

20
24

الصفحة 4
العلمي



الجزء 1

Mathematics

الرياضيات

الفصول الأربعة الأولى

07810772656



ريهاب جاسم

أعداد الأستاذ

ريهاب جاسم محمد



العبارات المنطقية Logical Statements

هي جملة خبرية ذات معنى واضح وتكون إما صائبة أو خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد. مثل:

$2 \times 3 = 6$ عبارة صائبة (True) ويرمز لها T

$5 > 7$ عبارة خاطئة (False) ويرمز لها F

$4 + 5 = 10$ عبارة خاطئة F

العدد 8 عدد أولي عبارة خاطئة F

العدد 6 يقبل القسمة على 3 عبارة صائبة T

الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
$\wedge$	اداة الربط (و)
$\vee$	اداة الربط (أو)
$\longleftrightarrow$	الاقتضاء باتجاهين
$\longleftarrow$	الاقتضاء باتجاه
$\leftarrow$	اداة الربط اذا كان .. فأن
$\longleftrightarrow$	اداة الربط اذا وفقط اذا
$\exists$	التسوير الجزئي
$\forall$	التسوير الكلي

المنطق الرياضي هو ليس نظرية ولكنه لغة علمية متفق عليها بين علماء الرياضيات



العبارات المنطقية Logical Statements

في المنطق الرياضي نقسم الجمل الرياضية الى نوعين :-

أ- جملة لا تحمل الينا خبرا معينا.

ب- جملة تحمل الينا خبرا معينا (جملة خبرية).

وأن من مهام المنطق الرياضي هو معرفة ما اذا كانت الجملة الخبرية صائبة او خاطئة ولقد اتفقنا بأن الجملة الخبرية تسمى عبارة منطقية اما صائبة او خاطئة ولا يمكن ان تكون صائبة او خاطئة في آن واحد

ولقد علمت انه اذا رمزنا لعبارة منطقية بالرمز P وكانت P خاطئة F (False) فان نفي P تكون صائبة T (True).



العبارة البسيطة : هي العبارة التي تشمل خبرا واحدا . مثل: $4^2 = 16$, $5 > 3$, $2 + 3 = 7$

العبارة المركبة : وهي العبارة التي تحمل خبرين أو أكثر. مثل: (1) $(3)^2 = 9$ OR $x \cdot x^2 = x^3$

(2) اذا كان المثلث متساوي الاضلاع فان زواياه متساوية

نفي العبارة المنطقية

اذا كانت العبارة (P) خاطئة فان نفيها صائبة . وبالعكس

P	P~
F	T
T	F



ومن المفيد أن نذكر جدول الصواب لأداتي الربط و ($\wedge$) , او ($\vee$)



P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$Q \wedge P$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

أداة الربط: (إذا كان ... فان) [If...then]

هي أداة تستخدم لتكوين العبارة المركبة ويرمز لها $\rightarrow$ وهي أداة شرطية إذا كانت P, Q عبارتين منطقيتين فإنه يرمز للعبارة المركبة لهما بالرمز $P \rightarrow Q$ وتقرأ (إذا كان P فان Q)
والجدول التالي يوضح عمل هذه الأداة:

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

❖ في هذه الأداة تكون القيم جميعها (صائبة) ماعدا إذا كانت المقدمة (صائبة) والتالية (خاطئة) فقط

مثال / اذكر قيم الصواب العبارات الاتية :

1- إذا كان $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فان $\sqrt{-2} \in R$

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة أيضاً.

2- إذا كان $3+5=8$ فان $2+6=7$

الحل / العبارة خاطئة لان المقدمة صائبة والتالية خاطئة.



3- إذا كان $5+7=11$ فإن $6+2=8$

الحل / العبارة صائبة لأن المقدمة صائبة والتالية صائبة.

4- إذا كان $Zero = 1$ فإن $\sqrt{3}$ عدد نسبي

الحل/ العبارة صائبة لأن المقدمة خاطئة والتالية صائبة.

أداة الربط : (إذا وفقط إذا) [If and only if]

هي أداة شرطية ثنائية ورمزها $\longleftrightarrow$ وتكون العبارة المركبة $P \longleftrightarrow Q$ صائبة عندما تكون العبارتين المركبتين لها صائبتين معا أو خاطئتين معا.

هذه العبارة المركبة تسمى (عبارة شرطية ثنائية) فمثلا المثلث المتساوي الأضلاع قياس زواياه متساوية وكذلك إذا كانت قياسات زوايا المثلث متساوية كان المثلث متساوي الأضلاع.

هذه العبارة المركبة هي $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ويرمز لها بالرمز $P \longleftrightarrow Q$ أو $P \leftrightarrow Q$ وتقرأ (P إذا وفقط إذا Q) أو (Q إذا وفقط إذا P) والجدول التالي يوضح عمل الأداة المركبة $P \longleftrightarrow Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ $P \longleftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

❖ أي ان $P \longleftrightarrow Q$

تكون صائبة في حالتين هما: إذا كانت كل من العبارتين المركبتين اما صائبتين او خاطئتين معا.

مثال / أ- $x = -1, x = 4 \leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$
ب- $x^5 = -32 \leftrightarrow x = -2$

الاقتضاء impaction

عندما تكون اداة الربط $\implies$ صائبة دائما فتكتب $P \implies Q$ (P تقتضي Q) ستوضح معنى الاقتضاء من خلال الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى / الاقتضاء في اتجاه واحدة والذي يرمز له $\implies$ لنرمز $(x=3)$ بالرمز P ولنرمز $(x^2 = 9)$ بالرمز Q
فاذا كانت $X=3$ صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $(x^2 = 9)$ اي $P \implies Q$

اما اذا كانت $(x^2 = 9)$ فان $X=3$ أي $Q \not\implies P$

الحالة الثانية / عندما تكون اداة الربط $\iff$ صائبة فتكتب $P \iff Q$ وهذا لا يتم الا اذا كانت العبارتين صائبتين معا أو خاطئتين معا.

الاقتضاء في اتجاهين متعاكسين والذي يرمز له $\iff$ لنرمز $(X=3)$ بالرمز P ولنرمز $(3=27)$ بالرمز Q

فاذا كانت $X=3$ صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $(x^3 = 27)$ أي $p \implies Q$

واذا كانت $(x^3 = 27)$ صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $X=3$ أي $Q \implies P$

ان $(Q \implies P) \wedge (P \implies Q)$ يعني ان $P \iff Q$

مثال / اختر احد الرمز $\iff$, $\implies$ لوضعه بين التعبيرين في الحالات الآتية لتصبح العبارة صحيحة :-

1- $x = 2, x^3 = 8$

2- $x > 2, x > 5$

3- $x^2 \geq 0, x \leq 0$

4- p : أ ب ج د شكل رباعي قطراه متناصفان , Q أ ب ج د متوازي اضلاع

الحل / 1- $x = 2 \iff x^3 = 8$

2- $x > 2 \iff x > 5$

3- $x^2 \geq 0 \iff x \leq 0$

4- $Q \iff p$

العبارتان المتكافئتان Equivalent Statenaients

تعريف :- يقال ان العبارة P مكافئة للعبارة Q اذا كان لها نفس جدول الصواب ويرمز لها بالرمز $\equiv$

مثال/ اثبت أن $P \rightarrow \equiv \sim P \vee Q$

P	Q	$\sim P$	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

حلول تمارين [1, 1]

س1/ بين أي من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة مع السبب :

أ- العدد 5 يقسم العدد 25 و العدد 7 يقسم العدد 25

الحل/ (صائبة) T $\wedge$ (خاطئة) F = F (خاطئة)

ب- العدد 5 يقسم العدد 25 أو العدد 7 يقسم العدد 25

الحل/ (صائبة) T $\vee$ (خاطئة) T = F (صائبة)

ت- العدد 7 ليس أوليا أو العدد 4 أوليا

الحل / (خاطئة) F $\vee$ (خاطئة) F = F (خاطئة)

ث- قطرا المربع متعامدان و قطرا متوازي الأضلاع متناصفان

الحل / (صائبة) T $\wedge$ (صائبة) T

س2 / استخدم $\longleftrightarrow$ او $\longleftrightarrow$ للربط بين العبارتين في الجدول الاتي :

ج/ لكي تصبح العبارة المركبة الناتجة صائبة

العبارة Q	الرمز	العبارة P
قطرا الشكل الرباعي يتناصفان	$\longleftrightarrow$	الشكل الرباعي مستطيل
اضلاع الشكل الرباعي متطابقة	$\longleftrightarrow$	الشكل الرباعي معين
الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم	$\longleftrightarrow$	الشكل الرباعي مستطيل
$a=0, b=0$	$\longleftrightarrow$	$a, b = 0, a, b \in \mathbb{R}$
$x^2 = 9$	$\longleftrightarrow$	$x = 3$
الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم	$\longleftrightarrow$	الشكل الرباعي مربع
$x = 5$	$\longleftrightarrow$	$x^2 = 25$
$x = -5$	$\longleftrightarrow$	$x^3 = -125$
أ ب ج مثلث متساوي الساقين	$\longleftrightarrow$	أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع
$(x-1)(x-2)=0$	$\longleftrightarrow$	$x=1 \vee x=2$

س3 / برهن أن :-

$$P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P \quad -1$$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \rightarrow \sim P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T
$\equiv$					

$$\sim(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q \quad -2$$

P	Q	$\sim Q$	$(P \rightarrow Q)$	$\sim(P \rightarrow Q)$	$P \wedge \sim Q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

$\equiv$

س4 / إذا كانت P صائبة، Q صائبة، S خاطئة فأى العبارات التالية خاطئة وايها صائبة.

	T	F	
صائبة	$(P \rightarrow Q)$	V	S -1
	F	T	
خاطئة	$(P \leftrightarrow S)$	Λ	P -2
	T	T	
صائبة	$(S \leftrightarrow Q)$	Λ	P -3
	T	F	
صائبة	$(S \leftrightarrow S)$	V	S -4

س5 / ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :

S, Q, P ثلاث عبارات اعتمدت في الأسئلة التالية :

$$P \rightarrow \sim P \quad \text{تكافئ} \quad -1$$

$$\sim P \wedge P \quad \text{د-} \quad \sim P \quad \text{ج-} \quad \sim P \rightarrow P \quad \text{ب-} \quad P \rightarrow \sim P \quad \text{أ-}$$

$$S \leftrightarrow S \quad \text{عبارة :} \quad -2$$

$$\text{أ- صائبة دائما} \quad \text{ب- صائبة مرة واحدة} \quad \text{ج- خاطئة دائما} \quad \text{د- خاطئة مرة واحدة}$$

$$-3 \quad \text{نفي العبارة } (9 > 5 + 3) \vee \sim S \text{ هو :}$$

$$\text{أ- } \sim S \vee 9 \geq 5 + 3 \quad \text{ب- } \sim S \vee 9 < 5 + 3 \quad \text{ج- } \sim S \wedge 9 \leq 5 + 3 \quad \text{د- } S \wedge 9 \leq 5 + 3$$

عرفت العبارة المنطقية بأنها جملة خبرية إما صائبة او خاطئة (وليس الاثنان معا) ولكن اذا لاحظنا الجمل الاتية :

أ- X عدد صحيح اكبر من الصفر والتي ترمز لها بالرمز $P(X)$

ب- $Y+1=3$ والتي نرمز لها بالرمز $Q(X)$

ج- $a+b=6$ حيث a, b اعداد صحيحة والتي نرمز لها بالرمز $G(a, b)$.

د- احدى مدن العراق

وجدنا ليس بالامكان القول أن كلا من هذه الجمل تمثل عبارة منطقية. ولكن اذا عوضنا في الجملة (أ) بالعدد 9 بدل الحرف X تصبح (9 عدد صحيح اكبر من الصفر) وهذه عبارة صائبة اعط قيمة ل(Y) في الجملة (ب) لتجعلها عبارة خاطئة. ولو اعطيت كلا من a, b قيمة تساوي 3 نحصل على العبارة (3+3=6) وهي عبارة صائبة. ضع الاسم في الفراغ المناسب في الجملة (د) لتجعلها عبارة صائبة.

تعريف :-

1- المتغير هو رمز يأخذ قيما لمجموعة من الاشياء المفروضة من مجموعة التعويض لذلك المتغير.

2- الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي على متغير او اكثر وتتحول الى عبارة عند اعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض.

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

تكافؤ الجمل المفتوحة

هي الجمل التي يكون لها نفس مجموعة الحل في مجموعة تعويض واحدة. لتكن $P(x): 2x = 4$, $Q(x): x-1=1$

ولتكن مجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة (Z) نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المفتوحة $P(X)$ هي {2} وان مجموعة الحل للجملة المفتوحة $Q(x)$ هي {2} تسمى الجملتان المفتوحتان $p(x), Q(x)$ متكافئتين وذلك لتساوي مجموعتي الحل لكل منهما .

مثال / اذا كانت $P(x): X=2$, $Q(X): X^2=4$ ومجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة Z. هل $p(x), Q(X)$ متكافئتان؟

الحل :-

نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المفتوحة $p(x)$ هي {2} وان مجموعة الحل للجملة المفتوحة $Q(X)$ هي {2, -2} وبما ان $\{2\} \neq \{2, -2\}$

لذا نقول ان الجملتين المفتوحتين $Q(x), P(x)$ جملتان غير متكافئتان

تعريف :

ان نفي الجملة المفتوحة $p(x)$ هي الجملة المفتوحة ليس صحيحا $(P(X))$ او أي جملة مفتوحة تكافئ ذلك وسوف نستعمل الرمز $\sim P(x)$ للتعبير عن نفي الجملة المفتوحة $p(x)$

★ نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المنفية هي مجموعة التعويض / مجموعة حل الجملة $p(x)$.

مثال/ لنفرض أن مجموعة التعويض لكل جملة مفتوحة فيما يلي هي مجموعة الأعداد الصحيحة

نفيها $\sim P(x)$	$p(x)$ الجملة المفتوحة
$X^2 - 4 \neq 0$	$X^2 - 4 = 0$
X ليس عدد صحيحاً زوجياً	X عدد صحيحاً زوجياً
$X \neq 4$ او $x+1=6$	$X=4$ و $x+1 \neq 6$



حلول تمارين (1-2)

س1/ مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الاتية :

مجموعة التعويض

الجملة المفتوحة

الأعداد الطبيعية

أ- $x < 3$

الحل $x = \{0, 1, 2\}$

$\{10, 6, 5, 3\}$

ب- $x^2 - 11x + 30 = 0$

الحل / $x^2 - 11x + 30 = 0$

$$(x-6)(x-5) = 0$$

$$S = \{6, 5\}$$

الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

$$ج- (x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)(x-30) = 0$$

الحل / $x = 1$

$$x = \frac{3}{5} \in \mathbb{Z} \quad x = 30$$

$$S_x = \{1, 30\}$$

الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

$$د- $x > 4$ و $(x-1)(x-5) = 0$$$

الحل / $x = 5$ أو $x = 1 \wedge x > 4$

$$x = 5 \wedge x > 4$$

$$\{1, 5\} \cap \{x: x > 4\}$$

$$S = \{5, 6, 7, \dots\}$$

$\{10, 8, 6, 4, 2\}$

هـ- x لا تقبل القسمة على 4

الحل / $S_x = \{2, 6, 10\}$

الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

$$و- $x + 5 \geq 0$$$

الحل / $S_x = \{x: x \in \mathbb{Z}, x \geq -5\}$

2024

مفتوحتين متكافئتين مع العلم

هذه الأزواج يمثل جملتين

س2/ يوجد في كل مما يأتي زوج من الجمل المفتوحة أي من
أن مجموعة التعويض هي Z .

$x=2$ و

ب- $x^2=4$

$x-3=3$ و

أ- $3x-5=x+7$

$x=2$

$x=\pm 2$

$X=3+3 \wedge 3x-x=7+5$

$X=6$

$\wedge$

$2x=12$

$X=6$

$\wedge$

$X=6$

$S=\{6\}$

$s=\{2\}$

$s=\{-2,2\}$

الجملتان غير متكافئتان لان مجموعة غير متساوية

الجملتان متكافئتان لان مجموعة الحل لكليهما متساوية

$x+1=0$ و

د- $(x+1)(2x+1)=0$

$x=-3$ او $x=3$ و

ج- $x^2=9$

$x=-1$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

$\{-3\} \cup \{3\}$

$x=\pm 3$

$S=\{-1\}$

$2x+1=0 \rightarrow 2x=-1$

$s=\{-3,3\}$

$s=\{-3,3\}$

$x = \frac{-1}{2} \in Z$

الجملتان متكافئتان

الجملتان متكافئتان

$S=\{-1\}$



$X^2-6x+5=0$ و

هـ- $(x-1)(x-5)=0$

$(x-5)(x-1)=0$

$X=1$

$x=5, x=1$

$X=5$

$S=\{1,5\}$

$S=\{1,5\}$

الجملتان متكافئتان

$(x-1)(x-2)=0$ و

ز- $3 > x \geq 0$

و X أكبر من -1 واصغر من 1

و- $X=0$

$x=1, x=2$

$S=\{0,1,2\}$

$S=\{0\}$

$S=\{0\}$

$S=\{1,2\}$

الجملتان متكافئتان

الجملتان غير متكافئتان



س3/ انف كل جملة مفتوحة من الجمل الآتية ثم جد مجموعة
المجموعة {1,2,3,4,5} .

الجملة المفتوحة	نفي الجملة المفتوحة	مجموعة الحل
أ- $2x=4$	$2x \neq 4$	$X=\{1,3,4,5\}$
أ- $X+4=7$	$X+4 \neq 7$	$X=\{1,2,4,5\}$
ج- $(x-3)(x-4)=0$	$x \neq 3, x \neq 4$	$X=\{1,2,5\}$
د- $X+2=4$ و $x^2 \neq 9$	$X+2 \neq 4$ أو $x^2=9$ $x \neq 4-2$ أو $x=\pm 3$ $x \neq 2$ أو $x=\pm 3$	$X=\{1,3,4,5\} \cup \{3\}$ $S=\{1,3,4,5\}$ (-) لا تنتمي الى مجموعة التعويض لان (3)
هـ - $x-1=4$ أو $x^2=16$	$x-1 \neq 4$ و $x^2 \neq 16$ $x \neq 4+1$ أو $x \neq \pm 4$ $x \neq 5$ و $x \neq \pm 4$	$\{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5\}$ لان (-4) لا تنتمي الى مجموعة التعويض $S=\{1,2,3\}$

س4/ اذا علمت ان x, y عناصر في المجموعة $\{0,1,2,3, \dots, 9\}$ فأكتب مجموعة الحل لكل من الجمل
المفتوحة الآتية على شكل أزواج مرتبة.

أ- $x-y=3$	ب- $x+y=15$
$X=3+y$	$X=15-y$
عندما $y=0$ فان $x=3+0=3$	عندما $y=0$ فان $x=15$
عندما $y=1$ فان $x=3+1=4$	عندما $y=1$ فان $x=14$
عندما $y=2$ فان $x=3+2=5$	عندما $y=6$ فان $x=15-6=9$
∴ الأزواج المرتبة هي	∴ الأزواج المرتبة هي
$\{(3,0),(4,1),(5,2),(6,3),(7,4),(8,5),(9,6)\}$	$\{(9,6),(8,7),(7,8),(6,9)\}$

العبارة المسورة Quantified Propositions

العبارة المسورة كلياً والعبارة المسورة جزئياً

بحاول المنطق الرياضي عندما يكون ذلك ممكناً الاستعاضة عن الكلمات برموز متفق عليها وسنقدم هنا رمزين منطقيين هامين:

اولاً / العبارة المسورة كلياً : في الجملة المفتوحة التي يسبقها $\forall$ أو مهما كان بحيث يجعل الجملة عبارة صائبة إذا اردنا أن نذكر ان كل عنصر من مجموعة A يجعل $F(x)$ عبارة صائبة فأننا نقول:
(مهما كان a من A فإن $F(a)$ عبارة صائبة).

أو (لكل $a \in A$ يكون $F(a)$ عبارة صائبة) ويكتب هذا القول بشكل رمزي مختزل على النحو التالي :
 $a \in A$ فإن $F(a)$ عبارة صائبة

يسمى الرمز $\forall$ سوراً كلياً (دلالة الشمول) أو المسور الكلي وتسمى العبارة $\forall a \in A$ فإن $F(a)$ عبارة صائبة
مثلاً / $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ صائبة لكل عدد طبيعي يوضع مكان x .

ويمكن كتابتها كما يلي :- $\forall x \in N$ فإن $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
مدرس مادة الرياضيات

ملاحظة :- المتطابقة هي عبارة مسورة كلياً أي انها صائبة لكل x ينتمي الى مجموعة التعويض.

$$\text{مثلاً / } x^3 + 27 = (x-3)(x^2 - 3x + 9), x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

ثانياً / العبارة المسورة جزئياً : إذا اردنا أن نذكر ان بعض عناصر مجموعة A تجعل $G(x)$ عبارة صائبة فأننا نقول:
(يوجد في الأقل عنصر من A يجعل $G(x)$ عبارة صائبة)
وتكتب هذا الكلام بشكل رمزي كالآتي :

$\exists b \in A$ بحيث $G(b)$ عبارة صائبة (دلالة الوجود)

يسمى الرمز $\exists$ سوراً جزئياً وتسمى العبارة $\exists b \in A$ فإن $f(b)$ عبارة مسورة جزئياً.

فإذا اردنا مثلاً ان نقول ان للمعادلة $x+1=2$ حلاً في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كتبنا:

$$X+1=2 \quad \exists X \in \mathbb{Z} \text{ بحيث}$$

ونذكر ما تقدم بقولنا : (يوجد في الاقل عنصر $X \in \mathbb{Z}$ بحيث تكون المعادلة $X+1=2$ محققة)

ملاحظة / المتطابقة هي عبارة مسورة كليا أي انها صائبة لكل X ينتمي الى مجموعة التعويض.

$$\text{مثل: } X^3+27=(X-3)(X^2-3X+9) , X^2-9=(X-3)(X+3)$$

ملاحظة /

المعادلة والتباينة هي عبارات مفتوحة مسورة جزئيا اي انها صائبة لقيم محددة للمتغير من مجموعة التعويض

مثال : $X - 2 = 0 \rightarrow X = 2$ فالعدد (2) فقط يحقق هذه المعادلة ويجعلها صائبة .

مثال : $X < 3 , X \in \mathbb{N}$

$S=\{0,1,2\}$ هذه القيم فقط تحقق المتباينة



نفي العبارات المسورة

عندما نريد نفي العبارات المسورة ننتبه الى الاتي :

(ان كل عبارة يجب ان تتصف بواحدة وواحدة فقط من الصفتين : صائبة أو خاطئة) .

فلو اردنا مثلاً نفي العبارة : (مهما يكن الوتر المرسوم في دائرة فان العمود النازل عليه من مركز هذه الدائرة ينصفه)

فاننا نقول : (يوجد في الاقل وتر واحد مرسوم في هذه الدائرة بحيث ان العمود الشازل عليه من مركزها لا ينصفه)

واذا اردنا اثبات خطأ القول : (كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6)

فانه يكفي ان نبرهن صواب القول (يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 6)

$$\sim [\forall x \in X \text{ فان } P(x)] \equiv \exists x \in X \text{ فان } \sim P(x)$$

$$\sim [\exists x \in X \text{ فان } P(x)] \equiv \forall x \in X \text{ فان } \sim P(x)$$

مثال / انف كلا مما ياتي :

1- $\forall x$ فان $P(x)$ حيث $P(x)$: اذا كان x عدداً طبيعياً فان $x > 0$

مدرس مادة الرياضيات

$$\text{الحل / } \exists x \text{ فان } \sim [\forall x \text{ فان } P(x)] \equiv \sim$$

$$\sim P(x) : \exists x \text{ عدد طبيعي حيث } x \leq 0$$

وبالكلام : يوجد عدد طبيعي اصغر أو يساوي صفراً .

2- $\exists x$ فان $P(x)$ حيث ان $P(x)$: عدد زوجي موجب

$$\text{الحل / } \forall x \text{ فان } \sim P(x) \equiv \sim [\exists x \text{ فان } P(x)]$$

$$\sim P \wedge (x + 3 < 5 : \forall x \in R)$$

عدداً زوجياً فان x غير موجب وبالكلام : مهما يكن x عدد زوجياً فان x غير موجب

$$-3 \quad P \vee \exists x \in R : x + 3 \geq 5$$

$$\text{الحل / } \sim P \wedge (x + 3 < 5 : \forall x \in R)$$

$$-4 \in R: (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

الحل / يكون نفيها $\exists x \in R: (x+3)^2 \neq x^2 + 6x + 9$

-5 $\forall x \in N$ يقبل القيمة على 2 قبل القسمة على 8 .

الحل / $\exists x \in N$ يقبل القسمة على 2 قبل القسمة على 8 .

$$-6 \forall x \in N: x > 0$$

$$\text{الحل} / \exists x \in N: x \leq 0$$

ملاحظة / اذا كانت العبارة المسورة (صائبة) فان نفيها (خاطئة) وبالعكس .

ملاحظة / اذا كانت العبارة المسورة كلياً (صائبة) فان تسويرها الجزئي (صائبة) وبالعكس غير صحيح كما في المثالين

مثال / $\forall x \in R: x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ وهي عبارة مسورة كلياً (صائبة)

$\exists x \in R: x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ وهي عبارة مسورة جزئياً (صائبة)

مثال / $\exists x \in N: x > 5$ هي عبارة مسورة جزئياً (صائبة)

$\forall x \in N: x > 5$ هي عبارة مسورة كلياً (خاطئة)
مدرس مادة الرياضيات

التحصيل الحاصل Tautology

اذا كان لدينا العبارة المنطقية P وكانت جميع الاحتمالات المنطقية لهذه العبارة صائبة فان P تسمى تحصيلاً حاصلًا.

مثال / لتكن P عبارة هل $P \vee \sim P$ تشكل تحصيلاً حاصلًا ؟

الحل :-

P	$\sim P$	$P \vee \sim P$
T	F	T
F	T	T

∴ تشكل تحصيلاً حاصلًا

ملاحظة / اذا كان جميع قيم الصواب خاطئة تدعى تناقض (Contradiction)

حلول تمارين (1-3)

س1/ انف كل عبارة من العبارات الآتية من دون استعمال ليس صحيحا بدلها

العبارة	نفيها
(1) جميع المثلثات المتشابهة متساوية الساقين (خاطئة)	بعض المثلثات المتشابهة مختلفة الأضلاع (صائبة)
(2) بعض المثلثات المتشابهة غير متطابقة (صائبة)	كل المثلثات المتشابهة متطابقة (خاطئة)
(3) إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوي الساقين (خاطئة)	يوجد في الأقل مثلث واحد قائم الزاوية وغير متساوي الساقين (صائبة)
(4) بعض المعادلات ليس لها حل (صائبة)	كل المعادلات لها حل (خاطئة)
كل شكل رباعي مستطيل (خاطئة)	يوجد في الأقل شكل رباعي واحد ليس مستطيل (صائبة)
(6) $Q =: \forall X \in N : x^2 = 25$	$\exists x \in N \quad x^2 \neq 25$
(7) $(\forall X \in R : x < 8) \wedge P$	$(\exists x \in R : x \geq 8) \vee \sim P$

س2/ بين صواب او خطأ كل من العبارات التالية :

(1) $\forall X$ فإن $P(x)$ حيث ان :

خاطئة

$P(x)$: إذا كان x عدداً طبيعياً فإن $x^2 = x$

(2) $\exists x$ فإن $P(x)$ حيث ان :

صائبة

$P(x)$: x عدد طبيعي , $x^2 = x$

(3) $\forall X$ فإن $P(x)$ حيث ان :

صائبة

$P(x)$: إذا كان x عدداً سالباً فإن x^2 عدد موجب

(4) P, Q عبارتان منطقيتان $P \rightarrow Q$ $\wedge P$ $\rightarrow Q$ تحصيل حاصل

صائبة

(5) P عبارة $\sim P \wedge P$ تناقض

صائبة

(6) P, Q عبارتان منطقيتان $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ تحصيل حاصل .

