) جد قيمة $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

الحل /



$$H_1 = [\,(3 \times 4 \times 8) + (-2 \times -8 \times -5) + (4 \times 6 \times 2)] = 96 - 80 + 48 = 64$$

$$H_2 = [\,(-2 \times 6 \times 8) + (3 \times -8 \times 2) + (4 \times 4 \times -5)] = -96 - 48 - 80 = -224$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = 64 - (-224) = 288$$

وبامكان الطالب ان يقوم بحل هذا المثال بالطريقة السابقة طريقة الحرف (T)

مثال 21 / (كتاب) جد قيمة محددة المصفوفة 3x3 بطريقة الاسهم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل /

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

$$H_1 = [\,(1\times-3\times5) + (2\times0\times3) + (3\times-2\times2)] = -15 + 0 - 12 = -27$$

$$H_2 = [\,(2\times-2\times5) + (1\times0\times2) + (3\times-3\times3)] = -20 + 0 - 27 = -47$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = -27 - (-47) = -27 + 47 = 20$$

استخدام المحددات فى حل ثلاث معادلات انيا من الدرجة الاولى بثلاث متغيرات وتسمى طريقة كرامر/

مثال 22 / (كتاب) حل المعادلات الثلاث وبطريقة المحددات لكل مما يأتي :

① $y - 2x + 3 = z \quad , \quad 3x - 4 = 2y - 2z \quad , \quad x + y + z = 9$

نرتب المعادلات الثلاث وكالاتي

$$\begin{aligned} -2x + y - z &= 3 \\ 3x - 2y + 2z &= 4 \\ x + y + z &= 9 \end{aligned}$$

أولا نجد قيمة Δ حيث

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$$\Delta = [\,(4 + 2 + (-3))] - [\,2 + (-4) + 3\,] = 3 - 1 = 2$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 9 & 1 & 1 & 9 & 1 \end{array}\right.}{2}$$

$$x = \frac{[\,6 + 18 + (-4)] - [\,18 + (-6) + 4\,]}{2} = \frac{20 - 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -3 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right|}{2}$$

$$y = \frac{[-8 + (-6) + (-27)] - [(-4) + (-36) + (-9)]}{2} = \frac{-41 + 49}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right|}{2}$$

$$z = \frac{[36 + 4 + (-9)] - [6 + (-8) + 27]}{2} = \frac{31 - 25}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$\therefore\ x = 2\ ,\ y = 4\ ,\ z = 3$

③ $2x - 4y + 5z = 5\ ,\ x + 3y - 2z + 10 = 0\ ,\ -3x - 2y - 4z + 6 = 0$

نرتب المعادلات أولا وكما يلي :

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 5z &= 5 \\ x + 3y - 2z &= -10 \\ -3x - 2y - 4z &= -6 \end{aligned}$$

نجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = [(-24 + (-24) + (-10)] - [-45 + 8 + 16] = [-58] - [-21] = -37$$

ثم نجد كلامن x و y و z وكما يلي

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -4 & 5 & 2 & -4 \\ -10 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ -6 & -2 & -4 & -3 & -2 \end{array}\right|}{-37}$$

$$x = \frac{[-60 + (-48) + 100)] - [-90 + 20 + (-160)]}{-37} = \frac{[-8] - [-230]}{-37} = \frac{222}{-37} = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 5 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & -10 & -2 & 1 & -10 \\ -3 & -6 & -4 & -3 & -6 \end{array}\right|}{-37}$$

$$y = \frac{[80 + 30 + (-30)] - [150 + 24 + (-20)]}{-37} = \frac{80 - 154}{-37} = \frac{-74}{-37} = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -4 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 8 & -10 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -6 & -3 & -2 \end{array}\right|}{-37}$$

$$z = \frac{[-36 + (-120) + (-10)] - [-45 + 40 + 24]}{-37} = \frac{-166 - 19}{-37} = \frac{-185}{-37} = 5$$

$\therefore\ x = 4\ ,\ y = 2\ ,\ z = 5$

تمارين (2 - 3)

س 1) جد قيمة كل مما ياتي وبين اي منها هو محدد لمصفوفة منفردة ؟

① $\begin{vmatrix} cosx & sinx \\ sinx & -cosx \end{vmatrix} = \left[(cosx)\times(-cosx)\right] - \left[(sinx)\times(sinx)\right]$

$= cos^2x - sin^2x$

$= cos^2x + sin^2x = 1$

② $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left[\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{1}\right)\right]$

$= \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

③ $\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \left(2\sqrt{2} \times \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3} \times \sqrt{3}\right)$

$= \left(2\sqrt{4}\right) - \left(\sqrt{9}\right) = (2\times2) - 3 = 1$

④ $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = (4\times8) - (3\times-6) = (-32) - (-18)$

$= -32 + 18 = -14$

⑤ $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [(4\times1)-(3\times1)]-5[(-2\times1)-(3\times3)]+2[(-2\times1)-(4\times3)]$$

$$= 1[4-3]-5[-2-9]+2[-2-12]$$

$$= 1[\ 1\ ]-5[-11\ ]+2[-14\ ]$$

$$= 1+55-28=28$$

⑥ $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [(5\times1)-(6\times0)]-2[(4\times1)-(6\times-1)]+3[(4\times0)-(5\times-1)]$$

$$= 1[5-0]-2[4-(-6)]+3[0+5]$$

$$= 1[\ 5\ ]-2[\ 4+6\ ]+3[\ 5\ ]$$

$$= 1[\ 5\ ]-2[\ 10\ ]+3[\ 5\ ]$$

$= 5 - 20 + 15 = 0$ تعتبر محددة لمصفوفة منفردة

∴ الناتج $= 0$

س 2) حل المعادلات الاتية وجد قيمة x في كل مما ياتي :

① $$\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 9 & 4x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 9 & 4x \end{vmatrix} = 0$$

$$12x^2 - 27 = 0$$

$$12x^2 = 27 \rightarrow 12x^2 = 27$$

$$x^2 = \frac{27}{12} \rightarrow x = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} = \frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{2\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

② $$\begin{vmatrix} x & x \\ x-1 & x-5 \end{vmatrix} = 8 \rightarrow \begin{vmatrix} x & x \\ x-1 & x-5 \end{vmatrix} = 8$$

$$[\,x\,(x-5\,)\,]-[\,x\,(x-1\,)\,]=8$$

$$[\,x^2-5x\,]-[\,x^2-x\,]=8$$

$$\cancel{x^2}-5x-\cancel{x^2}+x=8$$

$$-5x+x=8$$

$$-4x=8$$

$$x=\frac{8}{-4}=-2$$

$$\therefore x=-2$$

③ $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3$

$$x\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$x\,[\,0-(-6)\,] - 2[\,8-30\,] + -1[\,-1-0\,] = 3$

$x\,[\,0+6\,] - 2[\,8-30\,] - 1[\,-1\,] = 3$

$x\,[\,6\,] - 2[\,-22\,] - 1[\,-1\,] = 3$

$6x + 44 + 1 = 3 \rightarrow 6x + 44 - 2 = 0$

$6x + 42 = 0 \rightarrow 6x = -42$

$x = \frac{-42}{6} = 7$

$\therefore x = 7$

س 3) حل المعادلتين الانيتين في كل مما ياتي بطريقة كرامر

① $5x - 4y = 3 \quad , \quad 3x + 2y = 5$

أولا نجد قيمة Δ حيث

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta = (5\times1) - (-4\times3) = 5 + 12 = 17$

$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta x = (-3\times1) - (-4\times5) = -3 + 20 = 17$

$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

$\Delta y = (5\times5) - (-3\times3) = 25 + 9 = 34$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{34}{17} = 2$