صائبة

اسئلة حول الفصل الأول

س 1 / برهن أن :

a) $\sim(\sim b \vee \sim c) \equiv \sim(\sim b) \wedge \sim(\sim c)$

b) $a \wedge (\sim a \vee b) \equiv a \wedge b$

c) $(b \vee \sim c) \rightarrow b \equiv (\sim b \wedge c) \quad b$

س 2 / جد مجموعة حلول العبارات المفتوحة التالية حيث $x, y \in \mathbb{N}$:

a) $5x + y = 15$

b) $x + 5y = 15$

c) $3x + y = 8$

س 3 / جد مجموع حلول العبارات المفتوحة التالية :

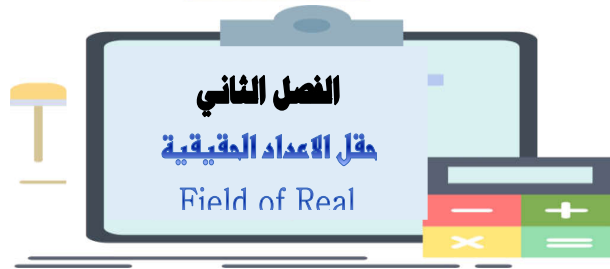
a) $2x - 7 < 0$

حيث مجموعة التعويض Q 3) $\{0, 1, 2, 3\}$ 2) $\mathbb{Z}$ 1)

b) $(x > 3) \wedge (x \in \{3, 5, 7, 9, 11\})$

c) $(x < 3) \wedge (x \in \mathbb{Z})$

d) $(2x - 3 > 0) \wedge (x \in \{2, 4, 6\})$



القيمة المطلقة Absolute value

تعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي X والتي ترمز لها بالرمز $|X|$ كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x, & \forall x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & \forall x < 0 \end{cases}$$

مثال/ عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن كل مما يأتي :

أ- $3 - \sqrt{10}$ حيث $X \in R$ الحل / لأن $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$

$$\therefore |3 - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3 > 0$$

ب- $|X - 3|$ حيث $X \in R$ الحل / $|X - 3|$

$$|X - 3| = \begin{cases} x - 3, & \forall X > 3 \\ 0, & x = 3 \\ x + 3, & \forall X < 3 \end{cases}$$

ملاحظة / $|x| = +\sqrt{x^2}$ أي أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هو الجذر التربيعي الموجب لمربع ذلك العدد ينتج من التعريف أن القيمة المطلقة تتمتع بالخواص الآتية:

(1) $|x| \geq 0$ $\forall X \in R$ فإن

(2) $|-x| = |x|$ $\forall X \in R$ فإن

(3) $-|x| \leq x \leq |x|$ $\forall X \in R$ فإن

(4) $|x|^2 = x^2$, $\forall X \in R$

(5) $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$ $\forall X \in R$ فإن $\left| \frac{X}{Y} \right| = \frac{|X|}{|Y|}$ حيث $Y \neq 0$

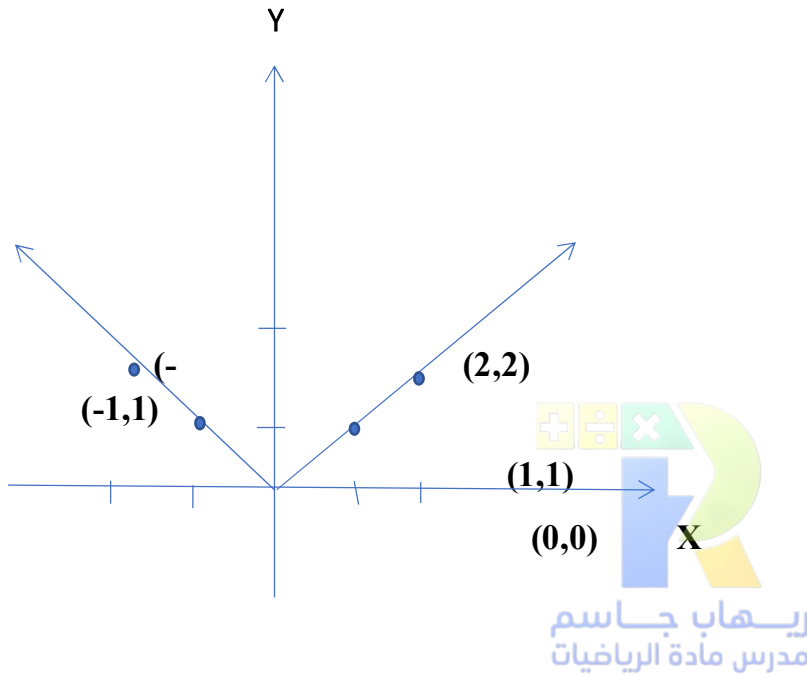
(6) $|X + Y| \leq |X| + |Y|$ $\forall X, Y \in R$ فإن

(7) $-a \leq x \leq a$ $\forall a > 0$ $X \in R$ فإن $|X| \leq a$

مثال / ارسم $Y = |X|$

الحل / حسب التعريف

$$Y = \begin{cases} x, \forall x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, \forall x < 0 \end{cases}$$



أولاً / المستقيم $X > 0, Y = X$

X	Y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)

ثانياً / المستقيم $X < 0, Y = -X$

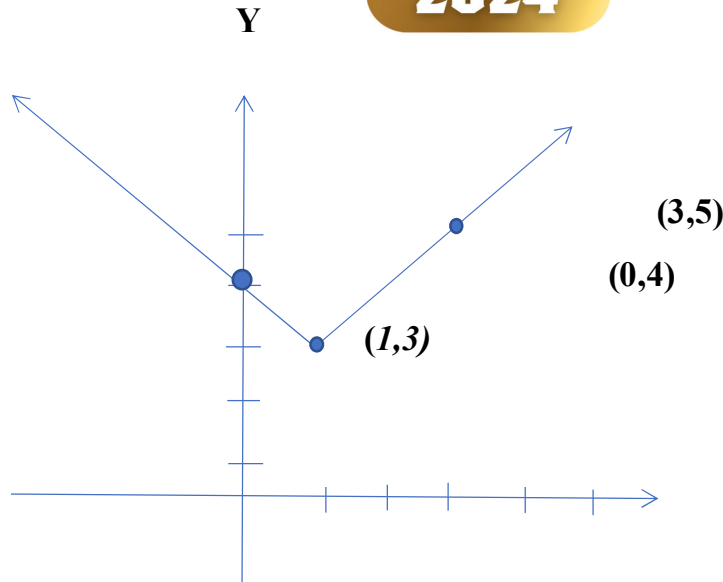
X	Y	(x,y)
0	0	فجوة (0,0)
-1	1	(-1,1)
-2	2	(-2,2)

مثال / ارسم $Y = |X - 1| + 3$

الحل : حسب التعريف

$$y = \begin{cases} (x - 1) + 3, \forall x \geq 1 \\ (-x + 1) + 3, \forall x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore y = \begin{cases} x + 2, \forall x \geq 1 \\ (-x + 4), \forall x < 1 \end{cases}$$



أولاً / المستقيم $\forall x > 1, Y = X + 2$

X	Y	(x,y)
1	3	(1,3)
3	5	(3,5)

ثانياً / المستقيم $\forall x < 1, Y = -X + 4$

X	Y	(x,y)
1	3	فجوة (1,3)
0	4	(3,5)

حل المعادلات التي تحتوي على مطلق:-

مثال / جد مجموعة الحل للمعادلة: $|3X + 6| = 9$ حيث $X \in R$

الحل: نستنتج من تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أن:

$$\left. \begin{array}{l} (3X+6) \text{ إذا كان } 0 \leq 3x+6 \text{ أي } -2 \leq X \\ -(3X+6) \text{ إذا كان } 0 > 3x+6 \text{ أي } -2 > X \end{array} \right\} = |3X + 6|$$

ان هذه المعادلة تكافئ النظام :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots\dots \{x: x \geq -2\} \text{ مجموعة التعويض هي } 3x+6=9 \\ (2) \dots\dots\dots \{x: x < -2\} \text{ مجموعة التعويض هي } -3x-6=9 \end{array} \right\}$$

يمكننا ان نعد هذا النظام نظام معادلتين بالمتغيرين x,y حيث معامل y فيها بيساوي الصفر أن مجموعة حل هاتين

المعادلتين هي: $S_1 = \{1\}, S_2 = \{-5\}$

مجموعة حل النظام هي $S = S_1 \cup S_2 = \{1, -5\}$

مثال / جد مجموعة حل المعادلة : $\forall X \in R, x^2|x| - 8 = 0$

الحل : من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $x^2|X| - 8 = 0$ تكافئ النظام :

$$X^3 - 8 = 0, \forall X \geq 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow X = 2$$

$$S_1 = \{2\}$$

$$-X^3 - 8 = 0, \forall X < 0 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow X = -2$$

$$S_2 = \{-2\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \rightarrow S = \{2, -2\}$$

مثالها جد مجموعة حل المعادلة : $\forall X \in R, x^2 + |X| - 12 = 0$

الحل:- من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $x^2 + |X| - 12 = 0$ تكافئ النظام

$$X^2 + X - 12 = 0, \forall X \geq 0 \rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0$$

$$S_1 = \{3\}$$

اما $x = -4$ يهمل $\therefore x = 3$

$$X^2 - X - 12 = 0, \forall X < 0 \rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$$

$$S_2 = \{-3\}$$

او $x = 4$ يهمل $\therefore x = -3$

$$S = S_1 \cup S_2 \rightarrow S = \{3, -3\}$$

حل معادلتين انيتين بمتغيرين

لقد تعلم الطالب حل نظام مؤلف من معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين بيانياً. وحينذاك وضعنا الاتي اذا كان S_1 حلاً للمعادلة الأولى , S_2 حلاً للمعادلة الثانية, فان مجموعة حل النظام $S = S_1 \cap S_2$ اذا كانت المعادلتين مربوطتين باداة الربط (و) اما اذا كان الربط (او) فان حل النظام هو : $S = S_1 \cup S_2$

مثال / إذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من X,Y فجد مجموعة الحل بطريقتين: تحليليا و بيانيا؟

$$X - 2Y = 5 \dots (1)$$

$$2X + Y = 0 \dots (2)$$

الحل/

تحليلياً :- بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2::

$$X - 2Y = 5 \dots (1)$$

$$4X + 2Y = 0 \dots (2)$$

.....

$$5X = 5 \longrightarrow X = 1$$

نعوض في (1)

$$1 - 2Y = 5 \longrightarrow Y = -2$$



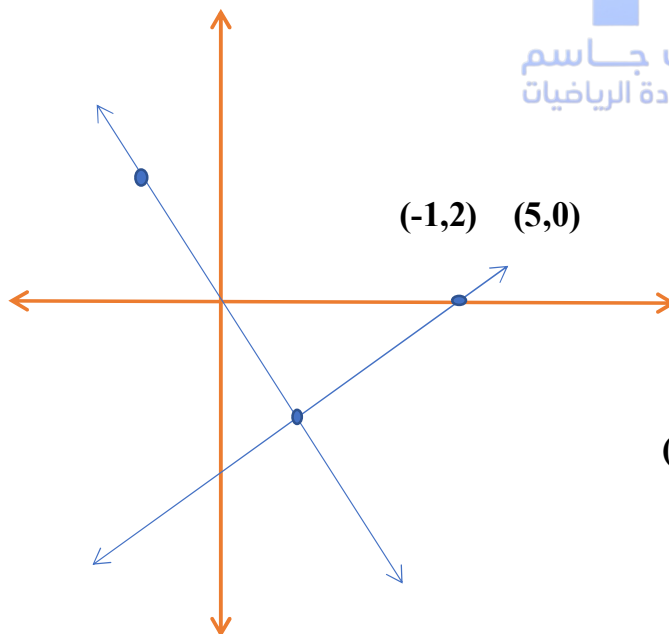
∴ مج = $\{(1, -2)\}$ وهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين

بيانياً : المستقيم $L_1 : X - 2Y = 5$

X	Y	(x, y)
0	-5/2	(0, -5/2)
1	-2	(1, -2)
5	0	(5, 0)

المستقيم $L_2 : 2X + Y = 0$

X	Y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	-2	(1, -2)
-1	2	(-1, 2)



(1, -2)

مثال / اذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من x, y فجد مجموعة حل النظام

$$x - y = 1, \quad x^2 + Y^2 = 13$$

الحل

$$X - y = 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$x^2 + Y^2 = 13 \dots\dots\dots(2)$$

نكون معادلة جديدة هي معادلة رقم (3) من معادلة رقم (1)

$$X = 1 + y \dots\dots\dots(3)$$

نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (2)

$$(1+y)^2 + y^2 = 13$$

$$1 + 2y + y^2 + y^2 = 13$$

$$2y^2 + 2y + 1 - 13 = 0$$

$$2y^2 + 2y - 12 = 0 \div 2$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y + 3)(y - 2) = 0$$

$$\text{اما } (y+3)=0 \longrightarrow y = -3$$

$$\text{او } (y-2)=0 \longrightarrow y=2$$

نعوض قيم y في معادلة رقم (3) لاييجاد قيم x

$$\text{اما } X = 1 + (-3) \longrightarrow X = 1 - (3) \longrightarrow X = -2$$

$$\text{أو } X = 1 + 2 \longrightarrow X = 3$$

$$S = \{(-2, -3), (3, 2)\}$$



مثال / حل المثال الاتي اذا كانت مجموعة التعويض R لكل من x , y بطريقة الحذف

$$2x^2 - 3y^2 = -46, \quad x^2 + y^2 = 17$$

$$x^2 + y^2 = 17 \dots\dots\dots (1)$$

$$2x^2 - 3y^2 = -46 \dots\dots\dots (2)$$

بضرب معادلة رقم (1) في العدد (3)

$$3x^2 + 3y^2 = 51 \dots\dots\dots (1)$$

$$2x^2 - 3y^2 = -46 \dots\dots\dots (2)$$

بالجمع

$$5x^2 = 5$$

$$x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$$



نعوض قيمة x في معادلة رقم (1) لاجاد قيمة Y

$$(1)^2 + y^2 = 17$$

$$y^2 = 17 - 1 \longrightarrow y^2 = 16 \longrightarrow y = \pm 4$$

$$\{S = \{(1, -4), (1, 4), (-1, -4), (-1, 4)\}\}$$

الخلاصة

(1) اذا كانت المعادلتين من نفس الدرجة (الاولى او الثانية) فتحل بطريقتين * طريقة الحذف * طريقة التعويض

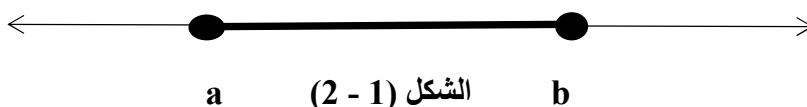
(2) اذا كانت احدهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية فتحل بطريقة التعويض



الفترات Intervals

ليكن $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

(1) تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية: $\{x: x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ الفترة المغلقة **Closed Intervals** من a إلى b ونرمز لها بالرمز $[a, b]$ وتمثل على خط الأعداد كما في الشكل (1 - 2) حيث رمزنا لنقطة البداية للقطعة المستقيمة التي تمثل الفترة المغلقة باحداثيها (a) ولنقطة النهاية لهذه القطعة باحداثيها (b) لقد أهملنا على هذا الشكل ذكر نقطة الأصل (و) يلاحظ وجود تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية الى الفترة $[a, b]$ ومجموعة نقاط القطعة المستقيمة a, b .



(2) تسمى المجموعة $\{x: x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ الفترة المفتوحة **Open Intervals** من (a) الى (b)

وتمثل على خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل (2,2)



يلاحظ في هذه الحالة ان $a \notin (a, b)$, $b \in (a, b)$ والدائرتين حول العددين a, b في الشكل تدلان على ذلك.

(3) نسمي كلا من :

$$[a, b] = \{X: X \in \mathbb{R}, a < X \leq b\}$$

$$(a, b) = \{X: X \in \mathbb{R}, a \leq X < b\}$$

الفترة نصف المغلقة (أو نصف المفتوحة Half Open) حيث $a < b$ وتمثل المجموعة الأول كما في الشكل (2-3)

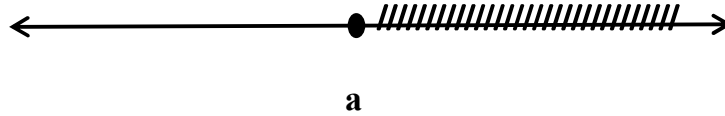


وتمثل المجموعة الثانية كما في الشكل (2-4)

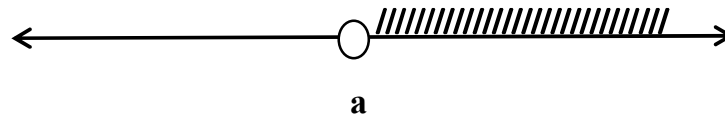


(4) مجموعة الأعداد الحقيقية : التي تزيد على العدد الحقيقي (3) أو تساويه هي: $\{X:X \in \mathbb{R}, X \geq a\}$

وتمثلها كما في الشكل (2-5)



كما أن المجموعة $\{X:X \in \mathbb{R}, X > a\}$ يمثلها الشكل (2-6)



(5) مجموعة الأعداد الحقيقية : التي تساوي العدد الحقيقي (a) أو الأصغر منه هي $\{X:X \in \mathbb{R}, X \leq a\}$ فيمثلها الشكل (2-7)



أما المجموعة $\{X:X \in \mathbb{R}, X < a\}$ فيمثلها الشكل (2-8)



ملاحظة / المجموعة في (4) و (5) تدعى مجموعة عدية غير محددة (شعاع)

مثال / لتكن $X=[1,6]$, $Y=[3,8]$ مثل على خط الأعداد :

$x \cap y = [3, 6]$ الحل $x \cap y$ -1

$x \cup y = [1, 8]$ الحل $x \cup y$ -2

$x - y = [1, 3]$ الحل $x - y$ -3

$y - x = (6, 8]$ الحل $y - x$ -4

ثم اكتب الناتج على شكل فترة



مثال / مثل الآتي :

1) $\{x: x \geq -3\} \cup (-5, 2]$ على خط الأعداد

2) $\{x: x \geq -3\} \cap (-5, 2]$ على خط الأعداد

الحل/



1) $\{x: x \geq -3\} \cup (-5, 2] = \{x: x > -5\}$

2) $\{x: x \geq -3\} \cap (-5, 2] = [-3, 2]$

حل المتباينة (المتراحة) من الدرجة الأولى في متغير واحد

ان المتباينة التي تحوي متغير (X) والتي تكتب بالشكل: $g(x) < f(x)$ حيث $f(x), g(x)$ جملتان مفتوحتان تسمى Inequality في متغير واحد (X)

وكما تعلم من دراستك السابقة اذا كانت مجموعة القيم التي اعطيت ل (x) في هذه المتباينة وجعلها عبارة صائبة , نقول اوجدنا مجموعة حل هذه المتباينة. وتعرف المتباينات المتكافئة كما عرفت المعادلات المتكافئة.

تعريف :- نقول عن المتباينة $f(x) < g(x)$ متباينة مكافئة للمتباينة $h(x) < l(x)$ اذا كان لهما مجموعة الحل نفسها .

سنهتم في هذا البند بحل المتباينات التي يكون فيها كل من $f(x), g(x)$ كثيرة الحدود .

مثال / جد مجموعة الحل للمتباينة : $3x + 1 < x + 5$ اذا كانت مجموعة التعويض هي R وضع مجموعة الحال على خط الأعداد .

الحل/

$$3x + 1 < x + 5$$

$$3x + 1 + (-x) < x + 5 + (-x)$$

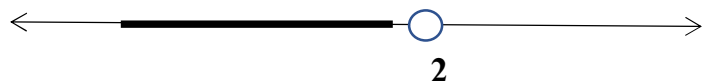
$$2x + 1 < 5 \quad \text{خواص المتباينة}$$

$$2x + 1 + (-1) < 5 + (-1)$$

$$2x < 4 \quad \text{خواص المتباينة}$$

$$2x \left(\frac{1}{2} \right) < 4 \left(\frac{1}{2} \right) \rightarrow x < 2 \quad \text{خواص الحقل}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{x: x \in R, x < 2\}$$



❖ إذا ربطنا متباينتين بالرباط (و) فإن قيمة x التي تحقق هذا النظام المؤلف من متباينتين من الدرجة الأولى في متغير واحد يجب أن تنتمي إلى S_1 مجموعة حل المتباينة الأولى وإلى S_2 مجموعة حل المتباينة الثانية، أي إلى $S_1 \cap S_2$ وهذا يعني: أن مجموعة حل النظام المكون من المتباينتين والرباط (و) هي $S_1 \cap S_2$ ويمكننا أن نستنتج بشكل مشابه أن مجموعة حل النظام المكون من متباينتين والرباط (و) هي $S_1 \cap S_2$.

مثال/ إذا كانت مجموعة التعويض هي (R) جد مجموعة الحل للنظام: $5X+11<1$ و $2X+3<6$ مثل اجابتك على خط الأعداد

الحل / مجموعة الحل للمتباينة الأولى هي $S_1 = \{x : x < -2\}$

مجموعة الحل للمتباينة الثانية هي $S_2 = \{x : x < \frac{3}{2}\}$

مجموعة الحل لنظام المتباينتين هي S:

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x < -2\} \cap \{x : x < \frac{3}{2}\}$$

$$S = \{x : x < -2 \text{ و } \frac{3}{2} < x\}$$



العناصر المشتركة بين S_1, S_2 هي S_1 نفسها $S_1 = \{x : x < -2, x \in R\}$

مثال/ عوض الرباط (و) بالرباط (أو) في المثال السابق ثم جد مجموعة الحل

الحل / مجموعة الحل للنظام : $5X+11<1$ أو $2X+3<6$

$$S_2 \cup S_1 = \{x : x < \frac{3}{2} \text{ أو } x < -2\}$$

$$S = \{x : x \in R, x < \frac{3}{2}\}$$



نلاحظ أن العناصر الموجودة في S_1 أو S_2 أو في كليهما هي S_2

مثال/ إذا كان (R) هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحال للمتباينة $|X - 2| > 5$.

الحل/

$$|x - 2| \begin{cases} X-2, X = 2 & \forall x \geq 2 \\ 2-X & \forall x < 2 \end{cases} \text{ أو}$$

$$\therefore |x - 2| > 5 \leftrightarrow X-2 > 5 \text{ أو } 2-X > 5$$

وبحل هذا النظام نجد أن مجموعة الحل المطلوبة هي :

$$S_1 \cup S_2 = \{x: x \in R, x > 7\} \cup \{x: x \in R, x < -3\}$$



مثال/ حل المتباينة $|x + 1| \leq 2$ حيث $X \in R$

الحل : لاحظ ان هذه المتباينة يمكن حلها مباشرة حسب خاصية (7)

$$\text{فيكون } |X + 1| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x + 1 \leq 2$$

بإضافة (-1) الى حدود المتباينة ينتج

$$-2 + (-1) \leq x + 1 + (-1) \leq 2 = +(-1)$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$S = [-3, 1]$$

حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

مبرهنة:- إذا كان (a) عددا حقيقيا موجبا فان :

(1) مجموعة حل المتباينة $x^2 \leq a^2$ هي الفترة $[-a, a]$

(2) مجموعة حل المتباينة $x^2 < a^2$ هي الفترة $(-a, a)$

البرهان 2

أما $(b < 0 \text{ و } a > 0)$

$$(x-a)(x+a) < 0 \iff x^2 - a^2 < 0 \iff x^2 < a^2$$

ومن خواص الحقل المرتب نستنتج القاعدة : إذا كان $a.b > 0$ صفر فأن

أو $(b > 0 \text{ و } a < 0)$

$$[(X-a) < 0 \text{ و } (X+a) > 0] \text{ أو } [(X-a) > 0 \text{ و } (x+a) < 0]$$

$$[x < a \text{ و } x > -a] \text{ أو } [x > a \text{ و } x < -a]$$

$$(-a, a) \cup \emptyset = (-a, a)$$

وبطريقة مماثلة يمكن برهنة (1) والتي نتركها للطالب

مثال / إذا كان $x^2 < 9$ فإن مجموعة الحل للمتباينة هي : $(-3, 3)$

وإذا كان $x^2 \leq 9$ فإن مجموعة الحل للمتباينة هي : $[-3, 3]$

أما مجموعة حل المتباينة $x^2 > 9$ فهي مجموعة حلول $R/x^2 \leq 9$ أي $R/[-3, 3]$

ومجموعة حلول المتباينة $x^2 \geq 9$ هي مجموعة حلول المتباينة $R/x^2 < 9$ أي $R/(-3, 3)$

مثال / جد مجموعة حلول المتباينة : $7 > |2x + 5| \geq 5$

$$|2x + 5| = \begin{cases} 2x + 5, \forall x > -\frac{5}{2} \\ -(2x + 5), \forall x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

ان المتباينة $7 > |2x + 5| \geq 5$ تكافئ النظام :

$$[7 > -(2x + 5) \geq 5] \text{ أو } [7 > 2x + 5 \geq 5]$$

$$[12 > -2x \geq 10] \text{ أو } [2 > 2x \geq 0]$$

$$[-6 < x \leq -5] \text{ أو } [1 > x \geq 0]$$

$$(-6, -5] \cup [0, 1) = \text{مجموعة الحل}$$

مثال / جد مجموعة حل المتباينات التالية :

1- $X^2 < 3$ / الحل $S = (\sqrt{-3}, \sqrt{3})$

2- $x^2 \geq 16$ / الحل / مجموعة حل المتباينة $x^2 \geq 16$ هي $R / X^2 < 16$

حيث ان : $X^2 < 16$ هي نفي $x^2 \geq 16$ اي ان $S = R / (-4, 4)$

3- $X^2 > 5$ / الحل / نفي الجملة $X^2 > 5$ هي $x^2 \leq 5$

مجموعة حل الجملة المنفية $5 \leq x^2$ هي $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

اذا مجموعة حل الجملة الاصلية $X^2 > 5$ هي $S =$

$R / (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

الخلاصة /



لحل المتباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد :

❖ نعرف المطلق ان وجد .

❖ نستخدم خواص حقل الاعداد الحقيقية :
مدرس مادة الرياضيات ريهاب جاسم

(اضافة النظير الجمعي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الجمع (0) ← الضرب في النظير الضربي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الضرب (1)).

❖ اعد هذه السلسلة من الخطوات نحصل على حل المتباينة ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية R .

حلول تمارين (2-4)

س 1 / إذا كان $A = [-2, 5)$ و $B = \{x: x \geq 1\}$ جد $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$

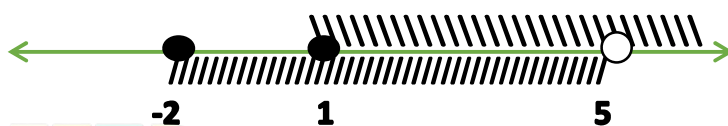
$$A \cup B = [-2, 5) \cup \{x: x \geq 1\} = \{x: x \geq -2\}$$

الحل :-

$$A \cap B = [-2, 5) \cap \{x: x \geq 1\} = [1, 5)$$

$$A - B = [-2, 5) - \{x: x \geq 1\} = [-2, 1)$$

$$B - A = \{x: x \geq 1\} - [-2, 5) = \{x: x \geq 5\}$$

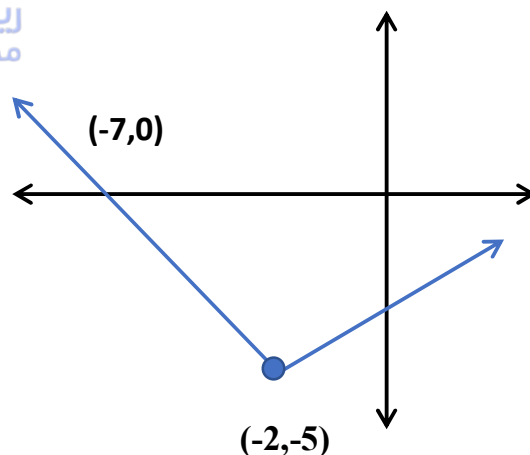


س 2 / أ / ارسم الدالة $Y = |X + 2| - 5$

الحل :-

$$Y = \begin{cases} (x + 2) - 5, \forall x \geq -2 \\ -(x - 2) - 5, \forall x < -2 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X - 3, \forall X \geq -2 \\ -X - 7, \forall X < -2 \end{cases}$$



المستقيم $Y = X - 3$		
X	Y	(X, Y)
-2	-5	(-2, -5)
-1	-4	(-1, -4)

المستقيم $Y = -X - 7$		
X	Y	(X, Y)
-2	-5	(-2, -5)
-7	0	(-7, 0)

ب / ارسم الدالة $Y = 3 - |X + 1|$

$$= |X + 1| \begin{cases} X + 1, \forall X \geq -1 \\ -(X + 1), \forall X < -1 \end{cases}$$

$$y = 3 - x - 1$$

$$y = 2 - x \quad \text{قاعدة الاقتران}$$

عندما $x = -1$ فإن $y = 2 - (-1)$

$$y = 2 + 1 = 3$$

عندما $x = 1$ فإن $y = 2 - (1)$

$$y = 1$$

X	Y	(x,y)
-1	3	(-1,3)
1	1	(1,1)

عندما $x < -1$ $y = 3 - (-x - 1)$

$$y = 3 + x + 1$$

$$y = 4 + x \quad \text{قاعدة الاقتران}$$

عندما $x = -1$ فإن $y = 4 - 1$

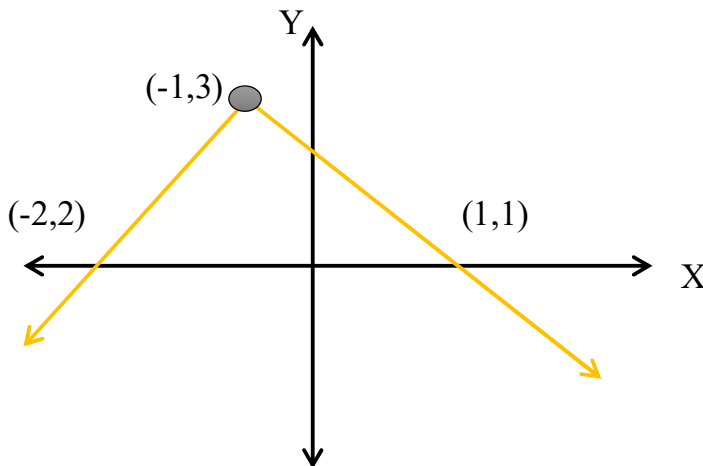
$$y = 3$$

عندما $x = -2$ فإن $y = 4 - 2$

$$y = 2$$



X	Y	(x,y)
-1	3	(-1,3) فجوة
-2	2	(-2,2)



س3 / جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

أ- $|4X + 3| = 1$

$$|4X + 3| = \begin{cases} 4x + 3, \forall x \geq -\frac{3}{4} \\ -(4x + 3), \forall x < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Either

Or

$$-(4x+3)=1$$

$$4x=1-3$$

$$4x=-2$$

$$x^2=-4$$

$$x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \text{ و } x = -\frac{4}{4} = -1$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}$$

ب- $x|x| + 4 = 0$

$$|x| = \begin{cases} x, \forall x \geq 0 \\ -x, \forall x < 0 \end{cases}$$

Either

$$x \geq 0$$

$$4x+3=1$$

$$x \times x + 4 = 0$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Or

$$x < 0$$

$$x \times (-x) + 4 = 0$$

$$-x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\therefore x < 0$$

$$x=2 \quad \text{لا تحقق المعادلة}$$

$$\therefore S = \{-2\}$$



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

د- $|x^2 + 4| = 29$

$x^2 + 4 > 0$

دائما لان $\forall x \in R$

$x^2 + 4 = 29$

$x^2 = 29 - 4$

$x^2 = 25$

$x =$

هـ- $x|x+2| = 3$

عندما $x \geq -2$

$x(x+2)=3$

$x^2 + 2x = 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

حيث

$(x+3)(x-1)=0$

أما $(x+3)=0$ تهمل $x=-3$

لان الفرضية ان $x \geq -2$ بينما هنا $x < -2$

أو $(x-1)=0$ $x=1$

$\therefore S = \{1\}$

عندما $x < -2$

$x(-x-2)=3$

$-x^2 - 2x = 3$

$x^2 + 2x + 3$

ج- $x^2 - 2|x| - 15 = 0$

$x, \forall x \geq 0$

$|x| =$

$-x, \forall x < 0$

either

Or

$x \geq 0$

$x < 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x^2 - 2(-x) - 15 = 0$

$(x-5)(x+3)=0$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x=5$

$(x+5)(x-3) = 0$

تهمل لا تحقق المعادلة $x = -3$

$x = -5$

تهمل لا تحقق المعادلة $x = 3$

$S = \{-5\}$

لا يمكن حل هذه المعادلة بالتجربة , اذا نحاول بالدستور
يجب ان يكون المميز $\leq$ الصفر حيث يكون للمعادلة

حل في R

المميز $b^2 - 4ac$

$(2)^2 - 4(1)(3)$

الصفر $< -8 = 4 - 12$ = المميز

ليس للمعادلة حل في R

∴ مجموعة الحل هي فقط $S = \{1\}$

و/ $|2X + 1| = X$

عندما $X < \frac{-1}{2}$

عندما $X \geq \frac{-1}{2}$

$-2X - 1 = X$

$2X + 1 = X$

$-2X - X = 1$

$2X - X = -1$

$-3X = 1$

$X = -1$

لا تحقق الفرضية اعلاه

$X = \frac{-1}{3} \in X < \frac{-1}{2}$

$S = \{ \}$

$S = \{ \}$

∴ $S = \emptyset$



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



س4 / جد مجموعة حلول كل معادلتين تحليلياً انياً وبيانياً :

$$2x+y=4 \dots\dots\dots(1)$$

$$X-y=-1. \dots\dots\dots(2)$$

بالجمع

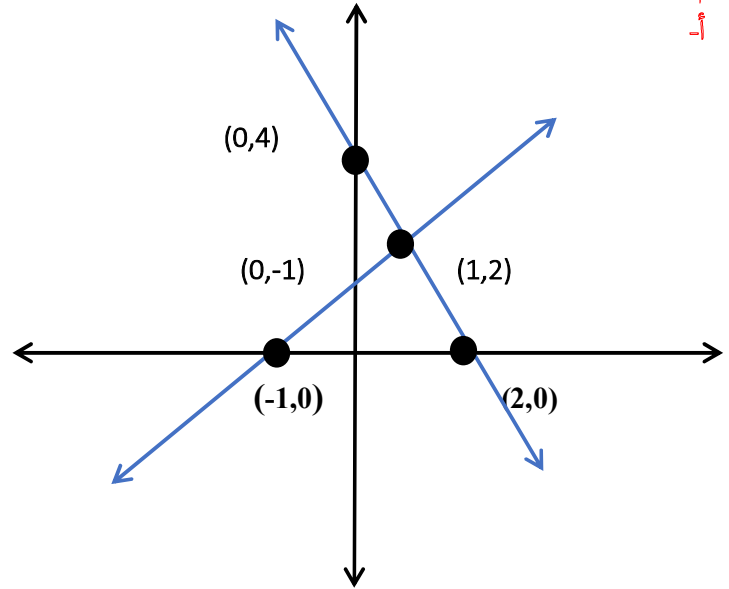
$$3x=3 \rightarrow x=1$$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$$(2 \times 1) + y = 4$$

$$y = 4 - 2 \rightarrow y = 2$$

$$S = \{(1,2)\}$$



المستقيم $2x+y=4$		
X	Y	(x,y)
0	4	(0,4)
2	0	(2,0)

المستقيم $x-y=-1$		
X	Y	(x,y)
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)

$$4x + 3y = 17$$

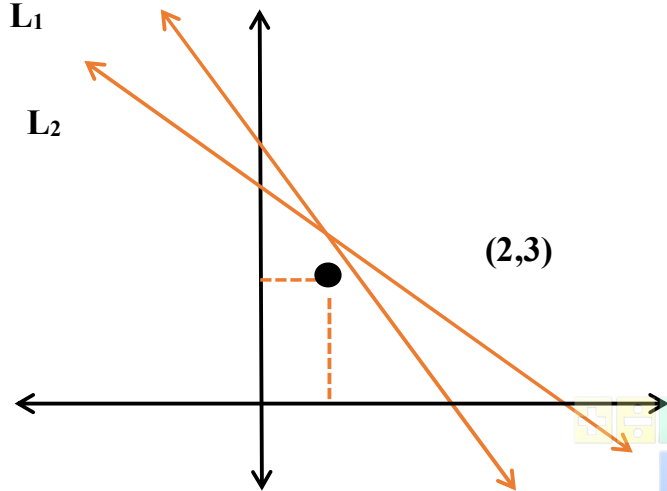
$$\pm 2x \pm 3y = \pm 13$$

بالطرح

$$2x = 4 \rightarrow x = 2$$

L_1

L_2



(2,3)

المستقيم $2x+3y=13$

X	Y	(x,y)
0	$\frac{13}{3}$	$(0, \frac{13}{3})$
$\frac{13}{2}$	0	$(\frac{13}{2}, 0)$

المستقيم $2x+3y=13$

X	Y	(x,y)
0	$\frac{13}{3}$	$(0, \frac{13}{3})$
$\frac{13}{2}$	0	$(\frac{13}{2}, 0)$

$$5X^2 + 2Y^2 = 53 \dots\dots\dots(1)$$

$$X - Y = 1 \dots\dots\dots(2)$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



نكون معادلة جديدة رقم (3) من معادلة رقم (2)

$$X=1+Y \dots\dots\dots(3)$$

نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (1)

$$5(1+y)^2 + 2y^2 = 53$$

$$5(1+2y+y^2) + 2y^2 = 53$$

$$5+10y+5y^2+2y^2=53$$

$$7y^2+10y-48=0$$

$$(7y+24)(y-2)=0$$

$$\text{أما } (7y+24)=0 \rightarrow 7y=-24 \rightarrow y=\frac{-24}{7}$$

$$\text{أو } y-2=0 \rightarrow y=2$$



نعوض قيمة y في معادلة رقم (3) لإيجاد قيم x

$$\text{أما } x = 1 + \frac{-24}{7} \rightarrow x = x = 1 - \frac{24}{7} \rightarrow x = 7 - \frac{24}{7} \rightarrow x = -\frac{17}{7}$$

$$\text{أو } x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$$

$$\therefore S = \left\{ \left(-\frac{17}{7}, -\frac{24}{7} \right), (3, 2) \right\}$$

$$3x^2 + 2y^2 = 107 \dots\dots\dots (1)$$

$$2x^2 - y^2 = 34 \dots\dots\dots (2)$$

بضرب معادلة رقم (2) في (2)

$$3x^2 + 2y^2 = 107 \dots\dots\dots (1)$$

$$4x^2 - 2y^2 = 68 \dots\dots\dots (2)$$

بالجمع



نعوض قيمة x في معادلة رقم (2) لإيجاد قيمة y

$$7x^2 = 175 \quad \div 7$$

$$x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$$

$$2(5)^2 - y^2 = 34$$

$$2(25) - y^2 = 34$$

$$50 - y^2 = 34$$

$$y^2 = 50 - 34$$

$$y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

$$\therefore S = \{(5, -4), (5, 4), (-5, -4), (-5, 4)\}$$

س 5 / جد مجموعة حلول كل من المتباينات التالية :-

أ- $|x - 6| \leq 1$

$$|x - 6| = \begin{cases} x - 6, \forall x \geq 6 \\ 6 - x, \forall x < 6 \end{cases}$$

عندما $x \geq 6$

$$x - 6 \leq 1$$

$$x \leq 1 + 6$$

$$x \leq 7$$

$$S_1 = [6, 7]$$

عندما $x < 6$

$$6 - x \leq 1$$

$$-x \leq 1 - 6$$

$$[-x \leq -5] \times (-1)$$

$$x \geq 5$$

$$S_2 = [5, 6)$$

$$S = [6, 7] \cup [5, 6) \rightarrow S = [5, 7]$$

ب- $2 \leq |x + 1| \leq 4$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, \forall x \geq -1 \\ -(x + 1), \forall x < -1 \end{cases}$$

عندما $x \geq -1$

$$[2 \leq x + 1 \leq 4]$$

$$[2 - 1 \leq x + 1 - 1 \leq 4 - 1]$$

$$[1 \leq x \leq 3]$$

$$[1 \leq x \leq 3]$$

$$[1 \leq x \leq 3]$$

$$[1, 3]$$

عندما $x < -1$

$$[2 \leq -(x + 1) \leq 4]$$

$$[2 \leq -x - 1 \leq 4]$$

$$[2 + 1 \leq -x - 1 + 1 \leq 4 + 1]$$

$$[3 \leq -x \leq 5]$$

$$[-3 \geq x \geq -5]$$

$$[-5, -3]$$

$$= [-5, 3] / (-3, 1)$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

جـ- $-9 \leq |2x - 3| - 12 \leq -3$

الحل/ بإضافة النظير الضربي لـ (-1)

$$-9 + 12 \leq |2x - 3| \leq -3 + 12$$

$$3 \leq |2x - 3| \leq 9$$

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \forall x \geq \frac{3}{2} \\ -2x + 3, & \forall x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

عندما $x \geq \frac{3}{2}$

عندما $x < \frac{3}{2}$

$$[3 < 2x - 3 \leq 9]$$

أو

$$[3 < -2x + 3 \leq 9]$$

$$[3 + 3 < 2x - 3 + 3 \leq 9 + 3] \quad \text{أو} \quad [3 - 3 < -2x + 3 - 3 \leq 9 - 3]$$

$$[6 < 2x \leq 12]$$

أو

$$[0 < -2x \leq 6]$$

$$\left[\frac{1}{2} \times 6 < \frac{1}{2} \times 2x \leq \frac{1}{2} \times 12 \right] \quad \text{أو} \quad \left[\frac{-1}{2} \times 0 > \frac{-1}{2} \times -2x \geq \frac{-1}{2} \times 6 \right]$$

$$[3 < x \leq 6]$$

U

$$[0 > x \geq -3]$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مجموعة الحل = $(3, 6] \cup [-3, 0)$

د/ $2x^2 \leq 8$

الحل/

$$x^2 \leq \frac{8}{2} \Rightarrow x^2 \leq 4$$

$$S_{\text{مج}} = [-2, 2]$$



هـ/ $3x^2 - 27 > 0$

الحل/

$$3x^2 > 27 \xrightarrow{\text{نقسم على 3}} x^2 > \frac{27}{3}$$

$$x^2 > 9 \xrightarrow{\text{نفيها}} x^2 \leq 9$$

$$x > \pm 3 \xrightarrow{\text{نفيها}} x \leq \pm 3$$

$$\therefore S_{\text{مج}} = [-3, 3]$$

$$\therefore S_{\text{المتباينة}} = R/[-3, 3]$$

أمثلة إضافية

(1) $3x + y = 15$

$$\mp 3x \mp 7y = \mp 15$$

بالطرح

$$-6y = 0$$

$$y = \frac{0}{-6} = 0 \Rightarrow y = 0$$

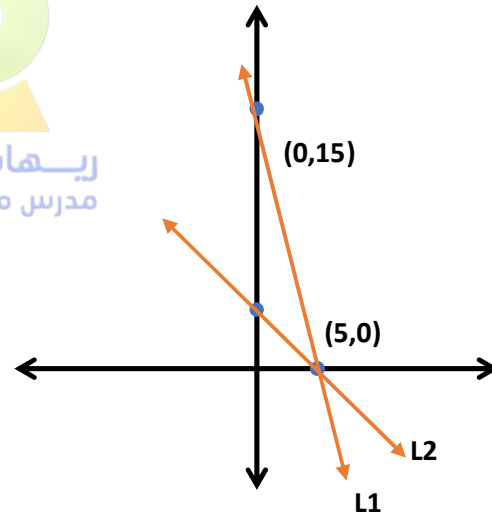
$$3x + 0 = 15 \quad \text{نعوض في المعادلة (1)}$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3} = 5$$

$$x = 5$$

$$\therefore S = \{(5, 0)\}$$



المستقيم $3x + y = 15$

x	y	(x,y)
0	15	(0,15)
5	0	(5,0)

المستقيم $3x + 7y = 15$

x	y	(x,y)
0	$\frac{15}{7}$	$(0, \frac{15}{7})$
5	0	(5,0)

$$(2) \begin{aligned} (2x + 3y = 0) \times 2 \\ 5x + 6y = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 0 \\ -5x + 6y &= -11 \end{aligned}$$

بالطرح

$$-x = -11$$

$$x = 11$$

نعوض في المعادلة (1)

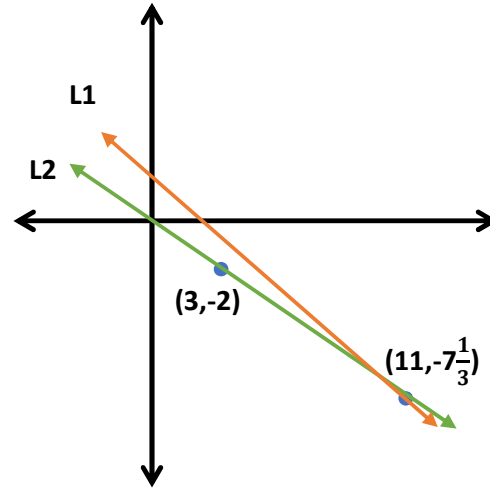
$$(4 \times 11) = 6y = 0$$

$$44 + 6y = 0$$

$$6y = -44$$

$$y = \frac{-44}{6} = -7\frac{1}{3}$$

$$y = -7\frac{1}{3}$$



المستقيم $2x + 3y = 0$		
x	y	(x,y)
0	$\frac{11}{5}$	$(0, \frac{11}{5})$
$\frac{11}{5}$	0	$(\frac{11}{5}, 0)$

المستقيم $5x + 6y = 11$		
x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
3	-2	(3,-2)

حلول أسئلة الفصل الثاني

س1/ جد مجموعة حل المعادلة التالية في R

1) $|x^2 + 1| = 5$

2) $|x + 2| + x = 0$

3) $x^2 - x + \frac{72}{x^2 - x} = 18, x^2 \neq 0$

س2/ جد مجموعة حل المتباينات التالية

1) $3 \leq |2x - 1| < 7$

2) $-5 \leq 2 - |2x - 5| \leq -3$

3) $x^2 - 2x + 1 > 0$

4) $x^2 + 4 > 0$

5) $x^2 + 9 < 0$

6) $x^2 - x - 2 < 0$



س3/ أرسم منحنى الدوال التالية

1) $f: R \rightarrow R, f(x) = x|x| - 1$

2) $f: R \rightarrow R, f(x) = 5 - |x - 2|$

3) $f: R \rightarrow R, f(x) = 3 - x^2$

4) $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x - |x - 1|$



الفصل الثالث

الأسس والجذور

الأسس للأعداد الصحيحة

التعريف/ إذا كان $a \in R, n \in Z$ فإن $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (a مضروبة بنفسها n من المرات).

خصائص الأسس

(1) عند ضرب الأسس للأساسات المتساوية:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$$

$$a^2 \times b^4 \times a \times b^6 = a^3 \times b^{4+6} = a^3 \times b^{10}$$

(2) عند القسمة تطرح الأسس للأساسات المتساوية:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n - a^m$$

$$\frac{x^{17}}{x^3} = x^{17-3} = x^{14}$$

$$\frac{y^6}{y^{13}} = \frac{1}{y^{13-6}} = \frac{1}{y^7} = y^{-7}$$

(3) عند الرفع تضرب الأسس (حيث نقوم بضرب الأس الأول في أس القوس):

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(7^5)^3 = 7^{5 \times 3} = 7^{15}$$

(4) عند جذر مقدار معين: نقسم أس المقدار على دليل الجذر (أي أن دليل الجذر يصبح مقام للأس):

$$\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8 \quad \text{دليل الجذر} \rightarrow$$

$$\sqrt[3]{r^5} = r^{\frac{5}{3}} \quad \text{دليل الجذر} \rightarrow$$

(5) أي قيمة عددية أو أي مقدار بأس صفر فإنه يساوي واحد دائماً:

$$(10)^0 = 1, \quad x^0 = 1, \quad (x - y)^0 = 1$$

(6) عند نقل مقادير من البسط إلى المقام وبالعكس فإن إشارة الأس تتغير:

$$\frac{2^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{2^3}$$

(7) عندما نقوم بتبسيط جذر يحتوي على كسر نوزع الجذر للبسط والمقام بحيث يكون دليل الجذر أكبر من واحد، ودليل الجذر ينتمي إلى N^+

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}, \quad \sqrt[3]{\frac{x^3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x}{2}$$

(8) عند وجود كميتين مضروبين مع بعضهما داخل جذر دليله ينتمي إلى N وأكبر من (1) نستطيع أن نجزي الجذر إلى جذرين مضروبين مع بعضهما وداخل كل جذر كمية من الكميتين السابقتين وتحمل كل جذر الدليل نفسه للجذر الأصلي:

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

(9) عند اختصار أو تبسيط أي مقادير كسرية يجب أن نجعل الأساسات عبارة عن أعداد أولية (2,3,5,7,11,.....)، وذلك إما أن نرفع العدد لأس معين (عدد أولي مرفوع لأس)، أو نقوم بتجزئة العدد غير الأولي إلى عددين أوليين مضروبين مع بعضهما البعض أو أكثر من عددين أوليين وكل عدد أولي منها مرفوع للأس الأصلي نفسه الذي كان العدد مرفوع له قبل التجزئة:

$$\frac{9^{n-1} \times 8^n}{2^{n+1} \times 6^{n+1}} = \frac{3^{2n-2} \times 2^{3n}}{2^{n+1} \times 2^{n+1} \times 3^{n+1}} = \frac{3^{2n} \times 3^{-2} \times 2^{3n}}{2^n \times 2^1 \times 3^n \times 3^1 \times 2^n \times 2^1}$$

$$= 3^{2n-n-2-1} \times 2^{3n-n-n-1-1} = 3^{3n-3} \times 2^{n-2}$$

(10) عند تبسيط مقدار كسري يحتوي على عدة حدود في البسط وعدة حدود في المقام نقوم أولاً: بتحويل القيم والحدود إلى أعداد أولية مرفوعة لأس من غير تجزئة أو مرفوعة لأس بالتجزئة كما في الفقرة السابقة وبعدها نقوم بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل من البسط والمقام وبعدها يتم الاختصار إن وجد وبأبسط صورة ممكنة.

$$\frac{5^n + 5^{n-1}}{5^{n+1} - 5^{n-1}} = \frac{5^n + 5^n \times 5^{-1}}{5^n \times 5^1 - 5^n \times 5^{-1}} = \frac{5^n(1 + 5^{-1})}{5^n(5 - 5^{-1})} = \frac{\frac{5+1}{5}}{\frac{25-1}{5}}$$

$$\frac{6}{5} \times \frac{5}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

تذكير

بعض القوانين الرياضية المهم والضرورة التي يحتاجها الطالب في حل بعض المسائل

$$-2 \times -6 = +12$$

$$3x \times 5 = +15x$$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = +7$$

1- حاصل ضرب الحدود الجبرية المتشابهة في الإشارة دائماً (موجب +)

$$-8 \times 5 = -40$$

$$6y \times -25 = -150y$$

2- حاصل ضرب الحدود الجبرية المختلفة في الإشارة دائماً (سالب -)

ملاحظات مهمة

(1) يمكن ضرب الحدود الجبرية المختلفة في القسم الرمزي بعضها مع البعض.

القسم الرمزي

$$-4\boxed{x} + 7\boxed{y} = -28xy$$

(2) عند الضرب تجمع الأسس للأساسات المتساوية.

$$5x \times 3x^2 = 15x^{1+2} = 15x^3$$

$$6y^2 \times 4xy^3 = 24xy^{2+3} = 24xy^5$$

(3) الأساس السالب المرفوع إلى أس فردي ناتجه دائماً سالب (-)

أس فردي

$$(-2)^3 = -8$$

أس فردي

$$(-1)^5 = -1$$

الناتج أساس سالب

(4) الأساس السالب المرفوع إلى أس زوجي ناتجه دائماً موجب (+)

$$(-3)^2 = +9$$

$$(-5)^4 = +625$$

$$(7)^2 = 49$$

$$(8)^2 = 64$$

(5) الأساس الموجب المرفوع إلى أس فردي كان أم زوجي فإن ناتجه دائماً موجب (+)

توزيع عملية الضرب على الجمع

$$2 - (3 - x) = 2 - 3 + x = -1 + x$$

في المثال أعلاه: الإشارة التي تسبق القوس وهي إشارة (-) تتوزع داخل القوس حيث تضرب في كل إشارة موجودة داخل القوس، ثم يتم جمع الحدود كما سبق وتعلمنا.

$$\boxed{-2} (3 - x) = -6 + 2x$$

في المثال أعلاه: نقوم بتوزيع الحد كله مع الإشارة (أي نضرب الحد (-2) في جميع الحدود الموجودة داخل القوس)، ثم نقوم بالجمع للحدود إن وجد ذلك كما سبق وتعلمنا.