$\therefore S = \{\,(1\,,\,2)\,\}$

② $2x - 3y = 3 \quad , \quad x - 2y = 1$

أولا نجد قيمة Δ حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (-4 \times 1) - (-3 \times 1) = -4 + 3 = 1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = (3 \times -2) - (1 \times -3) = -6 + 3 = -3$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = (2 \times 1) - (1 \times 3) = 2 - 3 = -1$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\therefore S = \{(3 , 1)\}$$

---

③ $2x + 4y = 0 \quad , \quad 3x + 5y = -1$

أولا نجد قيمة Δ حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (5 \times 2) - (3 \times 4) = 10 - 12 = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = (0 \times 5) - (-1 \times 4) = 0 - (-4) = 0 + 4 = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = (2 \times -1) - (3 \times 0) = -2 - 0 = -2$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{4}{-2} = -2 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\therefore S = \{(-2 , 1)\}$$

④ $2x + 3y = 6 \quad , \quad x + y = 1$

أولا نجد قيمة Δ حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (2 \times 1) - (1 \times 3) = 2 - 3 = -1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = (6 \times 1) - (1 \times 3) = 6 - 3 = 3$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = (2 \times 1) - (1 \times 6) = 2 - 6 = -4$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{3}{-1} = -3 \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$\therefore S = \{ (-3 , 4) \}$$

س 4) حل المعادلات الثلاث بايجاد قيم z , y , x وبطريقة المحددات

① $3x + y - z = 2 \ , \ 2x + 3y + z = 11 \ , \ x - y + 3z = 8$

نرتب المعادلات أولا وكما يلي :

$3x + y - z = 2$
$2x + 3y + z = 11$
$x - y + 3z = 8$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 11 & 3 & 1 & 11 & 3 \\ 8 & -1 & 3 & 8 & -1 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 11 & 3 & 1 & 2 & 11 \\ 8 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right.}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{(18 + 8 + 11) - (-24 - 2 + 33)}{(27 + 1 + 2) - (-3 - 3 + 6)}$$

$$x = \frac{37 - 7}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

$$\boxed{\therefore x = 1}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 11 & 1 & 2 & 11 \\ 1 & 8 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right.}{30}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{(99 + 2 - 16) - (-11 + 24 + 12)}{30}$$

$$y = \frac{85 - 25}{30} = \frac{60}{30} = 2$$

$$\boxed{\therefore y = 2}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & 1 & -1 \end{array}\right.}{30}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{(72 + 11 - 4) - (6 - 33 + 16)}{30}$$

$$z = \frac{79 + 11}{30} = \frac{90}{30} = 3$$

$$\boxed{\therefore z = 3}$$

② $4y + z = 0 \quad , \quad 2x + z = -8 \quad , \quad 5x + 6y + 2z = 4$

نرتب المعادلات أولا وكما يلي :

$$\begin{aligned} 0 + 4y + z &= 0 \\ 2x + 0 + z &= -8 \\ 5x + 6y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & -8 \\ 5 & 6 & -2 & 5 & 6 \end{array}\right.}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{(0 + 16 - 48) - (0 + 0 + 64)}{(0 + 20 + 12) - (0 + 0 - 16)}$$

$$x = \frac{-32 - 64}{32 + 16} = \frac{-96}{48} = -2$$

$$\boxed{\therefore x = -2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & 2 & -8 \\ 5 & 4 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right.}{48}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{(0 + 0 + 8) - (-40 + 0 + 0)}{48}$$

$$y = \frac{8 + 40}{48} = \frac{48}{48} = 1$$

$$\boxed{\therefore y = 1}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & 1 & -1 \end{array}\right.}{30}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{(0 + (-160) + 0) - (0 + 0 + 32)}{48}$$

$$z = \frac{-160 - 32}{48} = \frac{-192}{48} = -4$$

$$\boxed{\therefore z = -4}$$

③ $x + 3y - 2z = -2 \ , \ 4x + 2y - z = -3 \ , \ 2x + y - z = 0$

نرتب المعادلات أولا وكما يلي :

$x + 3y - 2z = -2$

$4x + 2y - z = -3$

$2x + y - z = 0$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 3 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right.}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{(-4 + 0 - 6) - (0 - 2 - 9)}{(2 - 6 + 8) - (-8 + 1 + 12)}$$

$$x = \frac{-10 + 11}{4 - 5} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\boxed{\therefore x = -1}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -4 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right.}{-1}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{(-3+4-8)-(12+0-8)}{-1}$$

$$y = \frac{-7-4}{-1} = \frac{-11}{-1} = 11$$

$$\boxed{\therefore\ y = 11}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right.}{-1}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{(0-18+8)-(-8+3+0)}{-1}$$

$$z = \frac{-10+5}{-1} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$\boxed{\therefore\ z = 5}$$

الرياضيات

للصف- الخامس الأدبي

اعداد الأستاذ

أياد شاكر الرفاعي

الفصل الرابع

الاحصاء Statistics

مقدمة / كلمة الاحصاء / تعني علم جمع البيانات وتحليلها وتفسيرها ولعلم الاحصاء مجالان رئيسيان / (الاحصاء الوصفي) الذي يهتم بوصف البيانات و (الاحصاء الاستدلالي) الذي يهتم بتفسير البيانات وتحليلها بهدف الوصول الى استنتاجات او تنبؤات منها .

حيث تقوم الاحصاءات بحل كثير من المشاكل الادارية والاقتصادية وغيرها . لذلك يجب علينا دراسته وفهم حقيقته .

مقياس التشتت /

لكل مجموعة من الاعداد وسطا حسابيا وان اعداد هذه المجموعة ربما تكون مجتمعة بالقرب منه أو مبتعدة عنه . فاذا كانت هذه الاعداد مجتمعة بالقرب من وسطها الحسابي فان مقدار تشتتها ضئيل ، واذا كانت هذه الاعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فان تشتتها كبير.

ومن مقياس التشتت المدى (Range) ، والانحراف المعياري (Standard Deviation) والانحراف المتوسط والانحراف المتباين .

كلما قل تشتت البيانات ← كلما اقتربت من متوسطها ← كلما كانت اقرب للتجانس

الانحراف المعياري (Standard Deviation)

يعرف الانحراف المعياري بانه الجذر التربيعي لمتوسط مجموع انحرافات قيم المتغير عن وسطها الحسابي (Arithmetic Mean) وسنرمز للانحراف المعياري بالرمز (S)

حساب الانحراف المعياري لقيم غير التكرارية أو في توزيع تكراري/

(1) نستخرج الوسط الحسابي $\overline{X}$ لتلك القيم

(2) نستخرج الانحرافات لكل قيمة عن وسطها الحسابي $X-\overline{X}$

(3) نربع الانحرافات $\left(X-\overline{X}\right)^2$

(4) نستخرج مجموع مربع الانحرافات $\sum\left(X-\overline{X}\right)^2$

(5) نقسم الناتج على عدد القيم $\dfrac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$

(6) ناخذ الجذر التربيعي الموجب للناتج الاخير (في حالة عدم وجود تكرار)

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} \quad \text{أو} \quad S=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-(\bar{x})^2}$$

(7) في حال وجود تكرارات. $S=\sqrt{\dfrac{\sum f(x-\bar{x})^2}{\sum f}}$ حيث ان f تمثل التكرارات

مثال 1/ (كتاب) أحسب الانحراف المعياري للبيانات التالية 1 , 3 , 5 , 7 , 9

الحل / نطبق القانون التالي في ايجاد S

$$\overline{X} = \frac{9+7+5+3+1}{5}$$

$$\overline{X} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}}$$

$$S = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

x	$(x-\overline{x})$	$(x-\overline{x})^2$
1	$1-5=-4$	16
3	$3-5=-2$	4
5	$5-5=0$	0
7	$7-5=2$	4
9	$9-5=4$	16
$\sum x = 25$		$\sum (x-\overline{x})^2 = 40$

مثال 2/ (كتاب) أحسب الانحراف المعياري لمجموعة من الاشخاص من الجدول التالي

الفئات	12 –	22 –	32 –	42 –	52 –	72 – 62
التكرار f	3	5	8	4	2	1

الحل / نوجد مركز كل فئة

الفئات	التكرار f	مراكز الفئات x	$(f.x)$	$(x-\overline{x})$	$(x-\overline{x})^2$	$f(x-\overline{x})^2$
12 –	3	$17 = \frac{34}{2} = \frac{22+12}{2}$	3 x17 = 51	17–37=– 20	400	3 x400 = 1200
22 –	5	$27 = \frac{54}{2} = \frac{32+22}{2}$	5 x27 =135	27–37=–10	100	5 x100 = 500
32 –	8	$37 = \frac{74}{2} = \frac{32+42}{2}$	8 x37 =296	37–37= 0	0	8 x0 = 0
42 –	4	$47 = \frac{94}{2} = \frac{52+42}{2}$	4 x47 = 188	47–37=10	100	4 x100 = 400
52 –	2	$57 = \frac{114}{2} = \frac{52+62}{2}$	2 x57 =114	57–37=20	400	2 x400 = 800
62 – 72	1	$67 = \frac{134}{2} = \frac{62+72}{2}$	1 x67 = 67	67–37=30	900	1 x900 = 900
المجموع	$\sum$=23	$\sum$=851	$\sum$=851			$\sum$=3800

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{851}{23} = 37 \quad , \quad S = \sqrt{\frac{\sum f(x-\overline{x})^2}{\sum f}}$$

$$= \sqrt{\frac{3800}{23}} = \sqrt{165.2} = 12.8$$

تمارين (1 – 4)

س 1) جد الوسط الحسابي للقيم التالية 12 , 11 , 9 , 8 , 5

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{5 + 8 + 9 + 11 + 12}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

س 2) من الجدول التالي أحسب الوسط الحسابي $\overline{X}$

12	11	9	8	العمر
2	4	5	3	عدد الاشخاص

الحل /

العمر × التكرار $(f \cdot x)$	التكرار f	العمر x
3 x 8 = 24	3	8
5 x 9 = 45	5	9
4 x 11 = 44	4	11
2 x 12 = 24	2	12
$\sum f.x = 137$	$\sum f = 23$	المجموع

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{137}{14} = 9.786$$

س 3) أحسب الانحراف المعياري للقيم التالية 5 , 4 , 1 , 2 , 3

الحل /

$(x - \overline{x})^2$	$(x - \overline{x})$	x
0	$3 - 3 = 0$	3
1	$2 - 3 = -1$	2
4	$1 - 3 = -2$	1
1	$4 - 3 = 1$	4
4	$5 - 3 = 2$	5
$\sum f.x = 10$		$\sum x = 15$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{3 + 2 + 1 + 4 + 5}{5}$$

$$\overline{X} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}}$$

$$S = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.8$$

س 4) اوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري من الجدول التالي ؟

الفئة	20–	24–	28–	32–	36–	40–	44–48
التكرار f	4	7	5	8	6	12	8

الحل / نوجد مركز كل فئة

مراكز الفئات x $22 = \frac{44}{2} = \frac{24+20}{2}$ ، $26 = \frac{52}{2} = \frac{24+28}{2}$ ، $30 = \frac{60}{2} = \frac{28+32}{2}$

$34 = \frac{68}{2} = \frac{32+36}{2}$ ، $38 = \frac{76}{2} = \frac{36+40}{2}$ ، $42 = \frac{84}{2} = \frac{40+44}{2}$ ، $46 = \frac{92}{2} = \frac{44+48}{2}$

الفئات	التكرار f	مراكز الفئات x	$(x.f)$	$(x-\overline{x})$	$(x-\overline{x})^2$	$f(x-\overline{x})^2$
20–	4	22	22 x 4 = 88	22 – 36 = –14	196	4 x196 = 784
24–	7	26	26 x 7 = 182	26 – 36 = –10	100	7 x 100 = 700
28–	5	30	30 x 5 = 150	30 – 36 = –6	36	5 x 36 = 180
32–	8	34	34 x 8 = 272	34 – 36 = –2	4	8 x 4 = 32
36–	6	38	38 x 6 = 228	38 – 36 = 2	4	6 x 4 = 24
40–	12	42	42 x 12 = 504	42 – 36 = 6	36	12 x 36 = 432
44–48	8	46	46 x 8 = 368	46 – 36 = 10	100	8 x 100 = 800
المجموع	$\sum f = 50$		$\sum xf = 1792$			$\sum = 2952$

الوسيط الحسابي $\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1792}{50} = 36$

مركز الفئة $= \frac{20+24}{2} = \frac{44}{2} = 22$, $\frac{24+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$

∴ الزيادة هي **(4)** لكل مركز

$$S = \sqrt{\frac{\sum f(x-\overline{x})^2}{\sum f}} = \sqrt{\frac{2952}{50}} = \sqrt{59.04} = 7.68$$

* * *

الارتباط

الارتباط الخطي /

ان مفهوم الارتباط الخطي يقترن بحالة وجود متغيرين او اكثر تقترن مع بعضها بعلاقات خطية معينة .

على سبيل المثال العلاقة بين طول الشخص (cm) وكتلته (Kgm) ، العلاقة بين تحصيل الطالب المتخرج من كلية والمستوى المعاشي لأسرته ، العلاقة بين الشفاء من مرض معين وكمية الجرعة التي تناولها من دواء.

فاذا كان المتغيرين المرتبطين بنفس الاتجاه أي زيادة او نقصان في احدهما يؤدي الى زيادة او نقصان في الاخر .

على سبيل المثال زيادة طول شخص يتوقع ان يقابلها زيادة في وزنه، وانخفاض في دخل الفرد يتوقع منه انخفاض في أنفاقه على بعض السلع ، اما اذا كان المتغيرين المرتبطين يتغيران باتجاه معاكس زيادة او نقصان في احدهما يؤدي الى نقصان او زيادة في الاخر. عند ذلك يقال ان الارتباط بينهما سالب (عكسي)

على سبيل المثال زيادة في سعر الوحدة من السلع المتوقع يؤدي الى انخفاض في الطلب على تلك السلعة . وان انخفاض في درجات الحرارة يتوقع ان يؤدي الى زيادة في الطلب على الوقود، ويقال ان الارتباط بين المتغيرين (تام)

اذا كان التغير في احدهما متناسب مع المتغير في الاخر ومثال على ذلك الارتباط بين درجة الحرارة الفهرنهايتية هي ارتباط تام .

ويتم حساب الارتباط من خلال معامل الارتباط $F = \frac{9}{5}C + 32$

معامل الارتباط Correlation Coefficient

يعرف معامل الارتباط بانه درجة او قيمة العلاقة التي تربط بين متغيرين او اكثر مع بعض وهي قيمة خالية من وحدات قياس المتغيرات المرتبطة بعلاقة .

معامل الارتباط الخطي البسيط Simple Correlation Coefficient /

يعرف معامل الارتباط الخطي البسيط بانه الدرجة او القيمة العددية للعلاقة بين متغيرين فقط.

معامل الارتباط بيرسون

يعد معامل الارتباط (بيرسون) من معاملات الارتباط الذي تستخدم فيه حساب العلاقة بين متغيرين متصلين .