ملاحظة مهمة

حاصل جمع الحدود المتشابهة في المقدار والمختلفة في الإشارة يساوي دائماً (صفر)

$$-3\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 0$$

$$6y - 6y = 0$$

مثال 1/ جد قيمة $\frac{8^{-3} \times 18^2}{81 \times 16^{-2}}$

الحل/

$$\frac{8^{-3} \times 18^2}{81 \times 16^{-2}} = \frac{(2^3)^{-3} \times (3^2 \times 2)^2}{3^4 \times (2^4)^{-2}} = \frac{2^{-9} \times 3^4 \times 2^2}{3^4 \times 2^{-8}}$$

$$3^{4-4} \times 2^{-9+2+8} = 3^0 \times 2^1 = 1 \times 2 = 2$$

مثال 2/ إذا كان $m, n \in \mathbb{Z}$ فأثبت أن $\frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^m \times 5^{2n+m}} = \frac{5}{9}$

الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^m \times 5^{2n+m}} = \frac{5^3 \times (5 \times 3)^{m-2} \times (5^2)^{m+n}}{(3 \times 5^2)^m \times 5^{2n+m}} \\ &= \frac{5^3 \times 5^{m-2} \times 3^{m-2} \times 5^{2m+2n}}{3^m \times 5^{2m} \times 5^{2n+m}} = 5^{3+m-2+2m+2n-2m-2n-m} \times 3^{m-2-m} \\ &= 5 \times 3^{-2} = 5 \times \frac{1}{3^2} = \frac{5}{9} = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

مثال 3/ اختصر المقدار التالي بحيث تكون الأسس موجبة $\frac{(X^2)^3 \cdot Y^4 \cdot Z^5}{X^3 \cdot (Y^3)^2 \cdot Z^5}$

الحل/

$$\frac{(X^2)^3 \cdot Y^4 \cdot Z^5}{X^3 \cdot (Y^3)^2 \cdot Z^5} = \frac{X^{6-3} \cdot Z^{5-5}}{Y^{6-4}} = \frac{X^3 \cdot Z^0}{Y^2} = \frac{X^3 \cdot Z^0}{Y^2} = \frac{X^3 \cdot 1}{Y^2} = \frac{X^3}{Y^2}$$

مثال 4/ أثبت أن: $\frac{81^{n+1} \times 625^n}{9^{2n} \times 27 \times 25^{2n-1}} = 75$

الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{(3^4)^{n+1} \times (5^4)^n}{(3^2)^{2n} \times (3)^3 \times (5^2)^{2n-1}} = \frac{3^{4n+4} \times 5^{4n}}{3^{4n} \times 3^3 \times 5^{4n-2}} \\ &= 3^{4n-4n+4-3} \times 5^{4n-4n+2} = 3^1 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75 = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

مثال 5/ اختصر المقادير التالية بحيث تكون الأسس موجبة:

(a) $\frac{2 \times 7^{-1} + 2^{-2} \times 7}{2^{-1} \times 7^{-1}} = \frac{2 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{1}{2^2} \times 7}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{7}} = \frac{\frac{2}{7} + \frac{7}{4}}{\frac{1}{14}}$

$$= \frac{\frac{8+49}{28}}{\frac{1}{14}} = \frac{57}{28} \times \frac{14}{1} = \frac{57}{2}$$

(b) $\frac{2^{-2} \times 5^{-2} \times 2^6}{2^{-3} \times 5^{-3} \times 2^5} = \frac{2^{6-2} \times 5^{-2}}{2^{5-3} \times 5^{-3}} = \frac{2^4 \times 5^{-2}}{2^2 \times 5^{-3}}$

$$= 2^{4-2} \times 5^{-2+3} = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$$

مثال 6/ اثبت أن: $\frac{9^{\frac{1}{2}n+1} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n} - 3^{n-1}} = 18$

الحل/

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{9^{\frac{1}{2}n+1} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n} - 3^{n-1}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{2}n+1} + 3^{n+1}}{\sqrt{(3^2)^n} - 3^{n-1}}$$

$$= \frac{3^{2(\frac{1}{2}n+1)} + 3^{n+1}}{3^{\frac{2n}{2}} - 3^{n-1}} = \frac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}}$$

$$= \frac{3^n \times 3^2 + 3^n \times 3^1}{3^n - 3^n \times 3^{-1}} = \frac{3^n(3^2 + 3)}{3^n(1 - 3^{-1})} = \frac{9 + 3}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{12}{\frac{3-1}{3}} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = 12 \times \frac{3}{2} = 18 = \text{الطرف الأيمن}$$

الجزء الأول

إذا كان $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$ فإن كل عدد حقيقي X يحقق المعادلة $X^n = a$ يسمى جذراً نوياً للعدد a ويرمز له $a^{\frac{1}{n}}$ أو $\sqrt[n]{a}$

نتائج التعريف/

(1) $\sqrt[n]{0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$

(2) إذا كان n عدد طبيعي زوجي وكان a عدد حقيقي موجب فإن كلاً من العددين

$$X^n = a \text{ يحقق المعادلة } X = -\sqrt[n]{a}, X = \sqrt[n]{a}$$

(3) إذا كان n عدد طبيعي زوجي وكان a عدد حقيقي سالب فإنه لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ موجب } X^n = a \text{ لأن } X^n \text{ موجب}$$

(4) إذا كان n عدد طبيعي فردي وكان a عدد حقيقي فإنه يوجد عدد حقيقي واحد يحقق المعادلة

$$X^n = a$$

مبرهنة

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$ فإن

$$1- \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \left\{ \begin{array}{l} a \geq 0, b \geq 0 \\ \text{إذا كان } n \text{ عدد زوجي} \end{array} \right\}$$

$$2- \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ حيث } \left\{ \begin{array}{l} b > 0, a \geq 0, \text{ إذا كان } n \text{ عدد زوجي} \\ b \in \frac{\mathbb{R}}{\{0\}}, a \in \mathbb{R}, \text{ إذا كان } n \text{ عدد فردي} \end{array} \right.$$

الأسس ذات الأعداد النسبية

عند رفع مقام الجذر يصبح دليل الجذر
مقام الأس الذي تحت الجذر

$$\left. \begin{array}{l} \text{دليل الجذر} \quad \sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2 \\ \text{دليل الجذر} \quad \sqrt[4]{7^5} = 7^{\frac{5}{4}} \\ \text{دليل الجذر وهو (2)} \quad \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}} \end{array} \right\}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$$\left[\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \times 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}} \right]^{\frac{1}{n}} = 8 \text{ أثبت أن: مثال 7/}$$

الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \left[\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \times 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{2^{2n+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= [2^{3n}]^{\frac{1}{n}} = 2^{3n \times \frac{1}{n}} = 2^3 = 8 = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4n + n + n}{2} \\ = \frac{6n}{2} = 3n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \\ = \frac{2}{2} - 1 \\ = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

حلول تمارين (3-1)

س1/ جد ناتج ما يأتي:

a) $8^0 + 9^0 = 1 + 1 = 2$

b) $2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

c) $(16)^{-1} + 16 = \frac{1}{16} + 16 = \frac{1+256}{16} = \frac{257}{16}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2} = 2$

e) $\frac{2^{-3} \times 4^{-5}}{6^{-1} \times 3^3} = \frac{2^{-3} \times 2^{-5} \times 2^{-5}}{2^{-1} \times 3^{-1} \times 3^3} = \frac{2 \times 3}{2^3 \times 2^5 \times 2^5 \times 3^3} = \frac{2 \times 3}{2^{13} \times 3^3} = \frac{1}{9 \times 2^{12}}$

f) $\frac{10^3 \times 4^7}{10^{-5} \times 2^5} = \frac{2^3 \times 5^3 \times 2^7 \times 2^7}{2^{-5} \times 5^{-5} \times 2^5} = 2^{3+7+7-5} \times 5^{3+5} = 2^{17} \times 5^8$

g) $(\sqrt[5]{27})^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[5]{3^3})^{\frac{5}{3}} = (3^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = (3^{\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}})^1 = 3^1 = 3$

h) $3a^0 = 3 \times 1 = 3$

i) $(3a)^0 = 3^0 \times a^0 = 1 \times 1 = 1$

j) $(a+b)^0 = 1$

k) $(\sqrt[5]{-32})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt[5]{-32})^3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$

س2/ اكتب المقادير التالية بأبسط صورة:

a) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{20a^3}{45a}} = \sqrt{\frac{9}{16} \times \frac{20a^2}{45a}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a}{2}$

b) $(-a)^4 \left[\frac{(-a)^3 \sqrt[6]{729}}{3a} \right]^2 = (-a)^4 \left[\frac{(-a)^3 \sqrt[6]{3^6}}{3a} \right]^2$
 $= a^4 \left[\frac{(-a)^3 \times 3}{3a} \right]^2$
 $= \frac{a^4 \times a^6 \times 3^2}{3^2 \times a^2} = a^{4+6-2} = a^8$

c) $\sqrt{25b^2 c^{-8}} = \sqrt{\frac{25b^2}{c^8}} = \frac{5b}{\frac{c^2}{c^2}} = \frac{5b}{c^4}$

d) $\frac{3x^{-5} \times y^2}{2^{-1} \times y^{-2}} = \frac{3 \times 2 \times y^{2+2}}{x^5} = \frac{6y^4}{x^5}$ حيث $x \neq 0$

س3/ اكتب كلاً من العبارات الآتية بشكل يكون المقام فيها (1) ولا يكون تحت الجذر مستخدماً الأسس:

- a) $\frac{bc}{d} = bcd^{-1}$ حيث $d \neq 0$
- b) $\frac{1}{b^5} = b^{-1}$ حيث $b \neq 0$
- c) $\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ حيث $x \geq 0$
- d) $\frac{4b^2}{b^2c^2} = 4b^{2-2}c^{-2} = 4c^{-2}$ حيث $b \neq 0$
- e) $\frac{1}{b^2+c^2} = (b^2+c^2)^{-1}$
- f) $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$ حيث $x \neq 0$

س4/ إذا كان $a \in \bar{R}$ ، $m \leftarrow$ عدداً صحيحاً زوجياً فأي مما يأتي صائبة:

- a) $a^m > 0$ صائبة
- b) $a^m < 0$
- c) $a^m \geq 0$
- d) $a^m \leq 0$

س5/ إذا كان $a \in \bar{R}$ ، $m \leftarrow$ عدداً صحيحاً فردياً فأي مما يأتي صائبة:

- a) $a^m > 0$
- b) $a^m < 0$ صائبة
- c) $a^m \geq 0$
- d) $a^m \leq 0$

س6/ (أ) برهن أن: $a^{(x-y)^z} \cdot a^{(z-x)^y} \cdot a^{(y-z)^x} = 1$
الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= a^{xz-yz} \cdot a^{zy-xy} \cdot a^{yx-zx} \\ &= a^{xz+zy+yx-xy-yz-zx} = a^0 = 1 = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

(ب) برهن أن: $\left[x^{n^2-1} \div x^{n-1} \right]^{\frac{1}{n}} = x^{n-1}$
الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \left[\frac{x^{n^2-1}}{x^{n-1}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[x^{n^2-n-1+1} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[x^{n^2-n} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= x^{\frac{1}{n}(n^2-n)} = x^{\frac{n^2}{n}-\frac{n}{n}} = x^{n-1} = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

س7/ برهن أن: $\frac{1}{1+a^{b-c}} + \frac{1}{1+a^{c-b}} = 1$
الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{1}{1+\frac{a^b}{a^c}} + \frac{1}{1+\frac{a^c}{a^b}} \\ &= \frac{1}{\frac{a^c+a^b}{a^c}} + \frac{1}{\frac{a^b+a^c}{a^b}} \\ &= 1 \times \frac{a^c}{a^c+a^b} + 1 \times \frac{a^b}{a^b+a^c} = \frac{a^c}{a^c+a^b} + \frac{a^b}{a^b+a^c} = \frac{(a^c+a^b)}{(a^c+a^b)} = 1 \text{ و.هـ.م} \end{aligned}$$

س8/ أثبت أن: $\frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n-1}}{2 \times 3^{2n+1} - 3^{2n}} = \frac{11}{15}$
الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n} \times 3^{-1}}{2 \times 3^{2n} \times 3 - 3^{2n}} = \frac{3^{2n} \left(5 - 4 \times \frac{1}{3}\right)}{3^{2n} (2 \times 3 - 1)} = \frac{5 - \frac{4}{3}}{5} \\ &= \frac{\frac{15-4}{3}}{5} = \frac{11}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{15} = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

س9/ اختصر كلاً مما يأتي إلى أبسط صورة:

a) $\frac{6^{4n-1} \times 27^{2n}}{2^{n+1} \times 8^{n-1} \times 9^{n+2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{4n-1} \times 3^{4n-1} \times (3^3)^{2n}}{2^{n+1} \times (2^3)^{n-1} \times (3^2)^{n+2}} = \frac{2^{4n} \times 2^{-1} \times 3^{4n} \times 3^{-1} \times 3^{6n}}{2^n \times 2 \times 2^{3n} \times 2^{-1} \times 3^{2n} \times 3^4} \\ &= \frac{2^{4n-n-3n-1-1+3} \times 3^{4n+6n-2n-1-4}}{2 \times 3^{8n-5}} \\ &= \frac{2 \times 3^{8n}}{3^5} \end{aligned}$$

b) $\frac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3^n \times 3^2 + 3^n \times 3^1}{3^n - 3^n \times 3^{-1}} = \frac{3^n \times (3+1)}{3^n \left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{3 \times 4}{\frac{3-1}{3}} \\ &= \frac{12}{\frac{2}{3}} = 12 \times \frac{3}{2} = 18 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(9^{n+\frac{1}{4}}) \times \sqrt{3 \times 3^n}}{3 \times \sqrt{3^{-n}}} \right]^{\frac{1}{n}} = 27 \text{ برهن أن: } 10/$$

الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \left[\frac{((3^2)^{n+\frac{1}{4}}) \times (3 \times 3^n)^{\frac{1}{2}}}{3 \times \sqrt{\frac{1}{3^n}}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^{2n} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{n}{2}}}{\frac{3}{3^{\frac{n}{2}}}} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[\frac{3^{2n} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{n}{2}}}{1} \times \frac{3^{\frac{n}{2}}}{3} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^{2n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{3} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[\frac{3^{\frac{4n+n+n}{2}} \times 3}{3} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{\frac{6n}{2}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{\frac{3n}{1}} \right]^{\frac{1}{n}} = 3^3 = 27 = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

المعادلات الأسية البسيطة

[2-3] حل المعادلات الأسية البسيطة

تتضمن المعادلات الأسية Exponential Equation متغير في الأس.

ولحل هذا النوع من المعادلات نحتاج الملاحظات الآتية:

- 1- في أي معادلة: ((إذا تساوت الأساسات فسوف تتساوى الأسس بشرط الأساس $\neq 1$))
- 2- إذا كان $x^n = y^n$ فإن $x = y$ إذا كانت n فردية، $x = \pm y$ إذا كانت n زوجية
- 3- إذا كان $x^n = y^m$ حيث $(m=n=0)$ والآن لاحظ حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$\text{أ- } (x+2)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \Rightarrow (x+2)^{-\frac{3}{5}} = 3^{-\frac{3}{5}}$$

$$x+2 = 3 \Rightarrow x = 1$$

مج: {1}

$$\text{ب- } x^{\frac{1}{3}} = 8 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 2^3 \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3 = (2^3)^3$$

$$x = 2^6 \Rightarrow x = 512$$

مج: {512}

$$\sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 3^{-2} \Rightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \pm(3^{-2})^{\frac{3}{2}} \text{ ج-}$$

$$x = \pm 3^{-2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{27}$$

$$\{\pm \frac{1}{27}\} = \text{مج:}$$

مثال 1/ حل المعادلة: $2^{x^2-2x+1} = 4^{x+3}$

الحل/

نجعل الأساس نفسه في طرفي المعادلة $2^{x^2-2x+1} = 2^{2(x+3)}$

$\therefore x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$ إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -1$$

مجموعة الحلول = $\{-1, 5\}$

وتسمى مثل هذه المعادلة بالمعادلة الأسية لأن الأسس متغيرة.

مثال 2/ حل المعادلة: $3^{2x+1} - 4 \times 3^{x+2} = -81$

الحل/

$$[3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^x \times 3^2 + 81 = 0] \div 3$$

$$3^{2x} - 12 \times 3^x + 27 = 0$$

$$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$$

أما $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

أو $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

مجموعة الحلول = $\{1, 2\}$



مثال 3/ جد قيمة x إذا كان: (أ) $3^{x-1} = 5^{x-1}$ (ب) $(x+3)^5 = 4^5$ (ج) $(x-1)^6 = 2^6$

الحل/

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

أ- بتطبيق ملاحظة (3)

$$x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$$

ب- بتطبيق ملاحظة (2)

$$x - 1 = \pm 2$$

ج- بتطبيق ملاحظة (2)

$$x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

$$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$S = \{-1, 3\}$$



مثال 4/ حل المعادلة في R حيث $8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x+1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x+2}{3}} = 14$ **الحل/**

$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} (1 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}) = 14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} (1 + 2 + 4) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} \times 7 = 14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} = \frac{14}{7} \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} = 2$$

$$(2^3)^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^1$$

$$\frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$



حلول تمارين (3-2)

س1/ حل كل من المعادلات الآتية:

$$1) \sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{27}$$

$$x^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3^3}$$

$$\left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(3^{-3}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$x = 3^{-5}$$

$$x = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

$$2) \left(\sqrt[5]{243}\right)^2 = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$(243)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$$

$$(3^5)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$$

$$3^2 = x^{-1}$$

$$9 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$3) (x+2)^{\frac{1}{2}} = 3$$

بتربيع الطرفين

$$\sqrt{x+2} = 3$$

$$x+2 = 9$$

$$x = 9 - 2$$

$$x = 7$$

$$4) 10^{(x-4)(x-5)} = 100$$

$$10^{(x-4)(x-5)} = 10^2$$

$$(x-4)(x-5) = 2$$

$$x^2 - 5x - 4x + 20 - 2 = 0$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(x-6)(x-3) = 0$$

$$x = 6 \text{ or } x = 3$$

$$S = \{(6,3)\}$$

$$5) -6 \times 5^x + 25^x + 5 = 0$$

$$25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$$

$$5^{2x} - 6 \times 5^x + 5 = 0$$

$$(5^x - 5)(5^x - 1) = 0$$

$$5^x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\text{or } 5^x - 1 = 0 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\therefore S = \{1,0\}$$

$$6) 6^{x^2-3x-2} = 36$$

$$6^{x^2-3x-2} = 6^2$$

$$x^2 - 3x - 2 = 2$$

$$x^2 - 3x - 2 - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$\text{or } x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$S = \{4, -1\}$$

7) $3^{(x^2+5x+4)} = 27^{(-x-4)}$

$$3^{(x^2+5x+4)} = 3^{3(-x-4)}$$

$$x^2 + 5x + 4 = 3(-x - 4)$$

$$x^2 + 5x + 4 = -3x - 12$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(x + 4)(x + 4) = 0$$

$$x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

8) $2^{2x+3} - 57 = 65(2^x - 1)$

$$2^{2x} \times 2^3 - 57 = 65 \times 2^x - 65$$

$$8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x - 57 + 65 = 0$$

$$8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x + 8 = 0$$

$$(8 \times 2^x - 1)(2^x - 8) = 0$$

$$8 \times 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 8 \times 2^x = +1$$

$$2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{-3}$$

$$\boxed{x = -3}$$

$$\text{or } 2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 8$$

$$2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$S = \{-3, 3\} \text{ مجموعة الحل}$$

9) $5(5^x + 5^{-x}) = 26$

$$5 \times 5^x + 5 \times 5^{-x} = 26$$

$$5 \times 5^x + 5 \times \frac{1}{5^x} = 26$$

$$5 \times 5^x \times 5^x + 5 \times 5^x \times \frac{1}{5^x} = 5^x \times 26$$

$$5 \times 5^{2x} + 5 = 26 \times 5^x$$

$$5 \times 5^{2x} - 26 \times 5^x + 5 = 0$$

$$(5 \times 5^x - 1)(5^x - 5) = 0$$

$$5 \times 5^x - 1 \Rightarrow 5 \times 5^x = 1$$

$$5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$\text{Or } 5^x - 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\therefore S = \{-1, 1\}$$



س2/ حل المعادلة في R : $3^{x+1} \times 9^x - 9^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$
الحل/

$$3^x \times 3 \times 3^{2x} - 3^{2 \times \frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$$

$$3^{3x} \times 3 - 3 \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$$

$$[3^{3x} \times 3 = 3 \times 3^{\frac{3}{x}}] \div 3$$

$$3^{3x} = 3^{\frac{3}{x}} \Rightarrow 3x = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \therefore S = \{1, -1\}$$

س3/ حل المعادلة التالية: $\frac{(243)^{x-1} \times (27)^{x-2}}{(729)^{\frac{1}{2}x}} = 81$
الحل/

$$\frac{(3^5)^{x-1} \times (3^3)^{x-2}}{(3^6)^{\frac{1}{2}x}} = 81 \Rightarrow \frac{3^{5x} \times 3^{-5} \times 3^{3x} \times 3^{-6}}{3^{3x}} = 81$$

$$3^{5x+3x-3x-5-6} = 3^4 \Rightarrow 3^{5x-11} = 3^4 \Rightarrow 5x - 11 = 4$$

$$5x = 4 + 11 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{5} \Rightarrow x = 3$$

س3/ جد قيمة $x \in R$ إذا علمت

$$\frac{4^x + 4(2^x) + 3}{4^x + 2^x} = 25 \quad \text{(ب)}$$

$$3^{x^2-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2+1} = 39 \quad \text{(أ)}$$

الحل/

$$\frac{(2^2)^x + 4(2^x) + 3}{(2^2)^x + 2^x} = 25$$

$$\frac{2^{2x} + 4 \times 2^x + 3}{2^{2x} + 2^x} = 25$$

$$\frac{(2^x + 3)(2^x + 1)}{2^x(2^x + 1)} = 25$$

$$\frac{(2^x + 3)}{2^x} = 25$$

$$(2^x + 3) = 25 \times 2^x$$

$$2^x - 2^x + 3 = (25 \times 2^x) - 2^x$$

$$+3 = (24 \times 2^x)$$

$$2^x = \frac{3}{24} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8}$$

$$2^x = \frac{1}{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{-3}$$

$$x = -3 \quad \text{إذا تساوت الأسس تساوت الأساس}$$

$$3^{x^2} \times 3^{-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2} \times 3 = 39$$

$$3^{x^2} \left(\frac{1}{3} + 1 + 3 \right) = 39$$

$$3^{x^2} \left(\frac{1 + 3 + 9}{3} \right) = 39$$

$$3^{x^2} \times \frac{13}{3} = 39$$

$$\frac{3^{x^2} \times 13}{3} = \frac{39}{1}$$

$$3^{x^2} \times 13 = 117$$

$$3^{x^2} = \frac{117}{13}$$

$$3^{x^2} = 9$$

$$3^{x^2} = 3^2$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

العمليات على الجذور

[3-3] الجذور والعمليات عليها

بعض الجذور هي كميات لا يمكن إيجاد قيمتها بصورة مضبوطة مثل: $\sqrt[3]{6}, \sqrt{5}, \sqrt[5]{61}, \sqrt[3]{10}, \sqrt{2}$ تدعى هذه الجذور بالجذور الصماء وبالرجوع إلى موضوع الأسس نلاحظ أن هذه الجذور ما هي إلا كميات ذات أسس كسرية.

مثلاً / $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}, \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

الخواص /

1- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ وعكس الخاصية صحيح.

مثلاً / $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{53} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{15x^3}$, $\sqrt[5]{6} \times \sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{72}$

2- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ وعكس الخاصية صحيح حيث $y \neq 0$

مثلاً / $\frac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{21}{3}} = \sqrt[3]{7}$, $\frac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{2y}} = \sqrt[3]{\frac{3x}{2y}}$

مثال 1/ رتب الجذور الآتية تصاعدياً $\sqrt[6]{147}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{12}$ الحل/

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\sqrt[6]{147} = \sqrt[6]{147}$$

الترتيب يكون $(\sqrt{5}, \sqrt[3]{12}, \sqrt[6]{147})$

مثال 2/ رتب الجذور الآتية تنازلياً $\sqrt[9]{10}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{5}$

الحل/ المضاعف المشترك الأصغر لأدلة الجذور هو (18)

$$\sqrt[18]{10^2}, \sqrt[18]{2^6}, \sqrt[18]{5^3}$$

$$\sqrt[18]{100}, \sqrt[18]{64}, \sqrt[18]{125}$$

$$\sqrt[18]{125}, \sqrt[18]{100}, \sqrt[18]{64}$$

إذن الترتيب هو $(\sqrt[6]{5}, \sqrt[9]{10}, \sqrt[3]{2})$

[3-4] العددان المترافقان $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ Conjugate Numbers

نعلم أن العامل المنسب هو الذي لو ضربت به الكمية غير النسبية لتحولت إلى كمية نسبية

فالعامل المنسب للمقدار $2\sqrt{3}$ هو $\sqrt{3}$ لأن $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$

والعامل المنسب للمقدار $\sqrt[3]{3}$ هو $\sqrt[3]{3^2}$ لأن $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

لأن ضربهما

$$(5 + \sqrt{6})(5 - \sqrt{6}) = 25 - 6 = 19$$

$$5 - \sqrt{6}$$

والعامل المنسب للمقدار $5 + \sqrt{6}$

$$(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$$

$$= 9 \times 2 - 4 \times 5 = -2$$

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

والعامل المنسب للمقدار $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

$$(\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1)$$

$$= \sqrt[3]{125} - 1 = 5 - 1 = 4$$

(فرق بين مكعبين)

$$\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1$$

والعامل المنسب للمقدار $\sqrt[3]{5} - 1$

مثال 1/ بسط بحيث يكون المقام كمية نسبية: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

مدرس مادة الرياضيات

الحل/

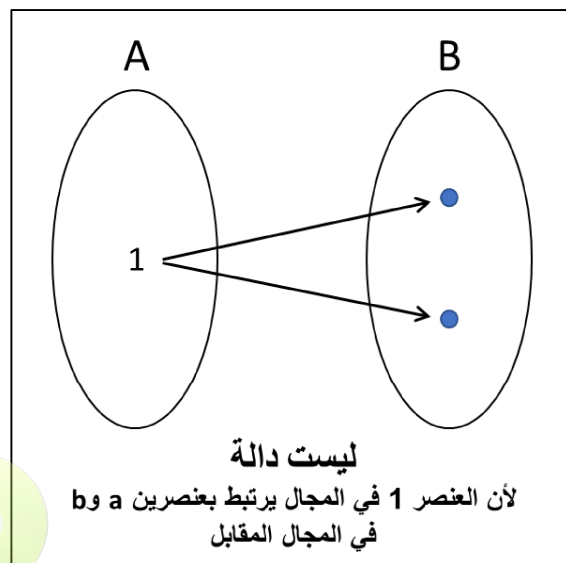
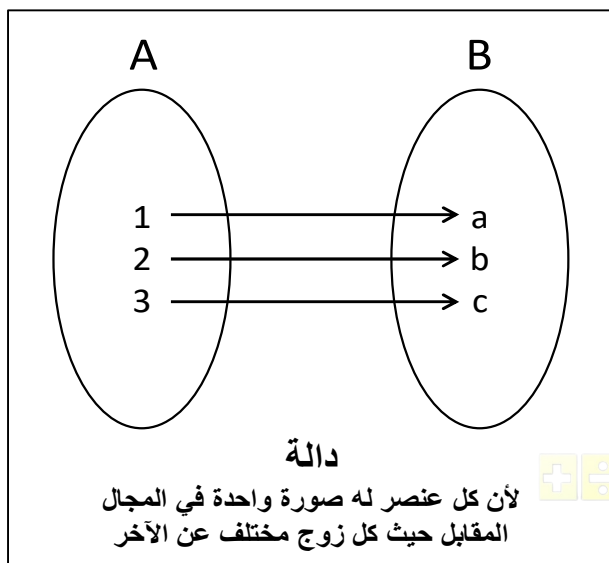
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

$$\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 3$$

الدوال الحقيقية

مفهوم الدالة: إذا كانت العلاقة من مجموعة (A) إلى المجموعة (B) حيث كل عنصر من المجموعة (A) له صورة واحدة في المجموعة (B) أي أن كل زوج يظهر لنا مرة واحدة.



التعبير الرياضي للدالة: حيث يعبر عن الدالة بالصيغة الرمزية الآتية:

$$f: A \rightarrow B \text{ حيث يقرأ } f \text{ دالة من } A \text{ إلى } B$$

$$\text{حيث } \forall x \in A, \text{ يوجد } y = f(x) \in B$$

(1) إذا كان الزوج المرتب (x, y) ينتمي إلى بيان الدالة (f) .

$$f(x) = x \rightarrow y \text{ حيث } (y) \text{ هو صورة العنصر } x \text{ تحت تأثير الدالة } (f).$$

(2) تتعين الدالة من ثلاث مكونات وهي:

(a) **المجال:** وتمثله المجموعة (A) وهي المجموعة التي ينتمي إليها المتغير (x) إذا كان (x, y)

ينتمي إلى بيان الدالة (f) .

(b) **المجال المقابل:** وتمثله المجموعة (B) وهي المجموعة التي ينتمي إليها المتغير (y) إذا كان

(x, y) ينتمي إلى بيان الدالة (f) .

(c) **قاعدة الدالة f:** هي العلاقة التي تربط عناصر (A) بعناصر (B) أي أن $y = f(x)$.

(3) تعطى قاعدة الدالة بإحدى الطريقتين الآتيتين:

(a) ذكر بيان الدالة $f: A \rightarrow B$ وهذا يعني أنها تكتب على شكل أزواج مرتبة

$$f(x) = \{(x, y): y = f(x), x \in A\}$$

(b) أو يذكر المعادلة التي تقوم بربط المتغير (x) بالمتغير (y).

الدوال الحقيقية

تسمى الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها (A) ومجالها المقابل (B) هما مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية (R).

حيث $R \subseteq \{x: x \in R, f(x) \in R\}$ المجال المقابل، المجال

أوسع مجال للدالة f في R :

هو مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية إلى (A) والتي يكون عندها $f(x) \in R$

ملاحظة مهمة ((عندما تعطى قاعدة دالة ويطلب تحديد مجالها، فإن المجال سيكون أوسع مجال ممكن في (R))

أوسع مجال للدالة

أولاً / إذا كانت الدالة $f(x)$ كثيرة الحدود فإن أوسع مجال للدالة هو R .