على سبيل المثال الطلبة الذين يحصلون على درجة عالية في الامتحانات المدرسية فانهم يحصلون على درجات عالية في الامتحانات الوزارية. والعلاقة بين تحصيل الطلبة في مادة الرياضيات وبين قدراتهم على حل المشكلات.

والعلاقة بين التحصيل العلمي والذكاء . ويرمز لمعامل الارتباط بالرمز (r)

فاذا كان لدينا n من الازواج القيم $(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) , \dots$ من الظاهرتين $(x) , (y)$ فان معامل الارتباط بيرسون يحسب باحدى الصيغتين

حيث (r) معامل الارتباط بيرسون

$\bar{x}$ = الوسط الحسابي للظاهرة x

$\bar{y}$ = الوسط الحسابي للظاهرة y

S_x = الانحراف المعياري للظاهرة x

S_y = الانحراف المعياري للظاهرة y

① $$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{S_x . S_y}$$

② $$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(xy-\bar{x}\ \bar{y})}{S_x . S_y}$$

لحساب معامل الارتباط تبيع ما يلي /

① نجد الوسط الحسابي للظاهرتين $(x), (y)$

② نجد الانحراف المعياري للظاهرتين $(x), (y)$

③ مجموع حواصل ضرب كل من الظاهرتين $\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ أو $\sum(xy)$

ومن ثم نطبق احدى الصيغتين لـ (r)

خصائص معامل الارتباط /

① $1 \geq r \geq -1$

② عندما تكون $r = +1$ **الارتباط طردي تام**

③ عندما تكون $r = -1$ **الارتباط عكسي تام**

④ عندما تكون $r = 0$ **انعدام الارتباط**

⑤ عندما تكون (r) بين 0.5 و 0.75 **الارتباط طردي متوسط**

⑥ عندما تكون (r) تزيد على 0.75 **الارتباط طردي قوي**

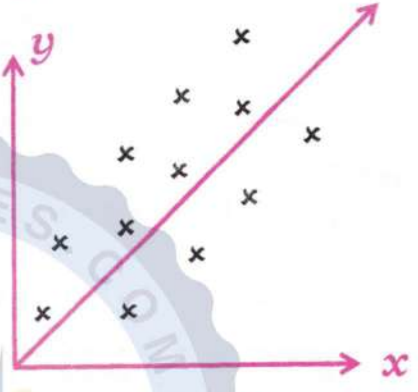
⑦ عندما تكون (r) أقل من 0.5 **الارتباط طردي ضعيف**

الشكل الانتشاري /

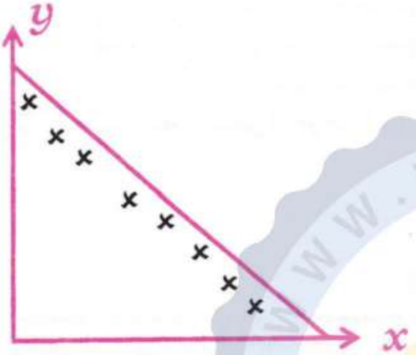
ان الشكل الانتشاري يعتبر أبسط طريقة لعرض بيانات توزيع مزدوج هو عبارة عن انتشار النقط في المستوي (x, y) التي احداثيها السيني يمثل قيمة x واحداثيها الصادي يمثل قيمة y ومن خلال الشكل الانتشاري يمكن تكوين فكرة جيدة عما اذا كان المتغيرين مرتبطين أم غير ذلك ، فاذا لاحظنا ان نقاط الشكل الانتشاري متقاربة مع بعضها فاننا نتوقع في هذه الحالة وجود ارتباط جيد بين المتغيرين . اما اذا كانت النقاط متباعدة كثيرا فاننا نتوقع ان الارتباط بينهما ضعيف.

تضعف العلاقة أي تنخفض قيمة معامل الارتباط كلما ازداد الانتشار.

معامل الارتباط (+1) طردي تام

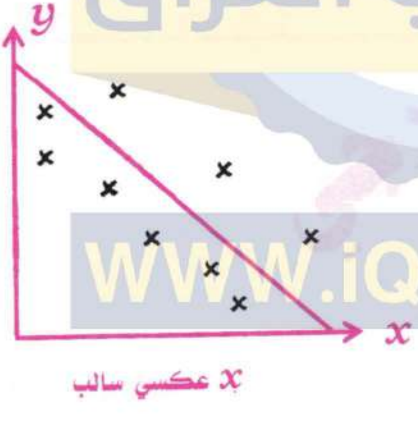


x طردي موجب



x معامل الارتباط (+1) عكسي تام

لا يوجد ارتباط



x عكسي سالب

مثال 1/ (كتاب) جد معامل الارتباط بين المتغيرين y , x من الجدول الاتي :

x	2	3	4	5	6
y	4	6	8	10	12

الحل / نحسب الوسط الحسابي لكل من المتغيرين

$$\overline{X}=\frac{\sum x}{n}=\frac{6+5+4+3+2}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$\overline{Y}=\frac{\sum y}{n}=\frac{12+10+8+6+4}{5}=\frac{40}{5}=8$$

x	y	$(x-\overline{x})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})\ (y-\overline{y})$
2	4	$2-4=-2$	4	$4-8=-4$	16	$-2\times-4=8$
3	6	$3-4=-1$	1	$6-8=-2$	4	$-1\times-2=2$
4	8	$4-4=0$	0	$8-8=0$	0	$0\times0=0$
5	10	$5-4=1$	1	$10-8=2$	4	$1\times2=2$
6	12	$6-4=2$	4	$12-8=4$	16	$2\times4=8$
$\sum=20$	$\sum=40$		$\sum=10$		$\sum=40$	$\sum=20$

$$S_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{5}\cdot10}=\sqrt{2}$$

$$S_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(y-\overline{y})^2}=\sqrt{\frac{1}{5}\cdot40}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{S_x.S_y}=\frac{\frac{1}{5}\cdot20}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{4}{4}=1$$ الارتباط طردي تام

طريقة اخرى للحل /

x	y	$(x)^2$	$(y)^2$	$(x.y)$
2	4	4	16	$2\times4=8$
3	6	9	36	$3\times6=18$
4	8	16	64	$4\times8=32$
5	10	25	100	$5\times10=50$
6	12	36	144	$6\times12=72$
20	40	90	360	180

$$S_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x)^2-(\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{5}\times90-16}=\sqrt{2}$$

$$S_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(y)^2-(\overline{y})^2}=\sqrt{\frac{1}{5}\times360-64}=2\sqrt{2}$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum(xy-\overline{x}\,\overline{y})}{S_x.S_y}=\frac{\frac{1}{5}\times180-4\times8}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{4}{4}=1$$ الارتباط طردي تام

مثال 2/ (كتاب) أحسب معامل الارتباط البسيط بين الكمية المعروضة والسعر

السعر	x	2	2	5	4	5	6	3	5	4
الكمية المطلوبة	y	3	5	7	8	9	11	6	8	6

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2+2+5+4+5+6+3+5+4}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{3+5+7+8+9+11+6+8+6}{9} = \frac{63}{9} = 7$$

x	y	$(x)^2$	$(y)^2$	$(x.y)$
2	3	4	9	2 x 3 = 6
2	5	4	25	2 x 5 = 10
5	7	25	49	5 x 7 = 35
4	8	16	64	4 x 8 = 32
5	9	25	81	5 x 9 = 45
6	11	36	121	6 x 11 = 66
3	6	9	36	3 x 6 = 18
5	8	25	64	5 x 8 = 40
4	6	16	36	4 x 6 = 24
$\sum = 36$	$\sum = 63$	$\sum = 160$	$\sum = 485$	$\sum = 276$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x)^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \times 160 - 16} = 1.33$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y)^2 - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \times 485 - 49} = 2.21$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(xy - \overline{xy})}{S_x.S_y} = \frac{\frac{1}{9} \times 276 - 28}{1.33 \times 2.21} = \frac{30.66 - 28}{2.948} = \frac{2.666}{2.948} = 0.905$$

∴ الارتباط طردي قوي

معامل الارتباط سبيرمان (الرتبي) / Spearmans Coefficient of Rank Correlation

لكي نستطيع ان نصنف عينة من الطلاب وفق التكيف الاجتماعي لهم نقوم بتصنيف العينة الاكثر تكيفا بالصنف (A) والاقل تكيفا بالصنف (B) وصنف (C) هو أقل تكيفا من الصنف السابق . ويمكن ترتيب نفس صنف العينة من حيث النشاط الدراسي ا النشاط الرياضي وقد ناخذ رموز اخرى في التصنيف حيث نرمز (x) أكثر طالب نشاطا وكذلك نرمز للاقل منه بالرمز (y)

قانون سبيرمان / لحساب قيمة معامل الارتباط لسبيرمان نتبع الخطوات التالية

① نرتب كلا من المتغيرين (y) , (x) تصاعديا أو تنازليا

② تحديد الرتب التي تقابل كل قيمة من هذه القيم

③ في حالة اشتراك اكثر من قيمة في مرتبة واحدة نحدد المراتب الجديدة من خلال ايجاد متوسطها

④ حساب الفروق بين رتب كلا المتغيرين (x) , (y)

⑤ حساب مربع الفروق بين المتغيرين

⑥ تطبيق قانون معامل الارتباط لسبيرمان $r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$

حيث (r) معامل الارتباط سبيرمان

$d =$ الفرق بين كلا من المتغيرين y , x أو أي رتب

$d^2 =$ مربع الفرق بين المتغيرين

$n =$ عدد أزواج البيانات

مثال 3/ (كتاب) كانت تقديرات ستة طلاب في مادة الاحصاء والرياضيات كما يلي :

تقدير درجة الاحصاء : جيد ، متوسط ، ضعيف ، مقبول ، جيد جدا ، ممتاز

تقدير درجة الرياضيات : متوسط ، جيد ، مقبول ، ضعيف ، ممتاز ، جيد جدا

جد معامل الارتباط البسيط بين تقدير الطالب في امتحان الاحصاء وتقديره في امتحان الرياضيات

الحل / نبدأ بترتيب التقديرات وفق ترتيب تصاعدي أو تنازلي وليكن ترتيب تصاعدي
ثم نخصص رتبا من الاعداد الطبيعية

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

$: x$ ضعيف ، مقبول ، متوسط ، جيد ، جيد جدا ، ممتاز

$: y$ ضعيف ، مقبول ، متوسط ، جيد ، جيد جدا ، ممتاز

ثم نعود لتخصيص هذه الرتب والتقديرات الاصلية كما هو موضح في الجدول التالي :

d^2	d	رتب y	رتب x	y	x	ت
1	1	3	4	متوسط	جيد	1
1	−1	4	3	جيد	متوسط	2
1	−1	2	1	مقبول	ضعيف	3
1	1	1	2	ضعيف	مقبول	4
1	−1	6	5	ممتاز	جيد جدا	5
1	1	5	6	جيد جدا	ممتاز	6
6						

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times 6}{6\,(36-1)} = 1 - \frac{6 \times 6}{35} = 0.829$$ معامل الارتباط طردي قوي

مثال 4/ (كتاب) أحسب معامل الارتباط بين رتبة النجاح (x) والدخل الشهري (y) لعائلة

x : 80 , 94 , 92 , 66 , 71 , 60

y : 700 , 350 , 700 , 400 , 550 , 820

الحل / ترتيب القيم تصاعديا

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

x : 60 , 66 , 71 , 80 , 92 , 94

y : 350 , 400 , 550 , 700 , 700 , 820

$$\boxed{\frac{4+5}{2} = 4.5}$$

ت	x حسب التسلسل المعطى	y حسب التسلسل المعطى	رتب x	رتب y	d الفرق بين x ,y	d^2
1	80	700	4	4.5	$4 - 4.5 = -0.5$	0.25
2	94	350	6	1	$6 - 1 = 5$	25
3	92	700	5	4.5	$5 - 4.5 = 0.5$	0.25
4	66	400	2	2	$2 - 2 = 0$	0
5	71	550	3	3	$3 - 3 = 0$	0
6	60	820	1	6	$1 - 6 = -5$	25
						50.5

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times 50.5}{6\,(36 - 1)} = 1 - \frac{50.5}{35} = -0.43$$

معامل الارتباط عكسي لانه سالب

تمارين (2 – 4)

س 1) جد معامل الارتباط بين y , x من الجدول التالي

x	1	2	3	6
y	2	4	6	12

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x)^2 - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 14 - 4} = \sqrt{\frac{14-12}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y)^2 - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 56 - 16} = \sqrt{\frac{56-48}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

x	y	$(x)^2$	$(y)^2$	$(x.y)$
1	2	1	4	$1 \times 2 = 2$
2	4	4	16	$2 \times 4 = 8$
3	6	9	36	$3 \times 6 = 18$
$\sum x = 6$	$\sum y = 12$	$\sum(x)^2 = 14$	$\sum(y)^2 = 56$	$\sum(x.y) = 28$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(xy - \overline{x}\overline{y})}{S_x . S_y} = \frac{\frac{1}{3} \times 28 - 8}{\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{\frac{28-24}{3}}{\sqrt{\frac{16}{9}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = 1$$

∴ معامل الارتباط = 1

∴ الارتباط طردي تام

س 2) جد معامل الارتباط بين x , y

x	4	8	12	$\boxed{24}$
y	2	4	6	$\boxed{12}$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{4+8+12}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x)^2 - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 224 - (8)^2} = \sqrt{\frac{224-192}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y)^2 - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 56 - 16} = \sqrt{\frac{56-48}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

x	y	$(x)^2$	$(y)^2$	$(x.y)$
4	2	16	4	$4 \times 2 = 8$
8	4	64	16	$8 \times 4 = 32$
12	6	144	36	$12 \times 6 = 72$
$\sum x = 24$	$\sum y = 12$	$\sum(x)^2 = 224$	$\sum(y)^2 = 56$	$\sum(x.y) = 112$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(xy - \overline{xy})}{S_x . S_y} = \frac{\frac{1}{3} \times 112 - 32}{\sqrt{\frac{32}{3}} \times \sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{\frac{112-96}{3}}{\sqrt{\frac{256}{9}}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 1$$

∴ معامل الارتباط بين x , y = 1

∴ الارتباط طردي تام

س 3) جد معامل الارتباط بين x , y

x	3	4	5	6	7	$\boxed{25}$
y	6	8	10	12	14	$\boxed{50}$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{3+4+5+6+7}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{6+8+10+12+14}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

x	y	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})$
3	6	$3-5=-2$	4	$6-10=-4$	16	$-2 \times -4 = 8$
4	8	$4-5=-1$	1	$8-10=-2$	4	$-1 \times -2 = 2$
5	10	$5-5=0$	0	$10-10=0$	0	$0 \times 0 = 0$
6	12	$6-5=1$	1	$12-10=2$	4	$1 \times 2 = 2$
7	14	$7-5=2$	4	$14-10=4$	16	$2 \times 4 = 8$
$\sum = 20$	$\sum = 40$		$\sum = 10$		$\sum = 40$	$\sum = 20$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x)^2 - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times 10} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y)^2 - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times 40} = \sqrt{8}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(xy - \overline{xy})}{S_x . S_y} = \frac{\frac{1}{5} \times 20}{\sqrt{2} \times \sqrt{8}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{4}{4} = 1$$