مثال 1 / أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = 3x^2 + 7$
الحل / أوسع مجال للدالة هو R (لأن الدالة كثيرة الحدود)

مثال 2 / عين مجال للدالة f (أوسع مجال للدالة) إذا كانت $f(x) = x^2$

الحل / $\because x^2$ معرفة دوماً في R مهما كانت $x \in R$

$\therefore$ أوسع مجال للدالة هو R أي مجال $R = f$

كيف نتعرف على الدوال الكثيرة الحدود (ما هي مواصفاتها)

a- مجال الدالة فيها ومجالها المقابل $R =$ (أو مجموعة جزئية من R).

b- قاعدة الدالة تتكون من حد واحد أو عدة حدود.

c- أن أس (x) في أي حد من حدود الدالة يكون عدد طبيعي.

صور الدوال الكثيرة الحدود

(a) الدالة الثابتة: حيث $f(x)=a$ (حيث a عدد ثابت) فإن $a \in R$.

تمثله كل الدوال الثابتة: $f(x) = 17$, $f(x) = \sqrt{3}$, $f(x) = -8$

(b) الدالة الخطية: حيث $f(x)=ax+b$ [$a, b, c \in R, a \neq 0$]

أمثلة على الدالة الخطية: $f(x) = \sqrt{2}x + 12$, $f(x) = 6x + 11$

(c) الدالة التربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

أمثلة على الدوال التربيعية: $f(x) = 9x^2 - 4$, $f(x) = 3x^2 + 5x - 5$

(d) الدالة التكعيبية: مثل $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

ثانياً / إذا كانت الدالة كسرية (مكونة من بسط ومقام) فإن أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$ ما عدا الأعداد التي تجعل المقام = صفر

مثال 3/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

الحل/ نجعل المقام مساوياً للصفر $\leftarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

نقوم بتحليل المعادلة بواسطة التجربة $\leftarrow (x - 3)(x - 2) = 0$

إيجاد قيم (x) التي تجعل المقام مساوياً للصفر $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ أما

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

∴ أوسع مجال للدالة f هو $\mathbb{R} / \{2, 3\}$

ثالثاً / إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله زوجي فإن أوسع مجال للدالة يستخرج كما يلي:

(a) إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله زوجي والجذر في البسط تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$ ما عدا العدد الذي يجعل القيمة التي تحت الجذر $\leq$ صفر.

مثال 4/ أوجد أوسع مجال للدالة $\sqrt{x+7}$ $\leftarrow f(x)$ الدليل وهو زوجي
الحل/ ∴ الدالة دليها زوجي (تربيعي)
∴ الجذر يقع في البسط

$x+7 \geq 0$

$x \geq -7$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in \mathbb{R}, x \geq -7\}$

(b) إذا كانت الدالة تحتوي على جذر دليله زوجي والجذر يقع في المقام تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$ ما عدا الأعداد التي تجعل القيم التي تحت الجذر التربيعي $<$ صفر.

مثال 5/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+6}}$

الحل/ ∴ الدالة دليها زوجي (تربيعي) والجذر يقع في المقام

$3x + 6 > 0$

$3x > -6$

$\frac{1}{3} \times 3x > \frac{1}{3} \times -6$

$x > -2$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in \mathbb{R}, x > -2\}$

رابعاً / إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله فردي وكان الجذر في البسط تحديداً، فإن أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$.

مثال 6/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt[5]{x-4}$

الحل/ :: الجذر في البسط ودليله فردي وهو (5). :: أوسع مجال للدالة هو R .

خامساً / إذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله فردي وكان الجذر في المقام فإن أوسع مجال للدالة هو R ما عدا الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفر.

مثال 7/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x-5}}$

الحل/ $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

:: أوسع مجال للدالة هو $R / \{5\}$.

مثال 8/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{3x+5}$

الحل/ $3x + 5 = 0$

$3x = -5$

$x = \frac{-5}{3}$

:: أوسع مجال للدالة هو $R / \left\{\frac{-5}{3}\right\}$.

مثال 9/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{x}$

الحل/ $x \geq 0$

:: أوسع مجال للدالة f هو $\{x : x \in R, x \geq 0\}$

مثال 10/ أوجد أوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

الحل/ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

:: أوسع مجال للدالة هو $R / \{1\}$.

التمثيل البياني للدوال الحقيقية

الجدول الآتي لبعض الدوال المرتبة:

تمثيل الدالة $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax^2 + b$

هذه الدالة يمثلها قطعاً مكافئاً رأسه النقطة $(0, y)$ ويكون بشكل:

U بيانها يقع في النصف الأعلى من المستوى الإحداثي

∩ بيانها يقع في النصف الأسفل من المستوى الإحداثي

أولاً / تمثيل الدالة الخطية:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = ax + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ لتمثيل هذه الدالة نأخذ نقطتين (على الأقل) من مجال الدالة ونجد $f(x)$ لكل نقطة ونعين الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ في المستوى الديكارتي ونصل بينهما بمستقيم.

مثال 1/ مثل الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = x - 2$ بيانياً؟

الحل/ إن التمثيل البياني لهذه الدالة هو مستقيم

فعندما $x=1$ مثلاً فإن $y = f(1) = 1 - 2 = -1$

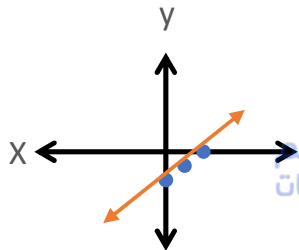
وعندما $x=2$ فإن $y = f(2) = 2 - 2 = 0$

وعلى ذلك فإن الزوجان المرتبطان $a(1, -1), b(2, 0)$

ينتميان إلى بيان الدولة وتعيينان النقطتين a, b

ويكون المستقيم (ab) هو المستقيم المطلوب

x	y	(x,y)
1	-1	(1,-1)
2	0	(2,0)
0	-2	(0,-2)



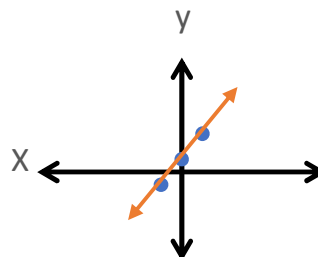
مثال 2/ مثل الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = 2x + 1$ بيانياً؟

الحل/

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$f(-1) = (2 \times -1) + 1 = -1$$

x	y	(x,y)
1	3	(1,3)
-1	-1	(-1,-1)



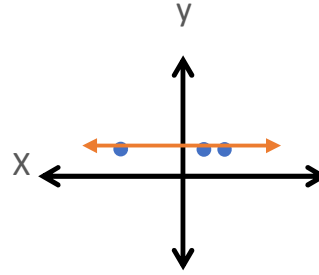
مثال 3/ مثل الدالة $f: R \rightarrow R$ بحيث $f(x) = 2$ بيانياً؟
الحل/ تسمى هذه الدالة بالثابتة وتمثل مستقيماً يوازي محور السينات

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = 2$$

$$f(-3) = 2$$

x	y	(x,y)
1	2	(1,2)
2	2	(2,2)
-3	2	(-3,2)



لتمثيل مثل هذه الدوال نأخذ خمس قيم (على الأقل) لـ x من مجال الدالة ونجد $f(x)$ لكل منها باستخدام قاعدة التعريف التالية:

تعريف

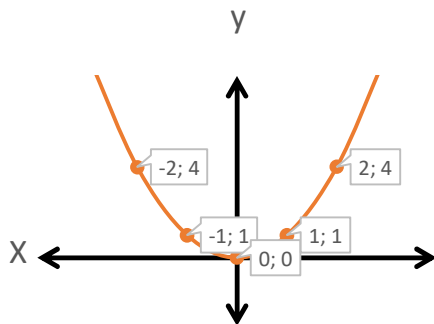
التمثيل البياني للدالة $f: R \rightarrow R$ بحيث $f(x) = ax^2 + b$ حيث $a, b \in R$ وإن $a \neq 0$ وهي تمثل منحنياً وليس مستقيماً

مثال 4/ مثل الدالة $f: R \rightarrow R$ بحيث $f(x) = x^2$ بيانياً؟
الحل/ نأخذ خمس قيم لـ x ونعوضها في $f(x) = x^2$

$$f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

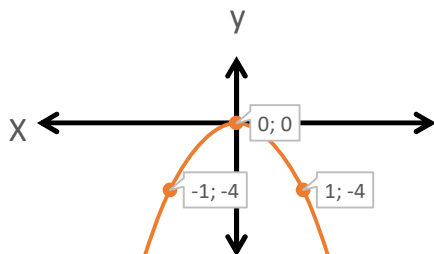
$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$



x	y	(x,y)
2	4	(2,4)
1	1	(1,1)
0	0	(0,0)
-1	1	(-1,1)
-2	4	(-2,4)

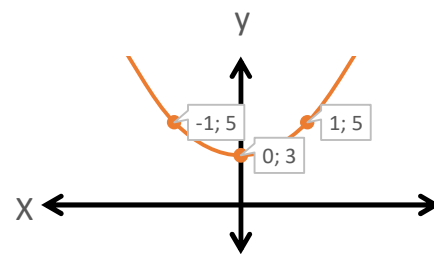
مثال 6/ مثل الدالة $f(x) = -4x^2$ بيانياً؟

x	1	0	-1
y	-4	0	-4



مثال 5/ مثل الدالة $f(x) = 2x^2 + 3$ بيانياً؟

x	1	0	-1
y	5	3	5



2024

مثال 8/ مثل الدالة $f: R \rightarrow R$
بحيث $y = 1 - x^2$ بيانياً؟

$$y = 1 - (2)^2 = -3$$

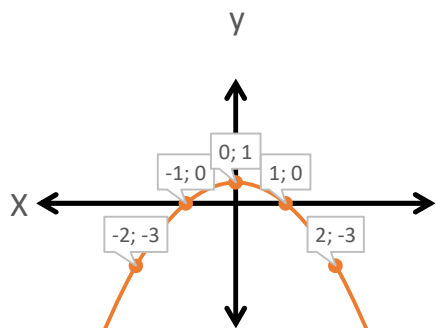
$$y = 1 - (1)^2 = 0$$

$$y = 1 - (0)^2 = 1$$

$$y = 1 - (-1)^2 = 0$$

$$y = 1 - (-2)^2 = -3$$

x	y	(x,y)
2	-3	(2,-3)
1	0	(1,0)
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)
-2	-3	(-2,-3)



مثال 7/ مثل الدالة $f: R \rightarrow R$
بحيث $y = x^2 + 3$ بيانياً؟

$$y = (2)^2 + 3 = 7$$

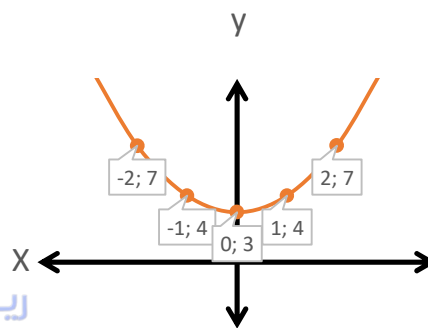
$$y = (1)^2 + 3 = 4$$

$$y = (0)^2 + 3 = 3$$

$$y = (-1)^2 + 3 = 4$$

$$y = (-2)^2 + 3 = 7$$

x	y	(x,y)
2	7	(2,7)
1	4	(1,4)
0	3	(0,3)
-1	4	(-1,4)
-2	7	(-2,7)

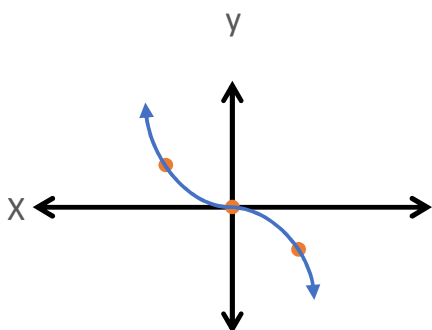


ثالثاً / التمثيل البياني للدالة التكعيبة:

تمثيل الدالة $f(x) = ax^3 + b$, $a, b \in R, a \neq 0$

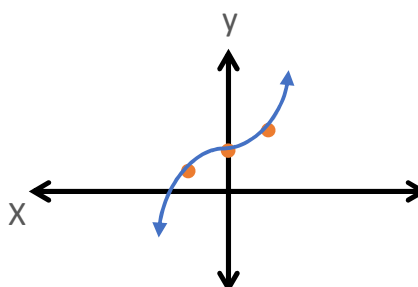
مثال 2/ مثل الدالة $f(x) = -x^3$

x	1	0	-1
y	-1	0	1



مثال 1/ مثل الدالة $f(x) = x^3 + 2$

x	1	0	-1
y	3	2	1



رابعاً / تمثيل الدالة $f_a(x) = a^x$

لقد تعرفنا على الرمز a^x حيث كان الأس عدداً نسبياً، ورأينا أن قوانين الأسس في حالة كون الأس عدداً صحيحاً، بقيت نفسها عندما أصبح الأس عدداً نسبياً.
وإذا كان a عدداً حقيقياً موجباً ($a \neq 1$)، وكان x عدداً حقيقياً فالرمز a^x يدل على قوة العدد (أسها x وأساسها a).

تعريف (3-3)

إذا كان $x \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$ وكان $f(x) = a^x$
فإن $f(x)$ تسمى الدالة الأسية للأساس a (Exponential Function)

فمثلاً / $f_2(x) = 2^x$, $f_3(x) = 3^x$, $h_{\sqrt{5}}(x) = (\sqrt{5})^x$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

مثال 9/

(أ) جد قيم الدالة $f(x) = 2^x$ من أجل $x = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ ، ثم استغف من ذلك في رسم جزء من منحنى هذه الدالة.

(ب) ابحث عن طريقة للإفادة من المنحنى السابق في رسم جزء من منحنى هذه الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x)$ على الشكل نفسه.

الحل / (أ) $f(x) = 2^x$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
2^x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(ب) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$

$f(-x)$

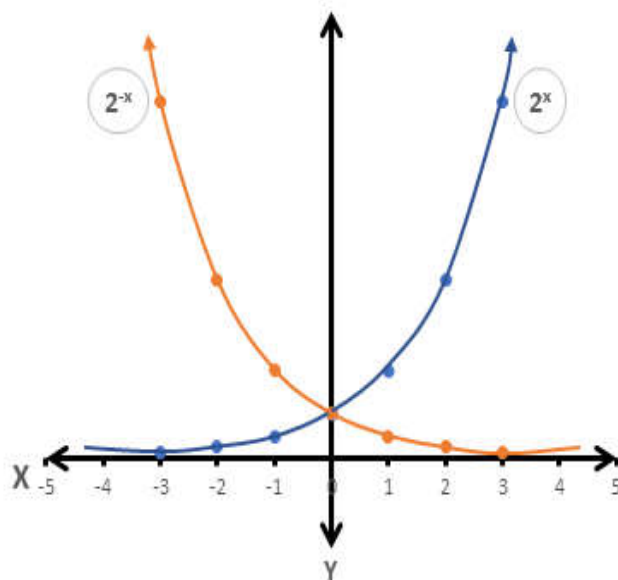
ولنفرض R_y تناظر بالنسبة لمحور الصادات

$R_y : (x, y) = (-x, y)$

أي أن صورة $(x, 2^x) = (-x, 2^x)$

لذلك فإتينا نحصل على منحنى لدالة

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ من المنحنى $f(x) = 2^x$



بالتناظر حول محور الصادات كما موضح في الشكل (3-1)

بعض خصائص الدالة الأسية $f(x) = a^x$

(1) إذا قمنا برسم منحنيات الدوال: $2^x, 3^x, 4^x, 5^x, \dots$

وكذلك الدوال: $\left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x, \left(\frac{1}{4}\right)^x, \left(\frac{1}{5}\right)^x, \dots$

فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات:

الأولى: عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x .

الثانية: عندما $1 > a > 0$ حيث

تتناقص قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة

x .

وقد رسمنا في الشكل (3-2) ستة من

المنحنيات (رسم جزء من كل منحنى)

ثلاثة فيها $a > 1$ وثلاثة أخرى فيها 1

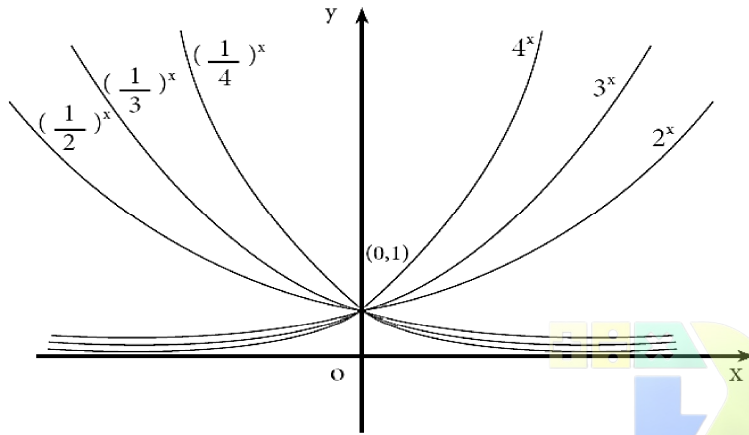
$a > 0$ وقد اخترنا قيم a في هذه

الأخيرة مقلوب قيم a في الثلاثة الأولى

ونلاحظ أن جميع هذه المنحنيات تمر

بالنقطة $(0,1)$.

(2) بالرجوع إلى المنحني البياني لأية دالة أسية a^x ، $a \neq 0$ نجد أن مجالها R .



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

س/ إضافي/ جد مجال كل من الدوال التالية:

(ب) $f(x) = \frac{2x+6}{x^2-x-6}$
الحل/

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x - 3)(x + 2) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$S = \{3, -2\}$ = مج :

$R/\{3, -2\}$ = أوسع مجال للدالة هو :

(أ) $f(x) = x^3 + x^2 - 3$
الحل/

∴ الدالة كثيرة الحدود

∴ أوسع مجال للدالة هو R .

د) $f(x) = \sqrt{x+2}$
الحل/

$$x+2 \geq 0$$

$$x+2-2 \geq 0-2$$

$$x \geq -2$$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in \mathbb{R}, x \geq -2\}$

ج) $f(x) = \sqrt{4-x}$
الحل/

$$4-x \geq 0$$

$$-4+4-x \geq 0-4$$

$$[-x \geq -4] \times -1$$

$$x \leq 4$$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 4\}$

حلول تمارين (3-3)

س1/ أ) أختصر $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \left[\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} - \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} \right]^{-1}$

الحل/

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \left[\frac{(a+b) - (a-b)}{\sqrt{a-b} \times \sqrt{a+b}} \right]^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \left[\frac{a+b-a+b}{\sqrt{a-b} \times \sqrt{a+b}} \right]^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \left[\frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}} \right]^{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \times \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2b} = \frac{(\sqrt{a^2-b^2})^2}{2b(a+b)} = \frac{a^2-b^2}{2b(a+b)}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b)}{2b(a+b)} = \frac{a-b}{2b}$$



ب) إذا كان $x = \sqrt[3]{2} + 1$, $y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$ فأثبت أن $xy = 3$

الحل/

هذا ناتج مجموع مكعبي حدين ← $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$ = الطرف الأيسر

$$= (\sqrt[3]{2})^3 + 1$$

نعيده إلى وضع الأصلي

$$= 2 + 1 = 3 = \text{الطرف الأيمن}$$

س2/ مثل الدوال الآتية:

$$f(x) = -4x^2 + 5 \text{ (a)}$$

الحل/

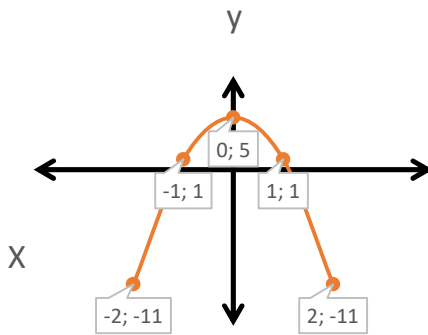
$$f(2) = -4(2)^2 + 5 = -11$$

$$f(1) = -4(1)^2 + 5 = 1$$

$$f(0) = -4(0)^2 + 5 = 5$$

$$f(-1) = -4(-1)^2 + 5 = 1$$

$$f(-2) = -4(-2)^2 + 5 = -11$$



x	y	(x,y)
2	-11	(2,-11)
1	1	(1,1)
0	5	(0,5)
-1	1	(-1,1)
-2	-11	(-2,-11)

$$f(x) = x - 8 \text{ (b)}$$

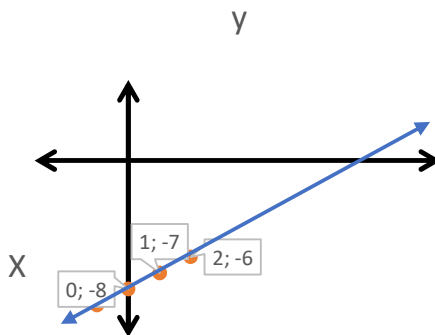
الحل/

$$f(2) = 2 - 8 = -6$$

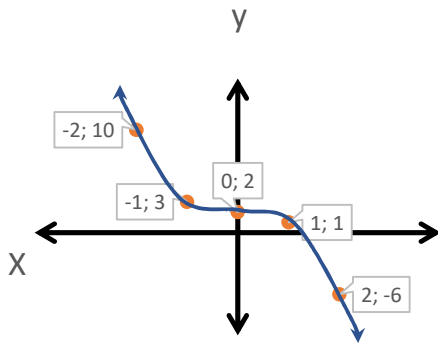
$$f(1) = 1 - 8 = -7$$

$$f(0) = 0 - 8 = -8$$

$$f(-1) = -1 - 8 = -9$$



x	y	(x,y)
2	-6	(2,-6)
1	-7	(1,-7)
0	-8	(0,-8)
-1	-9	(-1,-9)



x	y	(x,y)
2	-6	(2,-6)
1	1	(1,1)
0	2	(0,2)
-1	3	(-1,3)

$f(x) = 2 - x^3$ (c)
الحل

$$f(2) = 2 - (2)^3 = -6$$

$$f(1) = 2 - (1)^3 = 1$$

$$f(0) = 2 - (0)^3 = 2$$

$$f(-1) = 2 - (-1)^3 = 3$$

س3/ جد أوسع مجال للدوال التالية:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 9$

الحل/ أوسع مجال للدالة هو R لأن الدالة كثيرة الحدود.
لأن أي قيمة عددية حقيقية تعطى إلى (x) فإن $x \in R$ دائماً.

b) $f(x) = \frac{1-x}{x+9}$

الحل/ $x+9 = 0$
 $x = -9$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \{-9\}$.
لأن (-9) يجعل المقام يساوي (صفر) وهذا لا ينتمي للأعداد الحقيقية.

c) $f(x) = \sqrt{x-9}$

الحل/ $x - 9 \geq 0$
 $x \geq 9$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R, x \geq 9\}$

d) $f(x) = \sqrt{3-5x}$

الحل/ $3 - 5x \geq 0$

$$-5x \geq -3$$

$$\frac{-1}{5} \times -5x \leq \frac{-1}{5} \times -3$$

$$x \leq \frac{3}{5}$$

∴ أوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R, x \leq \frac{3}{5}\}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$

الحل / $x^2 - 9 = 0$

$(x - 3)(x + 3) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

∴ أوسع مجال للدالة هو $R / \{-3, 3\}$

س4/ أوجد ناتج ما يأتي بحيث يكون المقام عدد نسبي:

أ- $\frac{3}{a-b} \times \sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}}$
الحل/

$$\begin{aligned} & \frac{3}{a-b} \times \sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}} \\ &= \frac{3}{a-b} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{x}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{(a-b)^{\frac{5}{2}}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{x} \times x} \\ &= \frac{(a-b)^{\frac{5}{2}}}{x \times (a-b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(a-b)^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}}{x} = \frac{(a-b)^{\frac{5-3}{2}}}{x} = \frac{(a-b)^{\frac{2}{2}}}{x} = \frac{a-b}{x} \end{aligned}$$

ب- $\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})}$
الحل/

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(\frac{3+1}{\sqrt{3}})} = \frac{(3\sqrt{3}\sqrt{3}) - (2\sqrt{2}\sqrt{2})}{3\sqrt{3} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{9-4}} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{5}{3\sqrt{3} \times \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{3 \times 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

ج- $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$
الحل/

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

س5/ أثبت أن: $0 = \frac{-15}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+3}$

الحل/

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{-15}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{-15}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{(\sqrt{x}-2)} - \frac{3}{(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{-15 + 3(\sqrt{x}+3) - 3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{-15 + 3\sqrt{x} + 9 - 3\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\text{zero}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = 0 = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

س6/ ارسم جزءاً من المنحني البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

الحل/

$$x = 3 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow y = \frac{1}{125}$$

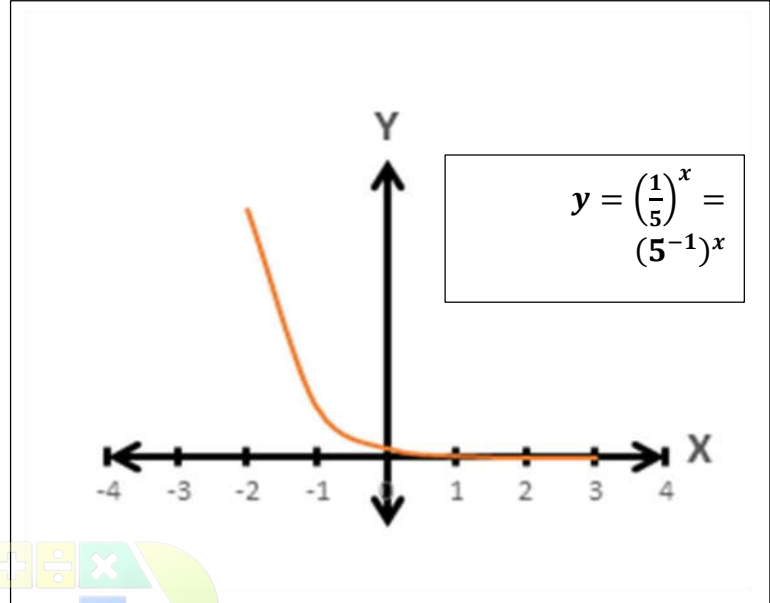
$$x = 2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{25}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \Rightarrow y = 5$$

$$x = -2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \Rightarrow y = 25$$



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

أسئلة حلول الفصل

س1/ برهن أن: $\frac{(2^x)^{x-1}}{2^{x-1}} \div \frac{(2^{x-1})^{x+1}}{4^{x+1}} = 16$

س2/ برهن أن: $\frac{3^{1-n}}{2^{-(n+1)}} \times \frac{25^{1-n}}{9^{-n}} \div \frac{30^{n-1}}{(125)^{n-1}} = 36$

س3/ أثبت أن: $\frac{4^x \times 9^{2x+2} \times 3^{2x-5}}{4^{x-2} \times 3^{6x-1}} = 16$

س4/ أثبت أن: $\frac{2^{n+1} \times 3^{x-5} + 2^{n-1} \times 3^{x-4}}{2^n \times 3^{x-3} + 2^{n-2} \times 3^{x-4}} = \frac{14}{39}$

س5/ أوجد أوسع مجال للدوال التالية:

1) $f(x) = \frac{12}{\sqrt{x-3}}$

5) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x-3}}$

2) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-2}-2}$

6) $f(x) = \sqrt{3x+5}$

3) $f(x) = \frac{7}{\sqrt{5-x}-3}$

7) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-3}}$

4) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x-2}-2}$

8) $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

س6/ ليكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = y = x+1$ جد

$f(-3), f(2), f[f(-1)], f(1+\Delta x), f(a+2), f(b-3)$

الحل/

$f(-3) = -3 + 1 = -2$

$f(1 + \Delta x) = 1 + \Delta x + 1 = \Delta x + 2$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(a + 2) = a + 2 + 1 = a + 3$

$f[f(-1)] = f[-1 + 1] = f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(b - 3) = b - 3 + 1 = b - 2$

الفصل الرابع

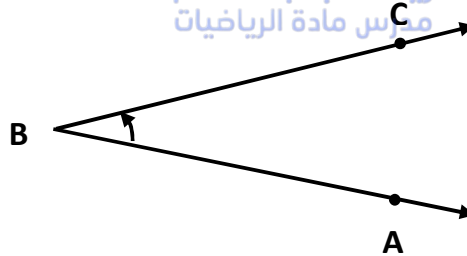
حساب المثلثات

الزاوية الموجهة بالوضع القياسي

هي الزاوية التي رأسها نقطة الأصل في المستوي المتعامد المحورين وضعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات و ضلعها النهائي في أحد الأرباع.

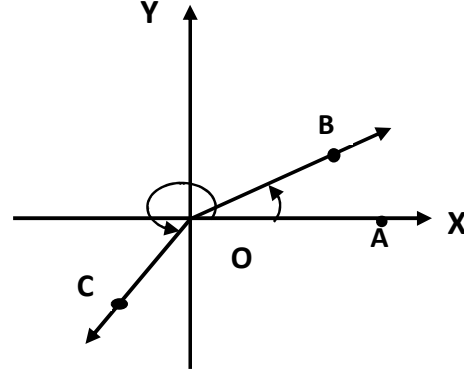
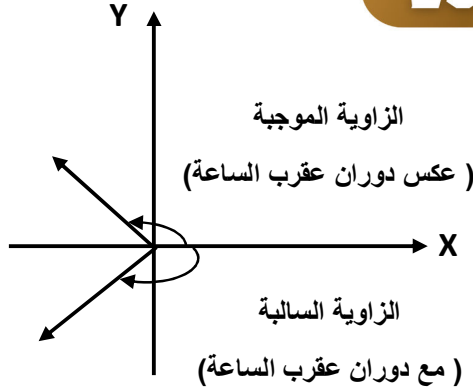
التعريف رقم (1) :

الزاوية الموجهة Directed Angle : إذا كان الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$ نقطة بداية مشتركة هي B فإن الزوج المرتب $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{BA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{BC}$ ورأسها النقطة B وتكتب بأحدى الطريقتين : $\overrightarrow{ABC}$ أو $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.



التعريف رقم (2) :

الزاوية الموجهة بالوضع القياسي : إذا كان لدينا نظام إحداثي متعامد المحورين في المستوي و زاوية موجهة في المستوي فيقال ان الزاوية في وضع قياسي إذا وقع رأسها في نقطة الأصل و أنطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات كما في الشكل الآتي :

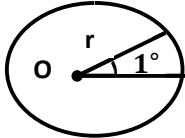


العلاقة بين التقديرين الستيني و الدائري لقياس الزوايا

كما نعلم في المرحلة المتوسطة فإنه :

إذا قسمنا دائرة الى 360° قسماً متساوياً فأنتنا نحصل على 360° قوساً متساوياً ، كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في القياس الستيني Degree Measure ويرمز له (1°) .

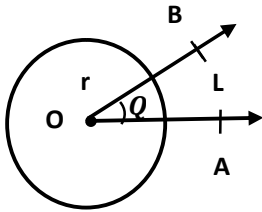
فالقياس الستيني :



هي الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله $\left(\frac{1}{360^\circ}\right)$ من محيط الدائرة.

القياس الدائري :

هي قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله مساوي لنصف قطر الدائرة.



كما ان : $60' = 60^\circ$ دقيقة 1°

$60'' = 60'$ دقيقة $1'$

ذكرنا سابقاً أن :

محيط الدائرة $2\pi r$

وبما أن :

$$Q = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r}$$

2π : زاوية نصف قطرية = 360°

$\pi \Leftarrow$: زاوية نصف قطرية = 180°

$\therefore 1$: زاوية نصف قطرية = $\frac{180^\circ}{\pi}$

$\therefore 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$ زاوية نصف قطرية = 0.01745 زاوية نصف قطرية.

بصورة عامة

(6) إذا كان قياس زاوية موجهة Q (من الزاوية النصف قطرية) فإن :

$$Q = \frac{D^\circ * \pi}{180^\circ}$$

(7) إذا كان قياس زاوية موجهة D° فإن :

$$D^\circ = \frac{Q * 180^\circ}{\pi}$$

ومنه نستنتج إن :

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

تستخدم العلاقة اعلاه لتحويل القياس الزاوية من التقدير الدائري الى الستيني وبالعكس.

مثال 1/ إذا كانت $m \overrightarrow{AOB}$ في وضع قياسي تقابل طوله 10 سم في دائرة طول نصف قطرها 12 سم.

(1) أحسب بالتقدير الدائري $m \overrightarrow{AOB}$ حيث: $2\pi \geq m \angle AOB \geq 0$ علماً أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل.

(2) أحسب بالتقدير الدائري $m \overrightarrow{AOB}$ حيث: $0 \geq m \angle AOB \geq -2\pi$ /الحل/

$$L = 10 \text{ cm} ; r = 12 \text{ cm}$$

(1) ∴ زاوية نصف قطرية :

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$$

(2) في هذه الحالة يكون قياس الزاوية سالباً ويكون :

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$$

∴ $Q = -0.833$ زاوية نصف قطرية (لأن الزاوية سالبة)

مثال 2/ إذا كانت $\angle AOB$ في وضعها القياسي وكان قياسها $\frac{3\pi}{4}$. فما قياسها بالتقدير الستيني؟ /الحل/

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ * \frac{3}{4} = 135^\circ$$

مثال 3/ حول : (أ) 40° الى التقدير الدائري. (ب) 75° الى التقدير الدائري.

(ج) 2.6π الى التقدير الستيني. (د) $\frac{1}{4}\pi$ الى التقدير الستيني.

/الحل/

(أ) من الزاوي النصف قطرية

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{40^\circ} \rightarrow Q = \frac{2\pi}{9}$$

(ب) من الزاوية النصف قطرية

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{75^\circ} \rightarrow Q = \frac{5\pi}{12}$$

(ج)

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2.6\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ * 2.6 = 468^\circ$$

(د)

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ * \frac{1}{4} = 45^\circ$$

مثال 4/ حول : (أ) 45° الى التقدير الدائري. (ب) 2.6π الى التقدير الستيني.

الحل/

(أ) من الزاوية النصف قطرية

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{45^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi}{4}$$

(ب)

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2.6\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ * 2.6 = 468^\circ$$

مثال 5/ زاوية مركزية قياسها 60° فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر

دائرتها 9 cm ؟

الحل/

$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{60^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore |Q| = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{L}{9} \rightarrow L = \frac{9\pi}{3} \rightarrow L = 3\pi \rightarrow L = 3 * 3.142 = 9.426 \text{ cm}$$

مثال 6/ زاوية مركزية طول قوسها $21 \frac{1}{4} \text{ cm}$ وطول نصف قطر دائرتها 20 cm . فما مقدار قياسها الستيني ؟

الحل/ من الزاوية النصف قطرية

$$|Q| = \frac{L}{r} \rightarrow |Q| = \frac{21 \frac{1}{4}}{20} = \frac{17}{16}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{17}{16} \rightarrow D^\circ = 180^\circ * \frac{17}{16} * \frac{7}{22} = 60.85^\circ$$

مثال 7/ في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتي الحادتين 0.44 زاوية نصف قطرية . فما قياس كل منها بالتقدير الستيني ؟

الحل/

$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{0.44}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ * 0.44 * \frac{7}{22} = 25.2^\circ$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما A, B :

$$A + B = 90^\circ \rightarrow (1)$$

$$A - B = 25.2^\circ \rightarrow (2)$$

بالجمع

$$2A = 115.2^\circ$$

$$\therefore A = 57.6^\circ$$

$$B = 32.4^\circ$$

مثال 8/ زاوية مركزية طول قوسها 22 cm وطول نصف قطر دائرتها 20 cm . فما مقدار قياسها الستيني ؟

الحل/ من الزاوية النصف قطرية

$$|Q| = \frac{L}{r} \rightarrow |Q| = \frac{22}{20} \rightarrow \text{قياس الزاوية المركزية بالدائري}$$

2024

$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{22}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ * \frac{22}{20} * \frac{7}{22} = 63^\circ$$

حلول تمارين (4-1)

س1/ حول الى التعبير الدائري كل من قياس الزاوية الاتية :

30° , 120° , 15° , 300°

الحل /

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{30^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{120^\circ} \rightarrow Q = \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{15^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{300^\circ} \rightarrow Q = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

س2/ حول كلٍّ من الزوايا النصف قطرية الآتية الى التقدير الستيني :

$$\frac{3\pi}{5}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{1}{3}$$

الحل /

$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{5D^\circ}$$

$$\pi * D^\circ = \frac{3\pi}{5} * 180^\circ$$

$$D^\circ = \frac{3\pi * 36^\circ}{\pi}$$

$$D^\circ = 108^\circ$$

$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6D^\circ}$$

$$\pi * D^\circ = \frac{5\pi}{6} * 180^\circ$$

$$D^\circ = \frac{5\pi * 30^\circ}{\pi}$$

$$D^\circ = 150^\circ$$

$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{3} \frac{\pi}{D^\circ}$$

$$\pi * D^\circ = \frac{1}{3} * 180^\circ$$

$$D^\circ = \frac{60^\circ}{\pi}$$

$$D^\circ = \frac{60^\circ}{22/7} = \frac{210}{11}$$

$$D^\circ = 19 \frac{1}{11}$$

س3/ قياس زاوية مركزية في دائرة $\frac{5}{6}$ من الزوايا النصف قطرية تقابل قوساً طوله (25 cm).

جد طول نصف قطر الدائرة؟

الحل/

$$\therefore |Q| = \frac{L}{r} \rightarrow r = \frac{L}{Q} \rightarrow r = \frac{25}{\frac{5}{6}}$$

$$r = 25 * \frac{6}{5} \rightarrow r = 30 \text{ cm} \rightarrow \text{طول نصف قطر الدائرة}$$

س4/ ما طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها 135° في دائرة نصف قطرها (8 cm)؟

الحل/

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{135^\circ} \rightarrow Q = \frac{135^\circ}{180^\circ} \rightarrow Q = \frac{3}{4} \pi$$

$$L = Q * r \rightarrow L = \frac{3}{4} \pi * 8 = 6\pi$$

$$L = 6 * 3.14 \rightarrow L = 18.857 \text{ cm} \rightarrow \text{طول القوس}$$

س5/ زاويتان مجموعهما $\frac{\pi}{4}$ زاوية نصف قطرية و فرقهما يساوي 9° . فما مقدار هاتين الزاويتين

بالتقدير الستيني ؟

الحل/

$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{4}}{D^\circ}$$

$$\rightarrow D^\circ = 180^\circ * \frac{\pi}{4} * \frac{1}{\pi} = 45^\circ \rightarrow$$

مجموع الزاويتين بالتقدير الستيني

نفرض ان الزاوية الاولى x

نفرض ان الزاوية الثانية y

$$x + y = 45^\circ \rightarrow (1)$$

$$x - y = 9^\circ \rightarrow (2)$$

بالجمع

$$2x = 54^\circ$$

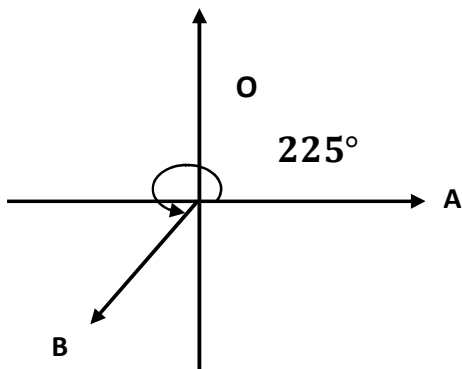
$$\therefore x = \frac{54^\circ}{2} = 27^\circ \rightarrow \text{قيمة الزاوية الاولى}$$

$$y = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ \rightarrow \text{قيمة الزاوية الثانية}$$

س6/ ارسم الزاوية $\overrightarrow{AOB}$ في وضعها القياسي اذا كان قياسها $\frac{5\pi}{4}$ ثم جد قياسها بالتقدير

الستيني ؟

الحل/



$$\therefore \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{4}}{D^\circ}$$

$$\rightarrow D^\circ = 180^\circ * \frac{5\pi}{4} * \frac{1}{\pi}$$

$$\rightarrow D^\circ = 45^\circ * 5 = 225^\circ$$

النسب المثلثية لزاوية حادة

التعريف/

ΔABC القائم الزاوية في B :

جيب (Sine) الزاوية الحادة (Q)

$$\text{وتكتب } \sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$$

جيب تمام (Cosine) الزاوية الحادة (Q)

$$\text{ويرمز له (Cos) وتكتب } \cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$$

ظل (Tangent) الزاوية الحادة (Q)

$$\text{وتكتب } \tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC}$$



ملاحظة

من النسب المثلثية لزاوية حادة :

$$\sin Q, \cos Q \in [-1, 1]$$

$$\sin 0 = 0, \sin 90^\circ = 1$$

$$\cos 0 = 1, \cos 90^\circ = 0$$

$$\tan 0 = 0, \tan 90^\circ \text{ غير معرفة}$$

بعض العلاقات الأساسية في حساب المثلثات

الشكل اعلاه يمثل مثلثاً قائم الزاوية في B والزاوية الحادة Q :

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ABC نجد ان :

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

بقسمة كل الحدود على $(AC)^2$:

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

كذلك $\tan Q = \frac{AB}{BC}$

بالقسمة على (AC) ينتج :

$$\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^2 = 1$$

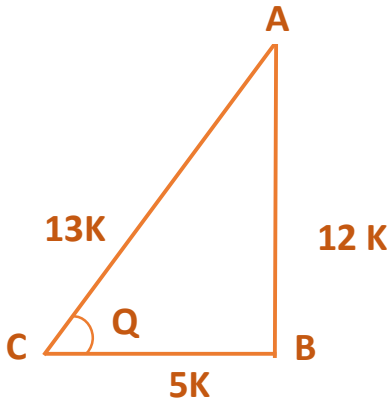
$$\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$$

$$\therefore \tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q}$$

مثال 1/ إذا علمت أن $\cos C = \frac{5}{13}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في B.

جد : $\tan C$, $\sin A$, $\cos A$

الحل/



نرسم المثلث ABC القائم الزاوية B

$$\cos C = \frac{5}{13}, BC = 5k, AC = 13k$$

حيث k ثابت .

بأستخدام مبرهنة فيثاغورس :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(13K)^2 = (AB)^2 + (5K)^2$$

$$(AB)^2 = (13K)^2 - (5K)^2$$

$$(AB)^2 = 169 K^2 - 25 K^2$$

$$(AB)^2 = 144 K^2$$

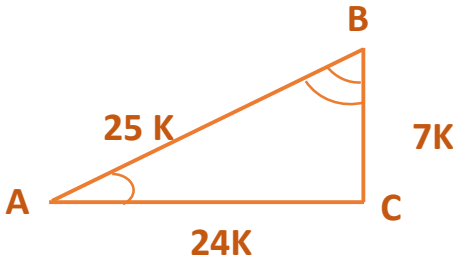
$$\therefore AB = 12 K$$

$$\tan C = \frac{12 K}{5 K} = \frac{12}{5}$$

$$\sin A = \frac{5 K}{13 K} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{12 K}{13 K} = \frac{12}{13}$$

مثال 2/ إذا علمت أن $\tan A = \frac{7}{24}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في C. جد $\sin A$, $\cos B$ ؟
الحل/



نرسم المثلث ABC القائم الزاوية C

$$\tan A = \frac{7}{24}$$

$$BC = 7K ; AC = 24K$$

بأستخدام مبرهنة فيثاغورس :

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$(AB)^2 = (24K)^2 + (7K)^2$$

$$(AB)^2 = 576 K^2 + 49 K^2$$

$$(AB)^2 = 625 K^2$$

$$\therefore AB = 25K$$

$$\sin A = \frac{7K}{25K} = \frac{7}{25}$$

$$\cos B = \frac{7K}{25K} = \frac{7}{25}$$

النسبة المثلثية لزاوية خاصة

أولاً : زاوية قياسها 45° :

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B. وأحدى زواياه قياسها (45°) فتكون الأخرى (45°) ايضاً.

$$\therefore AB = BC = L$$

حسب مبرهنة فيثاغورس :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{2} L$$

$$\sin 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2} L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

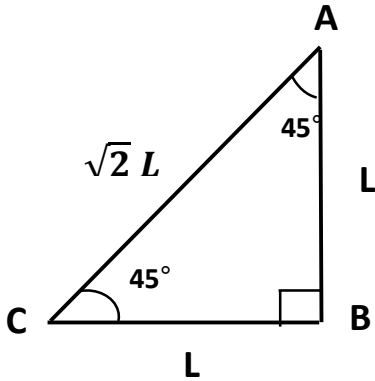
$$\sin 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2} L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2} L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2} L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{L}{L} = 1$$

$$\tan 45^\circ = \frac{L}{L} = 1$$



ثانياً : زاوية قياسها 30° ، 60° :

نرسم مثلثاً متساوي الاضلاع طول ضلعه $2L$ فيكون قياسات زواياه متساوية وكل منها 60°

نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ لاحظ الشكل المجاور

$$\therefore CD = DB = L$$

وأن : $m \angle BAD = 30^\circ$

بأستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد ان : $AD = \sqrt{3} L$

$$\sin 30^\circ = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3} L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3} L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{L}{\sqrt{3} L} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

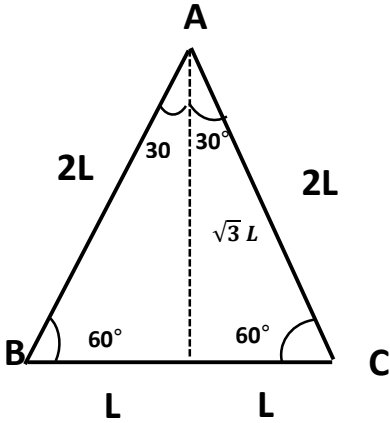
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3} L}{L} = \sqrt{3}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

لاحظ ان : $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

وكذلك : $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



أي ان جيب أحدهما يساوي جيب تمام الاخرى وبالعكس

و بصورة عامة اذا كانت (Q) زاوية حادة فإن قياس متممها هو $(90^\circ - Q)$ و يكون :

$$\sin (90^\circ - Q) = \cos Q$$

$$\sin (90^\circ - Q) = \sin Q$$

ملاحظة

الزاويتان : 30° ، 60° متتامتان لأن $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$



الخلاصة

- $\sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$; $\cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$; $\tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
- $\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$; $\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q}$
- $\sin (90^\circ - Q) = \cos Q$; $\cos (90^\circ - Q) = \sin Q$
- $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

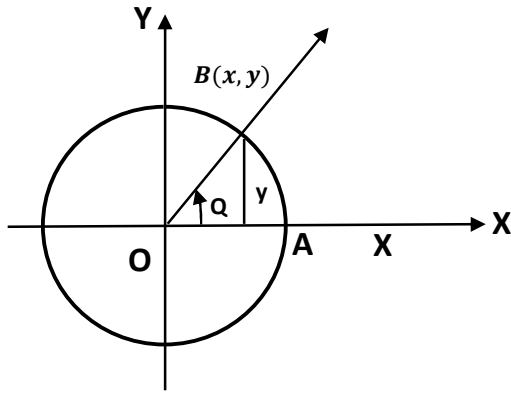
دائرة الوحدة و النقطه المثلثية

التعريف/

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها يساوي وحدة

النقطة المثلثية لزاوية في الشكل $m \angle AOB = Q$ زاوية موجهة في الوضع القياسي , B نقطة تقاطع الضلع النهائي $\overrightarrow{OB}$ مع دائرة الوحدة.

نفرض ان $B(x, y)$



$$\cos Q = \frac{x}{1} \rightarrow \cos Q = x$$

$$\sin Q = \frac{y}{1} \rightarrow \sin Q = y$$

$$\therefore B(x, y) = (\cos Q, \sin Q)$$

ملاحظة

بأستخدام دائرة الوحدة و الأنعكاس على المستوي يمكن إيجاد النسب المثلثية الآتية :

$$\sin (180^\circ - Q) = \sin Q$$

$$\cos (180^\circ - Q) = -\cos Q$$

$$\tan (180^\circ - Q) = -\tan Q$$

النقطة المثلثية Trigonometric Point للزاوية الموجهة في الوضع القياسي :
هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة.

لاحظ ان نقطة B هي نقطة مثلثية للزاوية $\overrightarrow{AOB}$ مما سبق يتضح ان لكل زاوية موجهة Q في الوضع القياسي نقطة مثلثية (x, y) يكون $x = \cos Q$ ، $y = \sin Q$

مثال 7/ جد $\sin Q$, $\cos Q$, $\tan Q$ إذا علمت ان $Q = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ؟

الحل /

نعلم ان $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ يقع الضلع النهائي لكل منها على احد المحورين الاحداثيين. وكما في الشكل الاتي ، فأن :

$$(\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (1, 0)$$

$$\Rightarrow \cos 0^\circ = 1 ; \sin 0^\circ = 0$$

$$\therefore \tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1}$$

$$\Rightarrow \tan 0^\circ = 0$$

$$(\cos 90^\circ, \sin 90^\circ) = (0, 1)$$

$$\Rightarrow \cos 90^\circ = 0 ; \sin 90^\circ = 1$$

$$\therefore \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$$

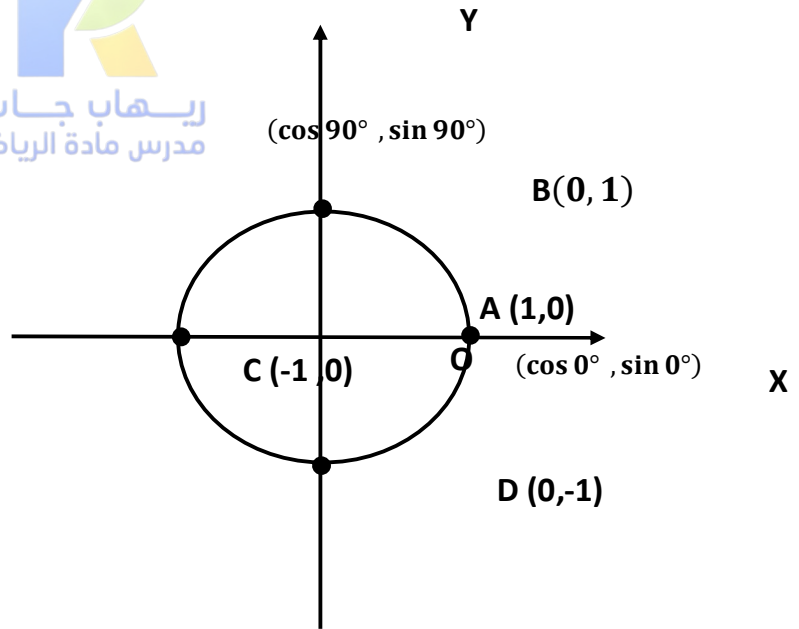
$$\Rightarrow \tan 90^\circ = \text{غير معرف}$$

$$(\cos 180^\circ, \sin 180^\circ) = (-1, 0)$$

$$\Rightarrow \cos 180^\circ = -1 ; \sin 180^\circ = 0$$

$$\therefore \tan 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1}$$

$$\Rightarrow \tan 180^\circ = 0$$



ملاحظة

النسب المثلثية للزاوية $(360^\circ - \theta)$
في الربع الرابع :

$$\sin (360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos (360^\circ - \theta) = \cos \theta$$

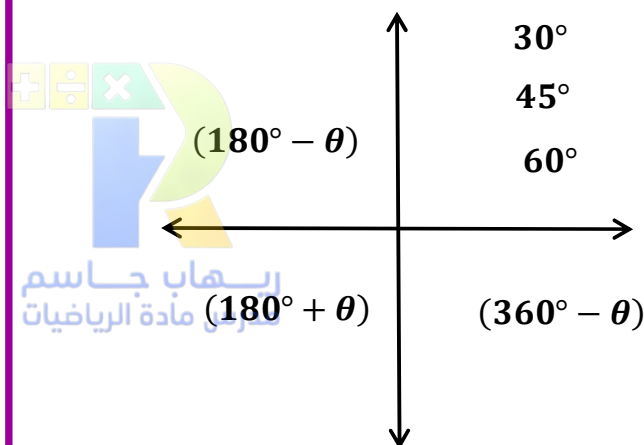
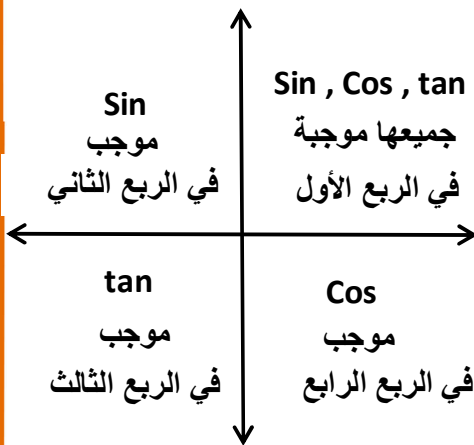
$$\tan (360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

النسب المثلثية للزاوية $(180^\circ + \theta)$
في الربع الثالث :

$$\sin (180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos (180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan (180^\circ + \theta) = \tan \theta$$



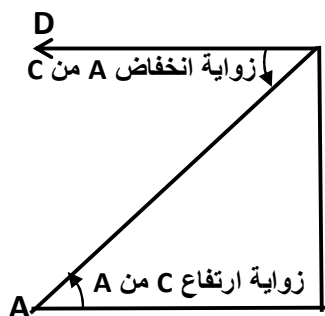
التطبيقات الدائرية

التعريف/

زاوية الارتفاع : هي الزاوية المحصورة بين المستوي الأفقي للنظر مع الشعاع المتجه الى نقطة اعلى من هذا المستوي .

زاوية الانخفاض : هي الزاوية المحصورة بين المستوي الأفقي للنظر مع الشعاع المتجه الى نقطة تحت مستوى النظر .

زاويتا الارتفاع والانخفاض :



نتمكن من حساب الارتفاعات و الأبعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها بها . فإذا وقف راصد في نقطة A ونظر الى نقطة C تقع فوق أفق A فإن الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى نقطة C وبين أفق A تدعى (زاوية ارتفاع C بالنسبة الى A) .

مثلاً الزاوية $\angle CAB$ في الشكل المجاور.

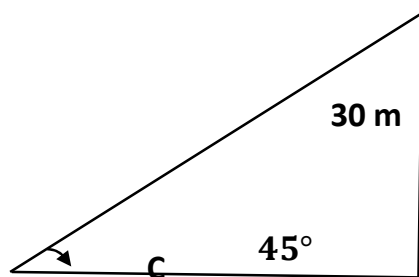
أما اذا كانت عين الراصد في C ونظر الى A التي تحت افق C ، فإن الزاوية الكائنة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى النقطة A وبين أفق C تدعى (زاوية انخفاض A بالنسبة الى C) .

مثلاً الزاوية $\angle ACD$ في الشكل المجاور.

مثال 8/ طائرة ورقية خيطها 30 m فإذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض (مع الأفق) هي 45° . جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الأرض ؟

الحل /

نفرض ان الارتفاع = L من وحدات الطول في المثلث ABC قائم الزاوية في B .