∴ الارتباط طردي تام

س 4) جد معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين x , y

x	2	5	7	8	6	9	8	10	4	5	11	9	84
y	1	3	5	6	4	6	7	9	3	4	9	8	65

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2+5+7+8+6+9+8+10+4+5+11+9}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{1+3+5+6+4+6+7+9+3+4+9+8}{12} = \frac{65}{12} = 5.4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x)^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{12} \times 666 - (7)^2} = \sqrt{\frac{666-588}{12}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y)^2 - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{12} \times 423 - 16} = \sqrt{\frac{56-48}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

x	y	$(x)^2$	$(y)^2$	$(x.y)$
2	1	4	1	2 x 1 = 2
5	3	25	9	5 x 3 = 15
7	5	49	25	7 x 5 = 35
8	6	64	36	8 x 6 = 48
6	4	36	16	6 x 4 = 24
9	6	81	36	9 x 6 = 54
8	7	64	49	8 x 7 = 56
10	9	100	81	10 x 9 = 90
4	3	16	9	4 x 3 = 12
5	4	25	16	5 x 4 = 20
11	9	121	81	11 x 9 = 99
9	8	81	64	9 x 8 = 72
$\sum x = 84$	$\sum y = 65$	$\sum(x)^2 = 666$	$\sum(y)^2 = 423$	$\sum(x.y) = 527$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(xy - \overline{xy})}{S_x . S_y} = \frac{\frac{1}{12} \times (84 \times 65) - (7 \times 5.4)}{\sqrt{\frac{13}{2}} \times \sqrt{\frac{8}{3}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{12} \times (5460) - (37.8)}{2.5 \times 1.6} = \frac{(455) - (37.8)}{2.5 \times 1.6} = \frac{417.2}{4} = 104.3$$

∴ الارتباط طردي قوي

س 5) جد معامل الارتباط البسيط للمتغيرين y , x

x	1.5	1.3	2.5	3.3	4.2	1.2	3.8	2.6	
y	3	2	4	6	8	1	7	5	

س 6) من الجدول التالي جد معامل ارتباط سبيرمان

x 50 , 70 , 80 , 40 , 30 , 60 , 65 , 70 , 75 , 55
y 45 , 60 , 65 , 30 , 20 , 55 , 60 , 60 , 65 , 65

الحل / نقوم بترتيب القيم تصاعديا

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

$\boxed{\frac{7+8}{2}=7.5}$

x 30 , 40 , 50 , 55 , 60 , 65 , 70 , 70 , 75 , 80
y 20 , 30 , 45 , 55 , 60 , 60 , 60 , 65 , 65 , 65

$\boxed{\frac{5+6+7}{3}=6}$ $\boxed{\frac{8+9+10}{3}=9}$

No.	x حسب التسلسل المعطى	رتب x	y حسب التسلسل المعطى	رتب y	d الفرق بين x ,y	d^2
1	50	3	45	3	3 – 3 = 0	0
2	70	7.5	60	6	7.5 – 6 = 1.5	2.25
3	80	10	65	9	10 – 9 = 1	1
4	40	2	30	2	2 – 2 = 0	0
5	30	1	20	1	1 – 1 = 0	0
6	60	5	55	4	5 – 4 = 1	1
7	65	6	60	6	6 – 6 = 0	0
8	70	7.5	60	6	7.5 – 6 = 1.5	2.25
9	75	9	65	9	9 – 9 = 0	0
10	55	4	65	9	4 – 9 = –5	25
						31.5

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6\times 31.5}{10\,(10-1)} = 1 - \frac{189}{10\times 9} = 1 - \frac{189}{10} = \frac{10-189}{10} = \frac{-179}{10} = -17.9$$

معامل الارتباط عكسي لانه سالب

س 7) من الجدول التالي تمثل الكثافة العادية لاشجار الصنوبر (x) ومساحة قاعدة الاشجار (y)

x 307 , 79 , 71 , 192 , 122 , 404 , 55 , 82

y 13.5 , 20.1 , 14.8 , 19.6 , 19.5 , 17.4 , 26.1 , 21.1

المطلوب ايجاد معامل ارتباط سبيرمان بين كثافة الاشجار ومساحة قاعدة الاشجار

الحل / نقوم بترتيب القيم تصاعديا

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
x	55 ,	71 ,	79 ,	82 ,	122 ,	192 ,	307 ,	404
y	13.5 ,	14.8 ,	17.4 ,	19.5 ,	19.6 ,	20.1 ,	21.1 ,	26.1

No.	x حسب التسلسل المعطى	رتب x	y حسب التسلسل المعطى	رتب y	d الفرق بين x ,y	d^2
1	307	7	13.5	1	7 − 1 = 6	36
2	79	3	20.1	6	3 − 6 = −3	9
3	71	2	14.8	2	2 − 2 = 0	0
4	192	6	19.6	5	6 − 5 = 1	1
5	122	5	19.5	4	5 − 4 = 1	1
6	404	8	17.4	3	8 − 3 = 5	25
7	55	1	26.1	8	1 − 8 = −7	49
8	82	4	21.1	7	4 − 7 = −3	9
						130

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6\times 130}{8\,(64-1)} = 1 - \frac{780}{8\times 63} = 1 - \frac{780}{504} = \frac{504-780}{504} = \frac{-776}{504} = -1.539$$

معامل الارتباط عكسي لانه سالب

الانحدار

الانحدار /
هو التنبؤ بقيمة متغير معين من معرفة قيمة متغير آخر ، مثلا يمكننا استخدام الانحدار للتنبؤ بمقدار الدخل القومي (y) من معرفة مقدار الانتاج الصناعي والزراعي (x) لسنة معينة وكذلك يمكننا أستخدام نفس الاسلوب للتنبؤ بالدرجات التي يمكن ان يحصل عليها الطالب في الامتحان الوزاري العام (y) من معرفة درجاته في الامتحان المدرسي (x) . **وبصورة عامة /** فانه يمكن التنبؤ بقيمة المتغير (y) في ضوء معرفة قيمة المتغير (x) باستخدام الانحدار

ولاجل التنبؤ بمقدار القيم الخاصة بمتغير معين من معرفة متغير آخر يستخدم عادة ابسط الصور الرياضية وهي الصور الخطية وتمثل بالمعادلة العامة للخط المستقيم $y = bx + a$ ، وتعني هذه المعادلة ايجاد قيمة (y) المتوقعة والعلامة فوق $(y)^{/}$ تدل على ان القيمة (المتوقعة) وتساوي قيمة (x) مضروبة في ثابت معين (b) مضافا اليه ثابت آخر هو (a) وكما هو ملاحظ ان المعادلة تحتاج التعرف على قيم (a) و (b) و (x) لكي نستطيع التنبؤ بقيمة (y)

ومن تلك المعادلة ينبغي التعرف على خط الانحدار . ويمكن رسم خط الانحدار بواسطة تحديد نقطتين على الاقل ورسم الخط المستقيم الذي يصل بين تلك النقطتين . ولاجل التعرف على قيم النقطتين التي نريد تعيينها ينبغي التعرف على قيم (a) و (b)

ويتم حساب قيمة (b) بواسطة القانون التالي

$$b = \frac{n\sum xy - \sum\bar{x}\sum\bar{y}}{n\left(\sum x\right)^2 - \left(\sum\bar{x}\right)^2}$$

ونحسب قيمة (a) كما يلي $\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x}$

حيث تمثل y الوسط الحسابي لقيم المتغير (y) وتمثل $\bar{x}$ الوسط الحسابي لقيم المتغير (x)

ويمكن كتابة المعادلة السابقة $a = \frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum x}{n}$

مثال 1/ (كتاب)

عينة تتالف من سبعة افراد

وكانت نتائجهم كما يلي :

x	12	11	5	10	13	13	12	84
y	11	14	11	13	15	14	12	65

أحسب معادلة انحدار y على x

الحل / نريد التنبؤ بتقدير قيمة (y) أي درجات الاختبار للافراد في الاختبار الثاني من معرفة درجات الاختبار الاول (x)

x	y	xy	x^2
12	11	12 x 11 = 132	12 x 12 = 144
11	14	11 x 14 = 154	11 x 11 = 121
5	11	5 x 11 = 55	5 x 5 = 25
10	13	10 x 13 = 130	10 x 10 = 100
13	15	13 x 15 = 195	13 x 13 = 169
13	14	13 x 14 = 182	13 x 13 = 169
12	12	12 x 12 = 144	12 x 12 = 144
76	90	992	872

$$b = \frac{n\sum xy - \sum \bar{x} \sum \bar{y}}{n\left(\sum x\right)^2 - \left(\sum \bar{x}\right)^2}$$

$$b = \frac{7 \times 992 - 76 \times 90}{7 \times 872 - (76)^2} = \frac{6944 - 6840}{6104 - 5776} = \frac{104}{328} = 0.32$$

$$a = \frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum x}{n}$$

$$a = \frac{90}{7} - 0.32\frac{76}{7} = \frac{90}{7} - 0.32 \times 10.85 = 12.857 - 3.472 = 9.38$$

∴ معامل انحدار (y) على (x)

$$\hat{Y} = bX + a \rightarrow \hat{Y} = 0.32X + 9.38$$

وعندما تكون قيمة (x) مثلا (5) كما هو الحال بالنسبة للفرد الثالث فان درجته المتوقعة في $\hat{Y}$ هي

$$\hat{Y} = 0.32 \times 5 + 9.38 = 1.60 + 9.38 = 10.98$$

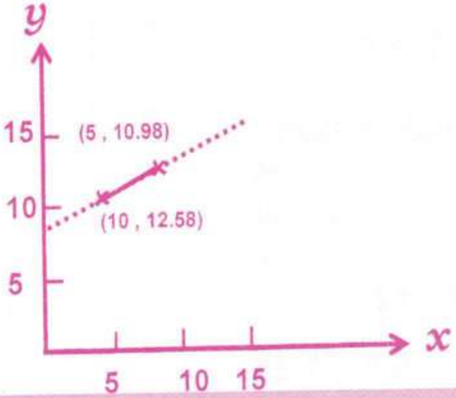
∴ النقطة (5 , 10.98)

وعندما تكون قيمة (x) مساوية الى (10) بالنسبة للفرد الرابع

$$\hat{Y} = 0.32 \times 10 + 9.38 = 3.20 + 9.38 = 12.58$$

∴ النقطة (10 , 12.58)

ولاجل رسم خط الانحدار علينا تعيين النقطتين



مثال 2/ (كتاب) البيانات التالية تمثل الكمية المطلوبة من (y) من سلعة معينة وسعر الوحدة الواحدة منها (x) والمطلوب معادلة (y) على (x)

x	11	8	7	8	6	9	5	5	4	7
y	3	5	6	4	6	4	9	8	9	6

الحل /

x	y	xy	x^2
11	3	11 x 3 = 33	11 x 11 = 121
8	5	8 x 5 = 40	8 x 8 = 64
7	6	7 x 6 = 42	7 x 7 = 49
8	4	8 x 4 = 32	8 x 8 = 64
6	6	6 x 6 = 36	6 x 6 = 36
9	4	9 x 4 = 36	9 x 9 = 81
5	9	5 x 9 = 45	5 x 5 = 25
5	8	5 x 8 = 40	5 x 5 = 25
4	9	4 x 9 = 36	4 x 4 = 16
7	6	7 x 6 = 42	7 x 7 = 49
70	60	382	530

$$b = \frac{n\sum xy - \sum\bar{x}\sum\bar{y}}{n\left(\sum x\right)^2 - \left(\sum\bar{x}\right)^2}$$

$$= \frac{10 \times 382 - 70 \times 60}{10 \times 530 - (70)^2}$$

$$= \frac{3820 - 4200}{5300 - 4900}$$

$$= \frac{-380}{400} = -0.95$$

$$a = \frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum x}{n}$$

$$a = \frac{60}{10} + 0.95 \times \frac{70}{10}$$

$$= \frac{60}{10} + 0.95 \times 7$$

$$= 6 + 6.65 = 12.65$$

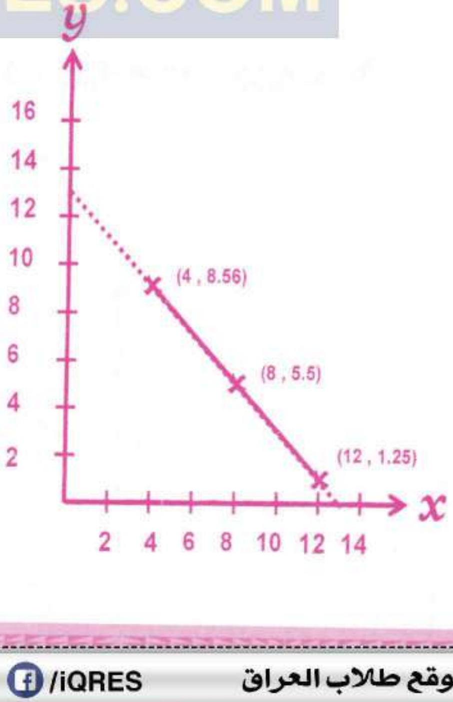
$$\hat{Y} = bX + a$$

$$\hat{Y} = 0.95X + 12.65$$

ولغرض رسم المعادلة اعلاه نختار القيم (x) لنحصل على قيم (y) من المعادلة.

$X : 4 , 8 , 12$

$Y : 8.85 \ , 5.5 \ , 1.25$



تمارين (3 – 4)

س 1) في تجربة حقلية لدراسة اثر زيادة كمية السماد العضوي على كمية المحصول من الحنطة تم الحصول على النتائج التالية :

10	8	6	8	5	2	7	4	9	3	10	12	كمية السماد x
7	5	3	4	2	1	3	2	5	2	6	7	كمية المحصول y

أحسب معادلة انحدار كمية المحصول (y) على كمية السماد (x)

الحل /

x	y	xy	x^2
12	7	12 x 7 = 84	12 x 12 = 144
10	6	10 x 6 = 60	10 x 10 = 100
3	2	3 x 2 = 6	3 x 3 = 9
9	5	9 x 5 = 45	9 x 9 = 81
4	2	4 x 2 = 8	4 x 4 = 16
7	3	7 x 3 = 21	7 x 7 = 21
2	1	2 x 1 = 2	2 x 2 = 4
5	2	5 x 2 = 10	5 x 5 = 25
8	4	8 x 4 = 32	8 x 8 = 64
6	3	6 x 3 = 18	6 x 6 = 36
8	5	8 x 5 = 45	8 x 8 = 64
10	7	10 x 7 = 70	10 x 10 = 100
84	47	396	692

$$b = \frac{n\sum xy - \sum \bar{x}\sum \bar{y}}{n\left(\sum x\right)^2 - \left(\sum \bar{x}\right)^2}$$

$$= \frac{12 \times 396 - 84 \times 47}{12 \times 692 - (84)^2}$$

$$= \frac{4752 - 3948}{8304 - 7056}$$

$$= \frac{804}{1248} = 0.644$$

$$a = \frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum x}{n}$$

$$a = \frac{60}{10} - 0.95 \times \frac{70}{10} = \frac{60}{10} - 0.95 \times 7$$