A

L

B

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{L}{30}$$

$$L = \frac{30}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$$

$$L = 21.21 \text{ m}$$

مثال 9/ وجد راصد ان زاوية ارتفاع قمة مئذنة من نقطة على الارض تبعد 8m عن قاعدتها تساوي 60° . فما ارتفاع المئذنة؟

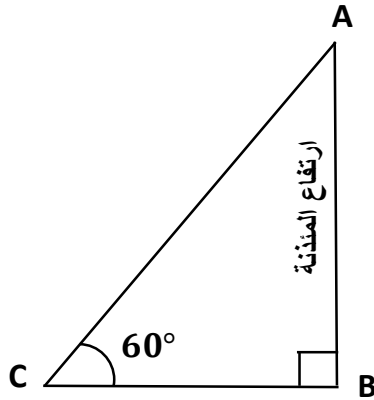
الحل/

$\triangle ABC$ قائم الزاوية في B :

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{8}$$

$$AB = 8\sqrt{3} \text{ m} \quad \text{ارتفاع المئذنة}$$



مثال 10/ جبل ارتفاعه 2350 m وجد راصد من قمته ان قياس زاوية انخفاض نقطة على الأرض 70° . فما هي المسافة بين النقطة والراصد؟

علماً ان $\sin 70^\circ = 0.9396$

الحل/

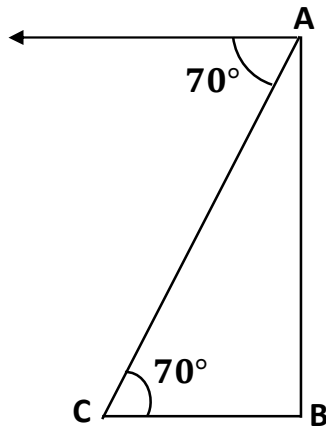
قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

$\triangle ABC$ قائم الزاوية في B :

$$\sin 70^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\rightarrow 0.9396 = \frac{2350}{AC}$$

$$AC = \frac{2350}{0.9396} \approx 2500 \text{ m}$$



مثال 11/ من سطح منزل ارتفاعه 7 متر وجد راصد ان زاوية ارتفاع اعلى عمارة امامه 60° و زاوية انخفاض قاعدتها 30° . جد البعد بين الراصد والعمارة وارتفاع العمارة؟

الحل/

$$[\text{زاوية الانخفاض} = \text{زاوية الارتفاع}] \quad \angle DAC = \angle ACB$$

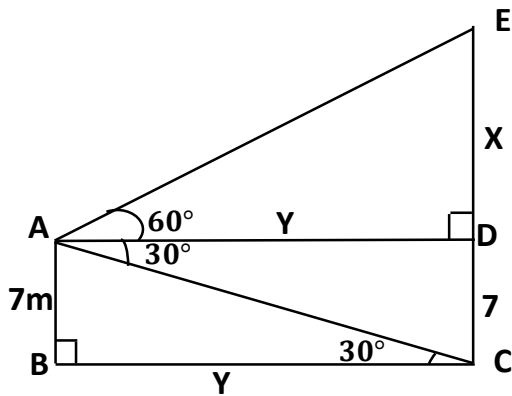
2024

في $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B :

$$\tan 30^\circ = \frac{7}{Y}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{Y}$$

$$\rightarrow Y = 7\sqrt{3} \rightarrow \text{البعد بين الراصد و العمارة.}$$



مثال 12/ شاهد راصد ان زاوية ارتفاع منطاد مثبت هي 30° ولما سار الراصد في مستوي افقي نحو المنطاد مسافة 1000 متر شاهد ان زاوية الارتفاع هي 45° . **جد ارتفاع المنطاد الى اقرب متر ؟**

الحل/

في $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B :

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{y}$$

$$\rightarrow 1 = \frac{x}{y}$$

$$\therefore x = y \rightarrow (1)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{y + 1000} \rightarrow (2)$$

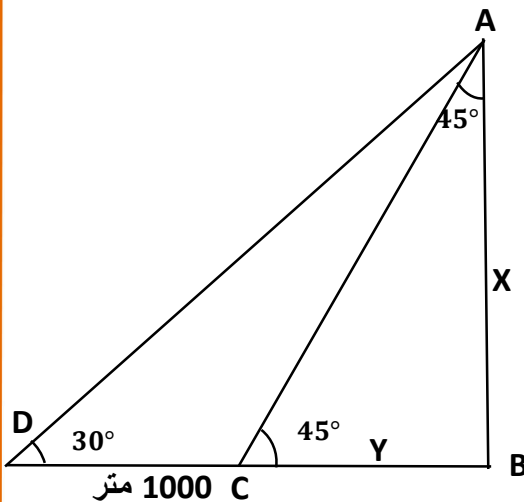
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{y + 1000}$$

$$\sqrt{3} y = y + 1000$$

$$1.7 y - y = 1000$$

$$y = \frac{1000}{0.7} = 1428.6$$

$$x = 1429 \text{ m} \rightarrow \text{ارتفاع المنطاد}$$



القطاع الدائري Circular Sector

التعريف/

القطاع الدائري : هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس .

في الشكل التالي تسمى $\angle AOB$ المركزية بزاوية القطاع الأصغر وقياسها أقل من 180° .

مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} \text{طول القوس} \times r$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} L r \leftarrow (1)$$

وإذا فرضنا ان قياس الزاوية المركزية بالقطاع الدائري Q فإن :

$$L = Q r \rightarrow \frac{L}{r} = Q$$

وبالتعويض في (1) :

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} Q r^2 \leftarrow (2)$$

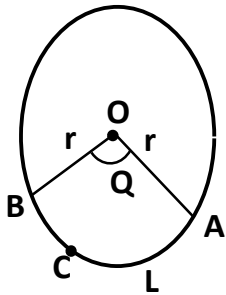
ملاحظة

$$\text{محيط القطاع الدائري} = r + r + L = 2r + L$$

حيث ان :

L : طول قوس القطاع الدائري.

r : طول نصف قطر دائرة القطاع.



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

نتيجة (1)

إذا فرضنا سطح دائرة قطاعاً دائرياً زاويته 2π

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \frac{1}{2} (2\pi) * r^2 = \pi r^2$$

نتيجة (2)

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} Q r^2}{\pi r^2} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}}$$

$$\frac{D^\circ}{360^\circ} = \frac{Q}{2\pi}$$

حيث ان :

D° : قياس الزاوية المركزية للقطاع بالتقدير الستيني.

$$\therefore \frac{D^\circ}{360^\circ} = \frac{Q}{2\pi} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{قياس الزاوية بالتقدير الستيني}}{360^\circ} * \text{مساحة سطح دائرة القطاع}$$

مثال 13/ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته يساوي 60° و طول نصف قطر دائرته 8cm

الحل/

$$- \text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} L r$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} * 6 * r = 15 \rightarrow r = 5$$

$$- \text{محيط القطاع الدائري} = 2r + L$$

$$\text{محيط القطاع الدائري} = 2 * 5 + 6 = 16 \text{ cm}$$

$$- \text{زاوية نصف قطرية} = \frac{L}{r} \rightarrow |Q| = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\pi}{180^\circ} &= \frac{Q}{D^\circ} \\ \rightarrow \frac{3.14}{180^\circ} &= \frac{1.2}{D^\circ} \\ \rightarrow D^\circ &= \frac{180^\circ * 1.2}{3.14} \\ \rightarrow D^\circ &= 68.6898^\circ \end{aligned}$$

Circular Sector القطعة الدائرية

التعريف/

القطعة الدائرية : هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس فيها من الدائرة ووتر مار بنهايتي ذلك القوس .

في الشكل التالي تسمى $\angle AOB$ المركزية بزاوية القطعة الصغرى وقياسها أصغر من 180° .

لأيجاد مساحة القطعة الدائرية : ريهاب جاسم
نفرض ان Q القياس الدائري لزاوية القطعة الصغرى.

$\therefore$ مساحة القطعة $ACB =$ مساحة القطاع $(OACB) -$ مساحة $\triangle OAB$

$\therefore$ مساحة القطاع الدائري $(OACB) = \frac{1}{2} Q r^2$

مساحة $\triangle OAB = \frac{1}{2} * OA * OB * \sin Q$

$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} * r * r \sin Q$

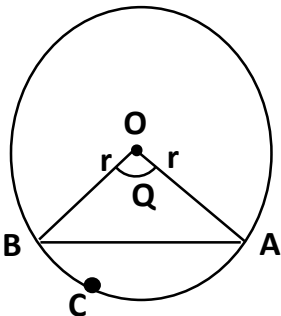
$\therefore$ مساحة القطعة $AC = \frac{1}{2} Q r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin Q$

$\therefore$ مساحة القطعة $ACB = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$

حيث ان :

Q : قياس زاوية القطعة بالتقدير الدائري.

r : نصف قطر دائرتها.



مثال 15 / جد مساحة قطعة الدائرية طول نصف قطر دائرتها 12 cm وقياس زاويتها يساوي 30° ؟

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{30^\circ} \rightarrow Q = 0.5236$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin 30^\circ)$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} * 144 * (0.5236 - 0.5)$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = 1.7 \text{ cm}^2$$

مثال 16 / O مركز دائرة نصف قطرها 6 cm ، رسم فيها وتر طوله 6 cm ، جد لأقرب cm^2 مساحة القطعة الدائرية الصغرى ؟

الحل /

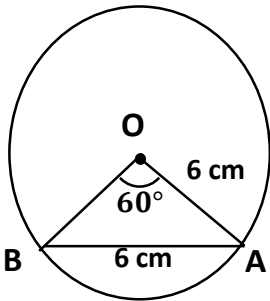
$$\Delta AOB \text{ متساوي الأضلاع ، } \angle AOB = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{60^\circ} \rightarrow Q = 1.047$$

$$\therefore \text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin 60^\circ)$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} * 36 * (1.047 - 0.865)$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = 3.276 \text{ cm}^2$$



حلول تمارين (4-2)

س1/ وقف رجل في أعلى برج و أبصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على استقامة واحدة ، فكانت زاوية انخفاض قاعدة الشجرة الأولى (70°) و زاوية انخفاض قاعدة الشجرة الثانية (50°) . **جد المسافة بين الشجرتين** مع العلم ان ارتفاع البرج (30m) ؟
 علماً $\tan 70^\circ = 2.8$ ، $\tan 50^\circ = 1.2$

الحل /

$$\tan 70^\circ = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{2.8} = 10.7 \text{ m}$$

$$\tan 50^\circ = \frac{30}{x + y}$$

$$1.2 = \frac{30}{10.7 + y}$$

$$30 = 1.2 (10.7 + y)$$

$$30 = 12.84 + 1.2 y$$

$$1.2 y = 30 - 12.84$$

$$1.2 y = 17.16$$

$$y = \frac{17.16}{1.2} = 14.3 \text{ m} \longrightarrow \text{البعد بين الشجرتين}$$



س2/ من نقطة تبعد عن قاعدة البرج (50m) وجد ان زاوية ارتفاع قمته (30°) فما ارتفاع البرج؟

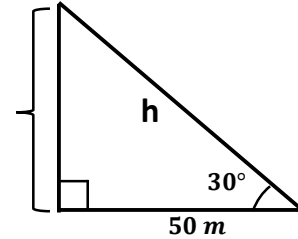
الحل/

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{50}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{50} \rightarrow h = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow h = 28.86 \text{ m}$$

ارتفاع البرج



س3/ جد مساحة قطاع دائري طول قوسه (8 cm) و طول نصف قطره (3.2cm) ؟

الحل/

$$\frac{1}{2} L r = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$\frac{1}{2} * 8 * 3.2 = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$12.8 \text{ cm}^2 = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

س4/ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته 100° و طول نصف قطره (10cm) ؟

الحل/

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{قياس الزاوية بالتقدير الستيني}}{360^\circ} * \text{مساحة سطح دائرة القطاع}$$

$$\pi r^2 * \frac{100^\circ}{360^\circ} = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$10^2 * 3.14 * \frac{100^\circ}{360^\circ} = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$87.3 \text{ cm}^2 = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

س5/ قطاع دائري مساحته (37.68 cm^2) و طول نصف قطره (6 cm) . جد طول قوسه ؟

الحل/

$$\frac{1}{2} L r = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} * L * 6 = 37.68$$

$$\rightarrow 3 L = 37.68$$

$$\rightarrow L = 12.56 \text{ cm} \rightarrow \text{طول القوس}$$

س6/ نصف محيط دائرة هو (10 cm) جد مساحة قطاع فيها قياس زاويته (45°) ؟

الحل/

$$2 * r * \pi = \text{محيط الدائرة}$$

$$2 * r * \pi = 2 * 10$$

$$\rightarrow r = \frac{2 * 10}{2 \pi} = \frac{10}{\pi}$$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{قياس الزاوية بالتقدير الستيني}}{360^\circ} * \text{مساحة سطح دائرة القطاع}$$

$$\pi r^2 * \frac{45^\circ}{360^\circ} = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 * \pi * \frac{45^\circ}{360^\circ} = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$\frac{100^2}{\pi^2} * \pi * \frac{45^\circ}{360^\circ} = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$\frac{100 * 45^\circ}{\pi * 360^\circ} = \text{مساحة القطاع الدائري}$$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = 3.98 \text{ cm}^2$$

س7/ جد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها (60°) وطول نصف قطر دائرتها (8 cm)؟

الحل/

$$\frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q) = \text{مساحة القطعة الدائرية}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{60^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} * (8)^2 * \left(\frac{\pi}{3} - \sin 60^\circ\right) = \text{مساحة القطعة الدائرية}$$

$$\frac{1}{2} * 64 * \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{مساحة القطعة الدائرية}$$

$$32 * \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right) = \text{مساحة القطعة الدائرية}$$

$$cm^2 5.81 = \text{مساحة القطعة الدائرية}$$

استخدام الحاسبة في ايجاد قيم التطبيقات الدائرية

لقد علمنا ان للزاوية نظامين للقياس هما : القياس الستيني والقياس الدائري والحاسبة تستخدم النظامين وهو ما يلاحظ اعلى مفاتيح الحاسبة اليدوية فالقياس الستيني يرمز له **DEG** اختصاراً لكلمة (DEGREE) درجة .

اما القياس الدائري فيرمز له **RAD** اختصاراً لكلمة (RADIAN) نصف قطري .

DRG →

وهذان الرمزان يظهران في أعلى الشاشة بعد الضغط على المفتاح

فالضغط الاولى تظهر **DEG** والضغط الثانية تظهر **RAD** وبالعكس .

ولنسب المثلثية مفاتيح أيضاً وسنقتصر على نسبة الجيب ، نسبة الجيب التمام ونسبة الظل .

فالمفتاح **sin** يرمز الى الجيب (sine) .

والمفتاح **cos** يرمز الى الجيب تمام (cosine) .

والمفتاح **tan** يرمز الى الظل (tangent) .

طريقة استخدام الحاسبة

- (11) تحدد نظام الزاوية الستيني (DEG) او الدائري (RAD) بالضغط على (DRG) .
- (12) تدخل الزاوية حسب النظام .
- (13) تضغط على مفتاح النسب المثلثية المطلوبة .

الأمثلة الآتية توضح ذلك :

مثال 17/ جد

(1) $\sin 30^\circ$

(2) $\cos 120^\circ$

(3) $\tan 350^\circ$

الحل/

1. النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG على الشاشة .

✕ اكتب 30

✕ اضغط على (sin) فتحصل على الناتج = 0.5

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

2. النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG

✕ اكتب 120

✕ اضغط على (cos) فتحصل على الناتج = -0.5

3. النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG

✕ اكتب 350 ثم اضغط على (tan) فيكون الناتج $\cong -0.1763$

✕ فيكون:

$$(\tan(-Q) = -\tan Q) \leftarrow \tan(-350^\circ) \cong -0.1763$$

ملاحظة

$$\sin(-Q) = -\sin Q$$

$$\cos(-Q) = \cos Q$$

$$\tan(-Q) = -\tan Q$$

مثال 18 / جد ناتج

(1) $\sin \frac{5\pi}{4}$

(2) $\cos(-3\pi)$

(3) $\tan \frac{7\pi}{5}$

الحل /

النظام دائري : نضغط لتظهر RAD

نضغط على المفتاح الموجود عادة على اللوحة
او احمر مثلاً ...
INV ويكون بلون مغاير لالاسود (اصفر)

2ndf

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

نضغط على مفتاح :



1. $\sin \frac{5\pi}{4}$

اضغط لتظهر RAD

نضغط 2ndf ثم π ← 3.141592654 * 5 = 15.70796327

3.926990817 = 4 ÷ ثم sin = -0.707106781

2. $\cos(-3\pi)$

من المعلوم ان $\cos(-Q) = \cos Q$ (نحذف الاشارة السالبة).

⊗ اضغط لتظهر RAD

⊗ نضغط 2ndf ثم π ← 3.141592654 * 3 = 9.424777961

⊗ ثم Cos = -1

3. $\tan \frac{7\pi}{5}$

⊗ اضغط لتظهر RAD

⊗ نضغط 2ndf ثم π ← 3.141592654 * 7 = 21.9114858

4.398229715 = 5 ÷ ثم tan = 3.07763537

تمرين / جد ما يأتي باستخدام الحاسبة :

(3) $\tan(-15^\circ)$

(2) $\cos(-400^\circ)$

(1) $\sin \frac{\pi}{6}$

(6) $\tan \frac{8\pi}{5}$

(5) $\cos \frac{2\pi}{3}$

(4) $\tan(-36^\circ)$

الحل /

(3) - 0.267949192

(2) 0.766044443

(1) 0.5

(6) - 3.077683537

(5) - 0.5

(4) - 0.588

حل المثلث القائم الزاوية Solution Of Right Angle Triangle

يشتمل كل مثلث على ستة عناصر (ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا) ويقصد بحل المثلث إيجاد قيم عناصره المجهولة.

مثال 19/ إذا كان $\tan 22^\circ = 0.4$ اوجد : (1) $\sin 22^\circ$, $\cos 22^\circ$
(2) $\cos 68^\circ$, $\sin 68^\circ$

الحل/

$$\tan 22^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

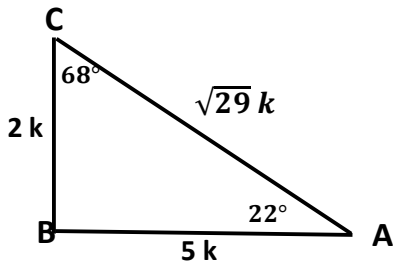
$$\therefore \text{المقابل} = 2k$$

$$\therefore \text{المجاور} = 5k$$

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$4k^2 + 25k^2 = (AC)^2$$

$$AC = \sqrt{29}k$$



(1)

$$\sin 22^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{2k}{\sqrt{29}k} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\cos 22^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{5k}{\sqrt{29}k} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

(2)

$$\sin 68^\circ = \sin(90^\circ - 22^\circ) = \cos 22^\circ = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

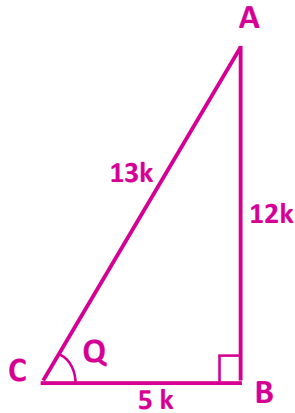
$$\cos 68^\circ = \cos(90^\circ - 22^\circ) = \sin 22^\circ = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

مثال 20/ اذا علمت أن $\cos C = \frac{5}{13}$ في $\triangle ABC$ القائم الزاوية في B جد

$\cos A$, $\cos C$, $\sin A$

الحل/

نرسم $\triangle ABC$ القائم الزاوية في B :



$$\cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \quad (\text{فيثاغورس})$$

$$169k^2 = (AB)^2 + 25k^2 \quad \therefore$$

$$\therefore (AB)^2 = 169k^2 - 25k^2$$

$$\therefore (AB)^2 = 144k^2 \rightarrow AB = 12k$$

$$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

$$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

مثال 21/ $\triangle ABC$ قائم الزاوية في A فيه $AB = 7\text{cm}$, $AC = 24\text{cm}$ جد : $\sin C$,

$\sin B$, $\tan C$, $\cos B$

الحل/

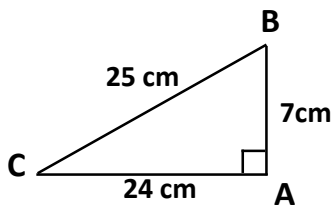
$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \quad (\text{فيثاغورس})$$

$$(BC)^2 = (7)^2 + (24)^2 = 49 + 576 = 625$$

$$\therefore BC = 25\text{cm}$$

$$\therefore \sin C = \frac{7}{25} \quad , \quad \sin B = \frac{24}{25}$$

$$\tan C = \frac{7}{24} \quad , \quad \cos A = \frac{7}{25}$$



مثال 22 / حل المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا علمت أن :

$$AC = 6\text{ cm} , AB = 3\text{ cm}$$

الحل /

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$36 = 9 + (BC)^2$$

$$BC = 3\sqrt{3}$$

أستكملنا ايجاد اطوال الاضلاع ،

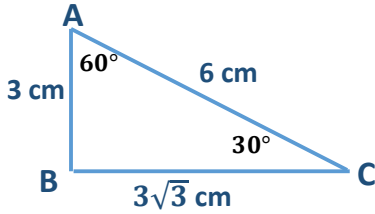
والآن سنجد زوايا المثلث الباقية

$$\tan C = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = 30^\circ$$

$$m \angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



حلول تمارين (4-3)

س1/ ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه $\sin C = \frac{8}{17}$ جد : $\cos C$, $\tan C$, $\sin A$

الحل/

$$\sin C = \frac{8}{17} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

نفرض ان المقابل = $8k$ ، نفرض ان الوتر = $17k$

حسب نظرية فيثاغورس :

$$(BC)^2 = (AC)^2 - (AB)^2$$

$$(BC)^2 = (17k)^2 - (8k)^2$$

$$(BC)^2 = 289k^2 - 64k^2$$

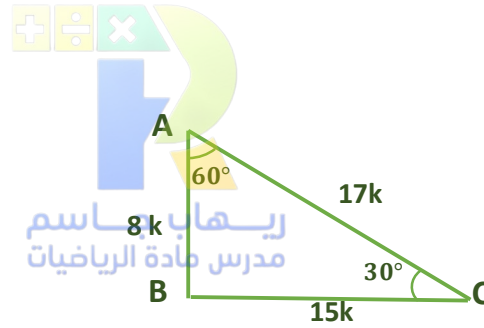
$$(BC)^2 = 225k^2$$

$$BC = 15k$$

$$\cos C = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$$

$$\tan C = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}$$

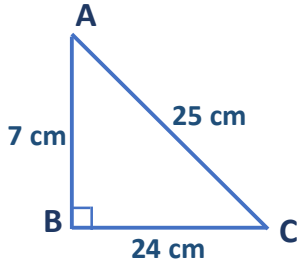
$$\sin A = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$$



س2/ ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه $AB = 25cm$, $BC = 24cm$ جد قيمة

$\sin^2 B + \cos^2 B$ وباستخدام المعلومات المعطاة ؟

الحل/



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = 625 - 576$$

$$(AC)^2 = 49$$

$$AC = 7cm$$

$$\sin B = \frac{7}{25}$$

$$\cos B = \frac{24}{25}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 B + \cos^2 B &= \left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 \\ &= \frac{49}{625} + \frac{576}{625} = \frac{625}{625} = 1 \end{aligned}$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

س3/ اذا كان $\cos Q = \frac{4}{5}$ فأوجد : $\sin Q$, $\tan Q$

الحل/

$$\because \cos Q > 0$$

$\therefore Q$ تقع في الربع الاول او الربع الرابع

$$\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$$

$$\sin^2 Q + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 Q + \frac{16}{25} = 1$$

$$\sin^2 Q = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 Q = \frac{25 - 16}{25} \rightarrow \sin^2 Q = \frac{9}{25} \rightarrow \sin Q = \pm \frac{3}{5}$$

لان Q تقع في الربع الاول $\sin Q = \frac{3}{5}$

$$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

لان Q تقع في الربع الرابع $\sin Q = -\frac{3}{5}$

$$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

س4/ سلم طوله (10cm) مرتكز طرفه الاسفل على ارض أفقيّة وطرفه الآخر على حائط شاقولي فإذا كانت الزاوية بين السلم والارض (30°) فما بعد طرفه الاعلى عن الارض وطرفه الاسفل عن الحائط ؟ $Ans (\sqrt{3} = 1.73)$.

الحل/

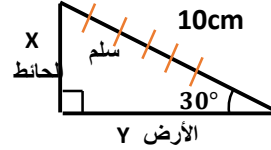
$$\sin 30^\circ = \frac{x}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$$

$$2x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5m$$

بعد الطرف الاعلى عن الارض



$$\cos 30^\circ = \frac{y}{10}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10}$$

$$2y = 10\sqrt{3} \rightarrow y = \frac{10\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = 5\sqrt{3}m$$

$$y = 5 \times 1.73 \rightarrow y = 8.63m$$

بعد الطرف الاسفل عن الحائط

س5/ ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه $\overline{AB} = 20\text{cm}$ ($M\angle CAB = 60^\circ$) جد مساحته منطقتة ؟

الحل/

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

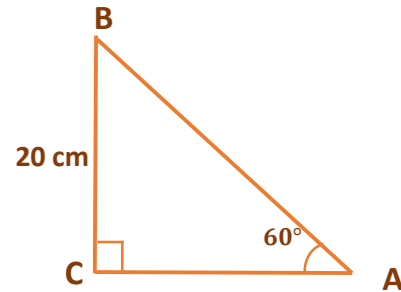
$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{20} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{20} \rightarrow AC = 10\text{cm}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{20} \rightarrow BC = 10\sqrt{3}\text{cm}$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times AC \times BC$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3}$$

$$\text{مساحة المثلث} = 50\sqrt{3}\text{cm}^2$$



س6/ جد قيمة:

(A)

$$\frac{3}{4} \tan^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + 3 \tan 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \tan 60^\circ$$

$$= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (3 \times 1) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{1} = 1 + 3 = 4$$

(B)

$$\cos^2 45^\circ \sin 60^\circ \tan 60^\circ \cos^2 30^\circ$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

(C)

$$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos (180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 150^\circ = \tan (180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

س7/ شبه منحرف $ABCD$ فيه $AD = BC$ (متساوي الساقين)

$DC = 20\text{ cm}$, $AD = 6\text{ cm}$, $AB = 14\text{ cm}$, جد $m\angle CDA$ ؟

الحل/

نرسم من B مستقيم $\perp DC$ في نقطة M

نرسم من A مستقيمي $\perp DC$ في نقطة N

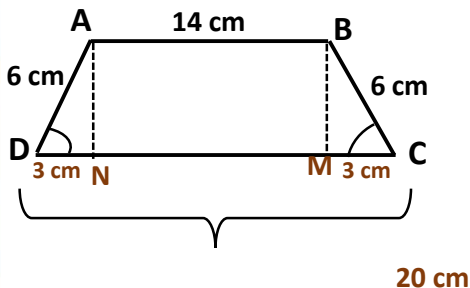
في المثلثان AND , BCM $DN = MC = 3\text{ cm}$

في المثلث ADN القائم الزاوية في N

$$\cos \angle D = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos D = \frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m\angle CDA = 60^\circ$$



أسئلة حلول الفصل الرابع

- س1/ جد محيط المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها $5\sqrt{3}cm$ ؟
- س2/ رجل طوله $1.8m$ وقف امام مصباح وعلى بعد $22m$ منه وجد ان طول ظله على الأرض $18m$ فما ارتفاع المصباح عن سطح الأرض ؟
- س3/ سلم اسند على جدار فصنع مع الأرض زاوية قياسها 30° ووصل الى نقطة ترتفع $3m$ عن سطح الأرض . ثم ادير السلم واسند على جدار اخر في الجهة الثانية فصنع مع الأرض زاوية 45° فما عرض الشارع ؟
- س4/ وجد رجل على ظهر زورق زاوية ارتفاع قمة عمود فوق سطح المنزل يساوي 30° وبعد ان تحرك الزورق مسافة $60m$ في اتجاه العمود تماماً وجد أن زاويتي ارتفاع قمة العمود وقاعدته 60° و 30° على التوالي . احسب ارتفاع العمود والمنزل ؟
- س5/ سارية علم مثبتة فوق عمارة طولها $\frac{1}{9}$ ارتفاع العمارة وجد ان رجل من نقطة على الأرض ان زاوية ارتفاع قاعدة السارية 37° وبعد ان تقدم نحو العمارة مسافة $30m$ وجد أن زاوية ارتفاع قمة السارية 53° . فما ارتفاع العمارة ؟

ملاحظة / $\tan 53^\circ = \frac{4}{3}$, $\tan 37^\circ = \frac{3}{4}$

20
24

4
الجزء
العلمي



2
الجزء

أمسح الباركود



07718091370

إعداد الأستاذ

ريهاب جاسم

ريهاب جاسم محمد

المنهج مطور على يوتيوب

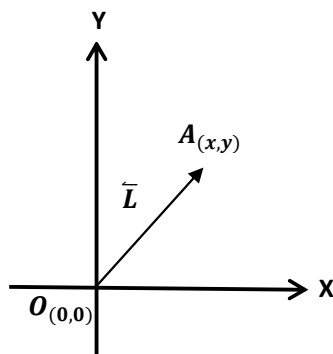
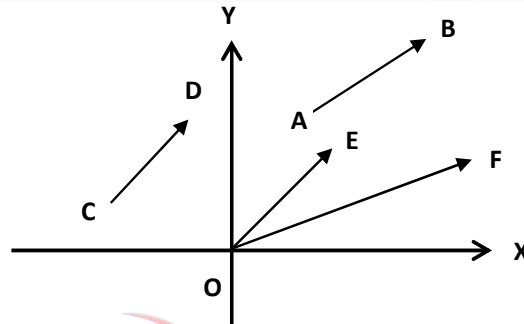
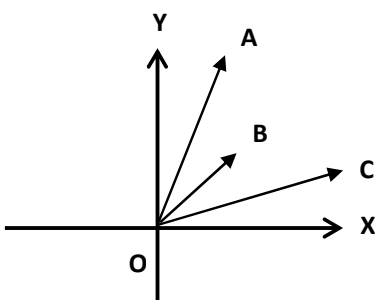


ريـهاب جاسـم
مدرس مادة الرياضيات

الفصل الخامس

المتجهات

المتجه وهو عبارة عن قطعة مستقيمة موجهة ويسمى المتجه الذي يبتدئ بنقطة الاصل بالمتجه القياسي أو المتجه المقيد . اما المتجه الغير مرتبط بنقطة الاصل فيسمى بالمتجه الحر (الطليق).