$$= 6 - 6.65 = -0.65$$

$$\hat{Y} = bX + a \rightarrow \hat{Y} = 0.64X - 0.56$$

$$y_1 = 0.64 \times 12 - 0.56 = 7.12$$

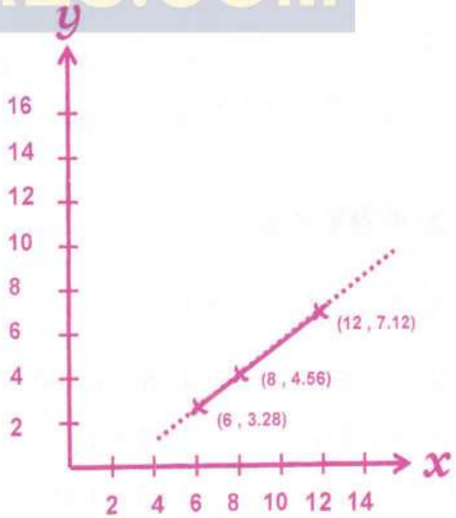
$$y_2 = 0.64 \times 8 - 0.56 = 4.56$$

$$y_3 = 0.64 \times 6 - 0.56 = 3.28$$

الازواج المرتبة

X : 12 , 8 , 6

Y : 7.12 , 4.56 , 3.28



س 2) اذا كان احد الاهداف التي سجلها فريق بكرة القدم في عشرة مباريات خاضها مع فرق اخرى مقرونة بعدد ضربات الزاوية الممنوحة لهذا الفريق في تلك المباريات كالاتي :

عدد ضربات الزاوية x	12	6	9	5	4	15	8	8	7	9
عدد الأهداف y	3	2	2	1	0	4	2	1	0	4

أحسب انحدار عدد الاهداف (y) على عدد ضربات الزاوية (x)

الحل / $n = 10$

x	y	xy	x^2
9	4	9 x 4 = 36	9 x 9 = 81
7	0	7 x 0 = 0	7 x 7 = 49
8	1	8 x 1 = 8	8 x 8 = 64
8	2	8 x 2 = 16	8 x 8 = 64
15	4	15 x 4 = 60	15 x 15 = 225
4	0	4 x 0 = 0	4 x 4 = 16
5	1	5 x 1 = 5	5 x 5 = 25
9	2	9 x 2 = 18	9 x 9 = 81
6	2	6 x 2 = 12	6 x 6 = 36
12	3	12 x 3 = 36	12 x 12 = 144
83	19	191	785

$$b = \frac{n\sum xy - \sum \bar{x}\sum \bar{y}}{n\left(\sum x\right)^2 - \left(\sum \bar{x}\right)^2}$$

$$= \frac{10 \times 191 - 83 \times 19}{10 \times 785 - (83)^2}$$

$$= \frac{1910 - 1577}{7850 - 6889}$$

$$= \frac{333}{961} = 0.346$$

$$a = \frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum x}{n}$$

$$a = \frac{19}{10} - 0.346 \times \frac{83}{10} = \frac{19}{10} - \frac{28.718}{10}$$

$$= \frac{19 - 28.8}{10} = -0.98$$

$$\hat{Y} = bX + a$$

$$\hat{Y} = 0.347X - 0.98$$

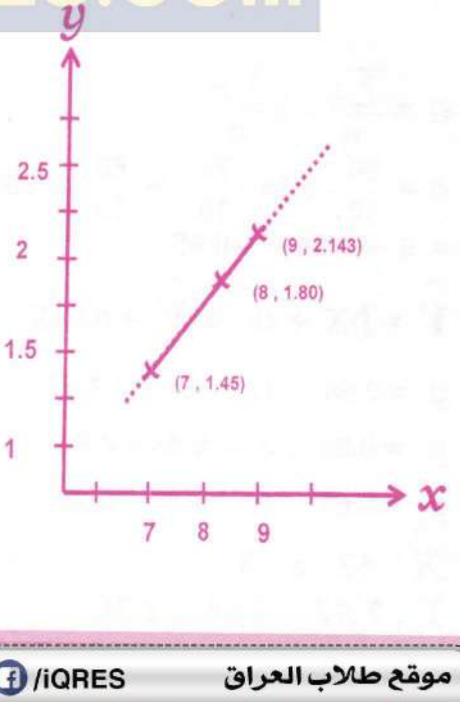
$y_1 = 0.347 \times 9 - 0.98 = 2.143$

$y_2 = 0.347 \times 7 - 0.98 = 1.8$

$y_3 = 0.347 \times 8 - 0.98 = 1.45$

$X : 7 , 8 , 9$ الازواج المرتبة

$Y : 1.45 , 1.8 , 2.143$



س 3) البيانات التالية تمثل درجات (12) طالب والدرجة القصوى من (10)

درجة الرياضيات x	2	3	9	8	7	10	5	6	3	6	0	1
درجة الاحصاء y	0	2	7	7	5	9	3	6	4	4	1	0

المطلوب انحدار (y) على (x)

الحل / $n = 12$

x	y	xy	x^2
2	0	2 x 0 = 0	2 x 2 = 4
3	2	3 x 2 = 6	3 x 3 = 9
9	7	9 x 7 = 63	9 x 9 = 81
8	7	8 x 7 = 56	8 x 8 = 64
7	5	7 x 5 = 35	7 x 7 = 49
10	9	10 x 9 = 90	10 x 10 = 100
5	3	5 x 3 = 15	5 x 5 = 25
6	6	6 x 6 = 36	6 x 6 = 36
3	4	3 x 4 = 12	3 x 3 = 9
6	4	6 x 4 = 24	6 x 6 = 36
0	1	0 x 1 = 0	0 x 0 = 0
1	0	1 x 0 = 0	1 x 1 = 1
60	48	337	414

$$b = \frac{n\sum xy - \sum\bar{x}\sum\bar{y}}{n\left(\sum x\right)^2 - \left(\sum\bar{x}\right)^2}$$

$$= \frac{12 \times 337 - 60 \times 48}{12 \times 414 - (60)^2}$$

$$= \frac{4044 - 2880}{4968 - 3600}$$

$$= \frac{1164}{1368} = 0.85$$

$$a = \frac{\sum y}{n} - b\frac{\sum x}{n}$$

$$a = \frac{48}{12} + 0.85 \times \frac{60}{12}$$

$$= \frac{48}{12} + 0.85 \times 5$$

$$= 4 - 4.25 = -0.25$$

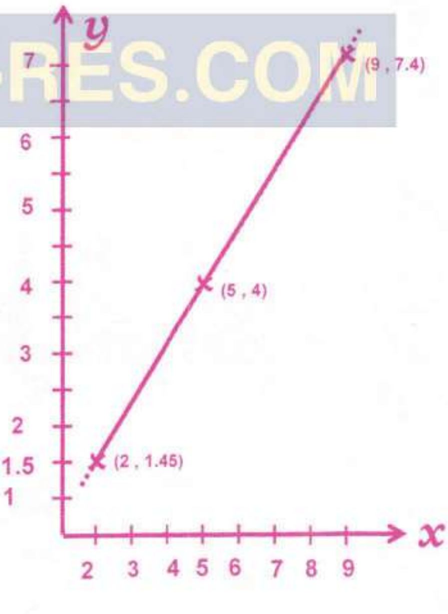
$$\hat{Y} = bX + a$$

$$\hat{Y} = 0.85X - 0.25$$

$y_1 = 0.85 \times 2 - 0.25 = 1.45$

$y_2 = 0.85 \times 5 - 0.25 = 4$

$y_3 = 0.85 \times 9 - 0.25 = 7.4$



$X : 2 , 5 , 9$ الازواج المرتبة

$Y : 1.45 , 5.4 , 7.4$

تمت بعونه تعالى