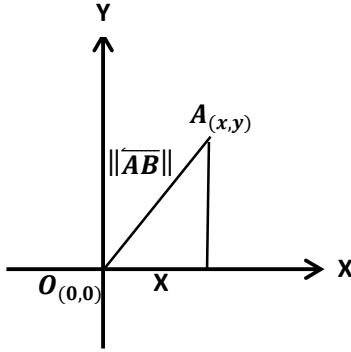
المتجهان المتوازيان / وهما متجهان متوازيان وقد يكونان في نفس الاتجاه أو يكونان باتجاهين متعاكسين .
المتجهان المتكافئان / وهما المتجهان اللذان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه .

طول المتجه / وهي المسافة بين نقطة بداية المتجه (نقطة الاصل) ونقطة أنتهاء المتجه .

فمثلاً طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ يرمز له $\|\overrightarrow{AB}\|$

المتجه الصفري / يسمى المتجه $(0, 0)$ بالمتجه الصفري لان نقطة بدايته ونقطة نهايته هي نقطة الاصل ويرمز له $\vec{0}$ وطوله $\|\vec{0}\| = 0$ صفر .





المتجهان المتساويان / يقال للمتجهين

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ انهما متساويان اذا وفقط اذا كان

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

اتجاه المتجه / هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات .

طول المتجه / وهي المسافة بين نقطة بداية المتجه ونقطة

أنتهائه .

فمثلاً طول المتجه $\vec{AB}$ يساوي طول AB يرمز له $\|\vec{AB}\|$

التعريف /

إذا كان $\vec{A}$ متجهها حيث $\vec{A} = (x, y)$

$$\|\vec{OA}\| = \|\vec{A}\| = OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال 1 / جد طول كل من المتجهات الآتية :

(1) $(3, 4)$

(2) $(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10})$

(3) $(-12, -9)$

ريهاب جاسم محمد
مدرس مادة الرياضيات

الحل /

1. $\sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ وحدة طول

2. $\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{10})^2 + (\frac{7\sqrt{2}}{10})^2} = \sqrt{\frac{2}{100} + \frac{98}{100}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1$ وحدة طول

3. $\sqrt{(-12)^2 + (-9)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$ وحدة طول

في الأمثلة السابقة استخدمنا قانون الطول لإيجاد طول المتجه

$$\|\vec{A}(x, y)\| = \|\vec{A}\| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$$

اتجاه المتجه

إذا كان $\vec{A} = (x, y)$ متجهاً فإن اتجاه $\vec{A}$ يعرف بقياس الزاوية Q حيث $0 \leq Q < 2\pi$ وتكون مقاسةً باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة من محور السينات الموجب الى المتجه $\vec{A}$ حيث نلاحظ ان المتجه الصفري لا يمكن تعريف اتجاهه .

اتجاه المتجه / هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

قانوني اتجاه المتجه

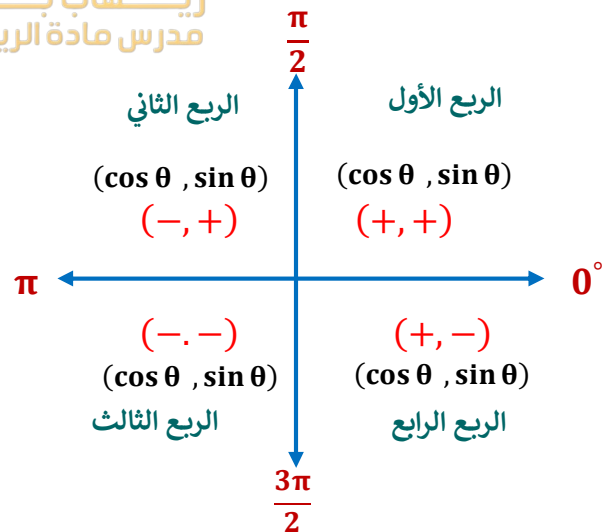
$$\sin Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\|\vec{A}\|}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\|\vec{A}\|}$$

الجدول حفظ

الزاوية Q	$\sin Q$	$\cos Q$	$\tan Q$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	غير معرف
180°	0	-1	0
270°	-1	0	غير معرف
360°	0	1	0
0°	0	1	0

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



ملاحظات :

إذا كانت الزاوية تقع في:

[a] الربع الأول فأن : $Q = S$

[b] الربع الثاني فأن : $Q = \pi - S$

[c] الربع الثالث فأن : $Q = \pi + S$

[d] الربع الرابع فأن : $Q = 2\pi - S$

S يقال لها زاوية الأسناد

مثال 2/ جد طول واتجاه المتجه $\overrightarrow{OB} = (\sqrt{3}, -1)$
الحل/

وحدة طول $\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

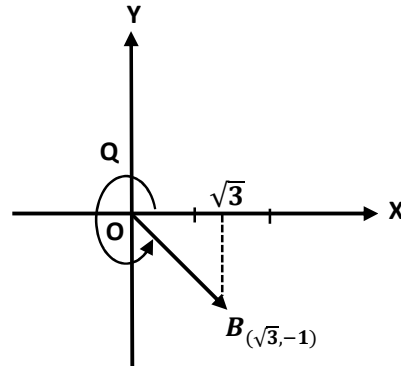
نفرض ان Q يساوي الزاوية التي يحددها المتجه $\overrightarrow{OB}$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{-1}{2}$$

من الرسم نلاحظ ان Q تقع في الربع الرابع

اتجاه المتجه هو $2\pi = \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ ←



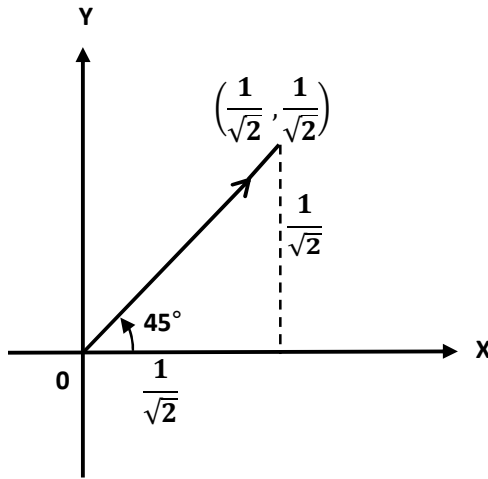
مثال 3/ جد اتجاه المتجه $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

الحل/

نفرض ان Q تساوي قياس زاوية المتجه $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\cos Q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\|A\|}$$

$$\cos Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\sin Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\|A\|} \quad \sin Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

∴ تقع في الربع الاول وتكون $\frac{\pi}{4}$ ريهاب جاسم مدرس مادة الرياضيات

مثال 4/ جد المتجه الذي طوله = 5 وحدات واتجاهه $\frac{\pi}{6}$

الحل/

نفرض ان متجه $A(x, y)$

$$\cos \theta = \frac{x}{\|A\|} \rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{5} \rightarrow 2x = 5\sqrt{3} \rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\|A\|} \rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{y}{5} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{5} \rightarrow 2y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

∴ المتجه هو $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$

حلول تمارين (5-1)

س1/ جد طول واتجاه كل من المتجهات الآتية ثم ارسم القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل كلا منها :

a) $(-2, 2)$

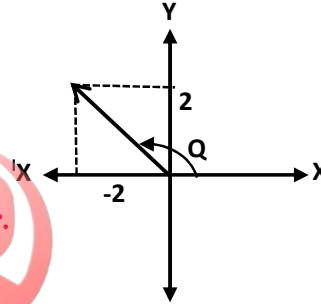
$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} = \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{وحدة طول} \end{aligned}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

∴ Q تقع في الربع الثاني



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

b) $(-3, 0)$

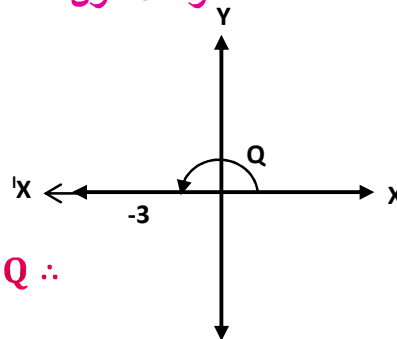
$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} = \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{9 + 0} = 3 \quad \text{وحدة طول} \end{aligned}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{3} = 0$$

$$Q = \pi$$

∴ Q تقع في الربع الثاني



c) $(1, \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} \rightarrow \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

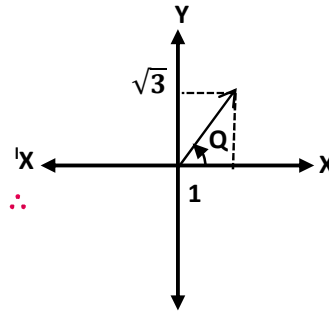
وحدة طول

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q = \frac{\pi}{3}$$

∴ Q تقع في الربع الاول

d) $(0, 6)$

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} \rightarrow \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (6)^2} \\ &= \sqrt{0 + 36} = \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

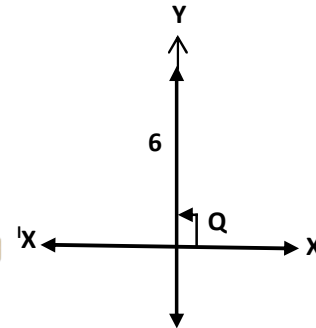
وحدة طول

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{6}{6} = 1$$

$$Q = \frac{\pi}{2}$$

∴ Q تقع في الربع الاول

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضياتe) $(\sqrt{3}, -1)$

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} \rightarrow \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

وحدة طول

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-1}{2}$$

∴ Q تقع في الربع الرابع

$$Q = \frac{11\pi}{6}$$

f) $(-3, -3)$

$$\rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ وحدة طول}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

∴ Q تقع في الربع الثالث

$$Q = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

g) $(0, -8)$

$$\rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-8)^2} = \sqrt{0 + 64} = \sqrt{64} = 8 \text{ وحدة طول}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{8} = 0$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-8}{8} = -1$$

∴ Q تقع في الربع الثالث
ريهاب جاسم محمد
مدرس مادة الرياضيات

$$Q = \frac{3\pi}{2}$$

س2/ جد المتجه الذي طوله واتجاهه كالآتي :

$$(a) \quad \|\vec{B}\| = 2, \quad Q = \frac{\pi}{6}, \quad Q = \frac{\pi}{6} = \frac{180}{6} = 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2} \rightarrow 2x = 2\sqrt{3} \rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{2} \rightarrow 2y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{2} \rightarrow y = 1$$

∴ المتجه هو $(\sqrt{3}, 1)$

(b) $\|\vec{B}\| = \sqrt{2}$, $Q = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$$\cos Q = \frac{x}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\sin Q = \frac{y}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

∴ المتجه هو $(1, 1)$

(c) $\|\vec{B}\| = 4$, $Q = \pi = 180^\circ$

$$\cos Q = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{x}{4} \rightarrow x = -4$$

$$\sin Q = \frac{y}{4} \rightarrow 0 = \frac{y}{4} \rightarrow y = 0$$

∴ المتجه هو $(-4, 0)$

(d) $\|\vec{B}\| = 3$, $Q = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

$$\cos Q = \frac{x}{3} \rightarrow 0 = \frac{x}{3} \rightarrow x = 0$$

$$\sin Q = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{y}{3} \rightarrow y = -3$$

∴ المتجه هو $(0, -3)$

(e) $\|\vec{B}\| = 4$, $Q = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

$$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

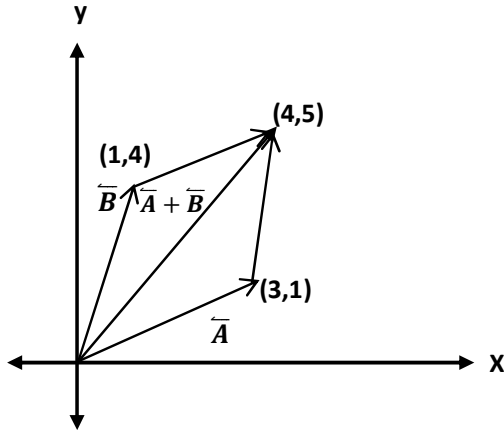
$$\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos Q = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow \therefore x = -2$$

$$\sin Q = \frac{y}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{4} \rightarrow 2y = 4\sqrt{3} \rightarrow y = \frac{4\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = 2\sqrt{3}$$

∴ المتجه هو $(-2, 2\sqrt{3})$

جمع المتجهات



إذا كان :

$$\vec{A} = (x_1, y_1) , \quad \vec{B} = (x_2, y_2)$$

فإن :

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

مثال 5/ إذا كان $\vec{A} = (3, 1)$, $\vec{B} = (1, 4)$ فجد $\vec{A} + \vec{B}$

الحل/

$$\vec{A} + \vec{B} = (3, 1) + (1, 4) = (4, 5)$$

مثال 6/ إذا كان $\vec{A} = (-4, 3)$, $\vec{B} = (5, -2)$ فجد $\vec{A} + \vec{B}$

الحل/

$$\vec{A} + \vec{B} = (-4, 3) + (5, -2) = (1, 1)$$

مثال 7/ جد النظير الجمعي للمتجه $(-2, 3)$ ؟

الحل/

النظير الجمعي للمتجه $(-2, 3)$ هو $(2, -3)$

لأن :

$$(-2, 3) + (2, -3) = (-2 + 2, 3 + (-3)) = (0, 0)$$

ضرب المتجهات

مثال 8/ إذا كان $\vec{C} = (-1, 3)$ فجد $2\vec{C}$, $\frac{1}{2}\vec{C}$, $-3\vec{C}$ ؟

الحل /

$$2\vec{C} = 2(-1, 3) = (-2, 6)$$

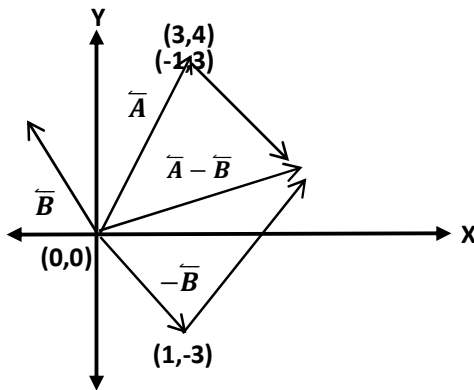
$$\frac{1}{2}\vec{C} = \frac{1}{2}(-1, 3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \rightarrow -3\vec{C} = -3(-1, 3) = (3, -9)$$

طرح متجهين

مثال 9/ إذا كان $\vec{A} = (3, 4)$, $\vec{B} = (-1, 3)$ فجد $\vec{A} - \vec{B}$

الحل /

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{B} &= \vec{A} + (-\vec{B}) \\ &= (3, 4) + (1, -3) = (4, 1) \end{aligned}$$



أمسح الباركود بالهاتف لطفاً

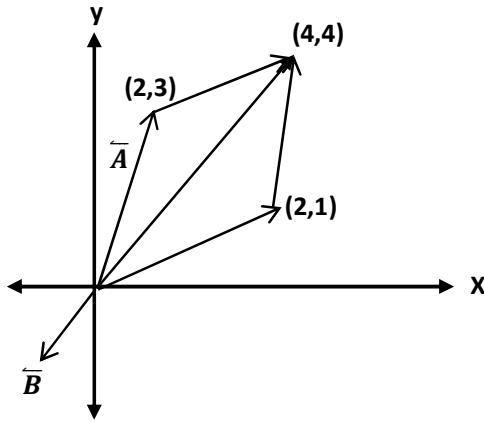


مثال 10/ اذا كان $\vec{A} = (2, 3)$, $\vec{B} = (-2, -1)$, $K = 2$, $L = -1$ فجد :

$$K\vec{A} - L\vec{B} \quad (1)$$

$$\vec{A} - \vec{B} \quad (2)$$

الحل /



$$K\vec{A} = 2(2, 3) = (4, 6)$$

$$L\vec{B} = -1(-2, -1) = (2, 1)$$

$$(4, 6) - (2, 1) = (4, 6) + (-2, -1) = (2, 5)$$

$$(2, 3) - (-2, -1) = (2, 3) + (2, 1) = (4, 4)$$

متجه الوحدة

إذا كان $\vec{C} = (x, y)$ فإن :

$$\vec{C} = (x, 0) + (0, y)$$

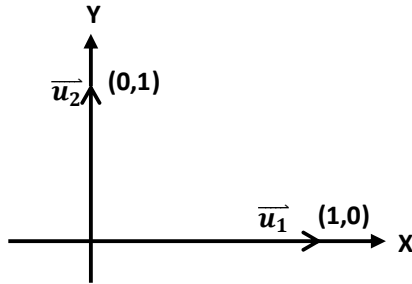
$$\vec{C} = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\vec{C} = x\vec{U}_1 + y\vec{U}_2$$

1. متجه الوحدة الاساسي $\vec{u}_1$

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الاصل وطولها وحدة طول واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات .

ويرمز له بالرمز $\vec{u}_1 = (1, 0)$

2. متجه الوحدة الاساسي $\vec{u}_2$ 

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الاصل وطولها وحدة طول واتجاهها هوالاتجاه الموجب لمحور الصادات .

ويرمز له بالرمز $\vec{u}_2 = (0, 1)$

مثال 12/ اذا كان $\vec{A} = (4, 7)$, $\vec{B} = (-5, 3)$ فجد $\vec{A} + \vec{B}$ وعبر عن النتائج بدلالة متجه الوحدة ؟

الحل/

$$\vec{A} + \vec{B} = (4, 7) + (-5, 3) = (-1, 10)$$

$$(-1, 10) = -\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2$$

مثال 13/ اذا كان $\vec{A} = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$, $\vec{B} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ جد $\vec{A} + \vec{B}$ ؟

الحل/

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 = (3, -2)$$

مثال 14/ اذا كان $\vec{A} = (5, -3)$ وكان $\vec{B} = (-3, 4)$ وكان $K = 2$, $L = 3$ جد $K\vec{A} - L\vec{B}$ ثم عبر عنه بدلالة متجه الوحدة ؟

الحل/

$$K\vec{A} - L\vec{B} = 2(5, -3) - 3(-3, 4)$$

$$= (10, -6) + (9, -12)$$

$$K\vec{A} - L\vec{B} = (19, -18)$$

$$= 19\vec{u}_1 - 18\vec{u}_2$$

حلول تمارين (5-2)

س1/ جد مقدار واتجاه كل من المتجهات الآتية موضحاً بالرسم :

(a) $(-2, -2)$ (b) $(3, 0)$ (c) $\sqrt{3} \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ (d) $-\vec{U}_1 - 2\vec{U}_2$

الحل/

a) $(-2, 2)$

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} = \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

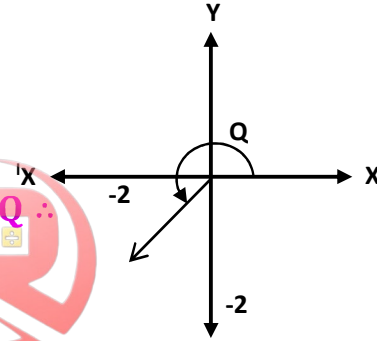
وحدة طول

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

∴ Q تقع في الربع الثالث

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

b) $(3, 0)$

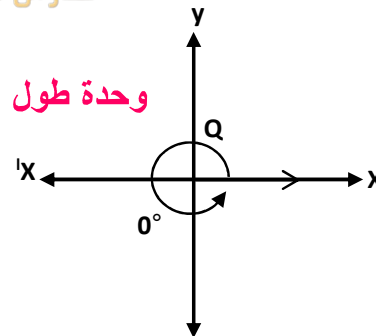
$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} = \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{9 + 0} = 3 \end{aligned}$$

وحدة طول

$$\cos Q = \frac{x}{3} \rightarrow \cos Q = \frac{3}{3} = 1$$

$$\sin Q = \frac{y}{3} \rightarrow \sin Q = \frac{0}{3} = 0$$

$$\therefore Q = 0, 360^\circ$$



c) $\sqrt{3} \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = (\sqrt{3}, 1)$

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه} = \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

وحدة طول

$$\cos Q = \frac{x}{\|A\|} \rightarrow \cos Q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|A\|} \rightarrow \sin Q = \frac{1}{2}$$

∴ Q تقع في الربع الاول

$$Q = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$d) -\vec{U}_1 - 2\vec{U}_2 = (-1, -2)$$

$$\begin{aligned} \text{طول المتجه } \|\vec{A}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \quad \text{وحدة طول} \end{aligned}$$

$$\cos Q = \frac{x}{\|A\|} \rightarrow \cos Q = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|A\|} \rightarrow \sin Q = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

س2/ بسط ما يأتي : $4(1, -1)$, $-7(1, 5)$, $7(3\vec{U}_1 + 2\vec{U}_2)$

الحل /

$$4(1, -1) = (4, -4)$$

$$-7(1, 5) = (-7, -35)$$

$$7(3\vec{U}_1 + 2\vec{U}_2) = 7(3, 2) = (21, 14)$$

س3/ عبر عن كل المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$

الحل /

$$(a) (-1, 4) = -\vec{U}_1 + 4\vec{U}_2$$

$$(b) (5, 3) = 5\vec{U}_1 + 3\vec{U}_2$$

$$(c) (2, 3) = 2\vec{U}_1 + 3\vec{U}_2$$

$$(d) (-3, -5) = -3\vec{U}_1 - 5\vec{U}_2$$

$$(e) (0, -1) = -\vec{U}_2$$

$$(f) (2, 0) = 2\vec{U}_1$$

س4/ إذا كان $\vec{E} = (x, y)$ حيث $x, y \in R$ وكان $\vec{A}$ أي متجه بحيث

$$\vec{A} + \vec{E} = \vec{E} + \vec{A} = \vec{A} \quad \vec{E} = (0, 0) \text{ برهن على أن}$$

الحل/

نفرض أن $\vec{E} = (x, y)$, $\vec{A} = (A, B)$

$$\vec{A} + \vec{E} = \vec{A}$$

$$(A, B) + (x, y) = (A, B)$$

$$(A + x, B + y) = (A, B)$$

$$A + x = A \rightarrow x = A - A \rightarrow x = 0$$

$$B + y = B \rightarrow y = B - B \rightarrow y = 0$$

$$\therefore \vec{E} = (x, y) \quad \therefore \vec{E} = (0, 0)$$

س5/ إذا كان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = (0, 0)$ أثبت أن $\vec{A} = -\vec{B}$

الحل/

$$\vec{A} + \vec{B} = (0, 0)$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (0, 0)$$

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (0, 0)$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$y_1 + y_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

$$y_1 = -y_2$$

$$\vec{A} = (x_1, y_1)$$

$$\vec{A} = (-x_2, -y_2)$$

$$\vec{A} = -(x_2, y_2) = -\vec{B} \quad \therefore \vec{A} = -\vec{B}$$

س6/ إذا كان $K = 3, L = -2$, $\vec{B} = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\vec{A} = (\sqrt{3}, 1)$ فجد كلاهما يأتي :

(a) $K\vec{B} = 3(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$

(b) $\vec{A} + \vec{B} = (\sqrt{3}, 1) + (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3})$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad K\vec{A} - \vec{B} &= 3(\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (3\sqrt{3}, 3) + (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}) \\
 &= (3\sqrt{3} - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{3}) \\
 (d) \quad K(\vec{A} + \vec{B}) &= 3[(\sqrt{3}, 1) + (\sqrt{2}, \sqrt{3})] \\
 &= (3(\sqrt{3} + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3})) = (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{3}) \\
 (e) \quad * KL(\vec{A} - \vec{B}) &= 3 \times -2[(\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{2}, \sqrt{3})] \\
 &= -6[(\sqrt{3}, 1) + (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})] \\
 &= -6(\sqrt{3} - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}) = (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}, -6 + 6\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

س7/ حل السؤال 6 بالتعبير عن كل متجه بواسطة متجهي الوحدة $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ إذا كان $K = 3, L = -2, \vec{A} = (\sqrt{3}, 1), \vec{B} = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ فجد كلاهما يأتي :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad K\vec{B} &= 3(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \vec{U}_1 + 3\sqrt{3} \vec{U}_2 \\
 (b) \quad \vec{A} + \vec{B} &= (\sqrt{3}, 1) + (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}) \\
 &= (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \vec{U}_1 + (1 + \sqrt{3}) \vec{U}_2 \\
 (c) \quad K\vec{A} - \vec{B} &= 3(\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (3\sqrt{3}, 3) + (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}) \\
 &= (3\sqrt{3} - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} - \sqrt{2}) \vec{U}_1 + (3 - \sqrt{3}) \vec{U}_2 \\
 (d) \quad K(\vec{A} + \vec{B}) &= 3[(\sqrt{3}, 1) + (\sqrt{2}, \sqrt{3})] \\
 &= (3(\sqrt{3} + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3})) = (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{3}) \\
 &= (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \vec{U}_1 + (3 + 3\sqrt{3}) \vec{U}_2 \\
 (e) \quad * KL(\vec{A} - \vec{B}) &= 3 \times -2[(\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{2}, \sqrt{3})] \\
 &= -6[(\sqrt{3}, 1) + (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})] \\
 &= -6(\sqrt{3} - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}) = (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}, -6 + 6\sqrt{3}) \\
 &= (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}) \vec{U}_1 + (6 + 6\sqrt{3}) \vec{U}_2
 \end{aligned}$$

س8/ عبر عن كل المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة $\vec{U}_1, \vec{U}_2$
 أ- متجه طوله 3 وحدات واتجاهه $\frac{\pi}{3}$

الحل/

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{x}{\|\vec{A}\|} \rightarrow \cos 60^\circ = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{3} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{y}{\|\vec{A}\|} \rightarrow \sin 60^\circ = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

∴ المتجه هو $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ وبدلالة متجه الوحدة يصبح $\frac{3}{2}\vec{U}_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{U}_2$

ب- متجه طوله 10 وحدات واتجاهه $\frac{\pi}{6}$

الحل/

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{\|\vec{A}\|} \rightarrow \cos 30^\circ = \frac{x}{10} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 5\sqrt{3}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{y}{\|\vec{A}\|} \rightarrow \sin 30^\circ = \frac{y}{10} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10} \rightarrow y = 5$$

∴ المتجه هو $(5\sqrt{3}, 5)$ وبدلالة متجه الوحدة يصبح $5\sqrt{3}\vec{U}_1 + 5\vec{U}_2$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

ج- متجه طوله 5 وحدات واتجاهه $\frac{\pi}{4}$

الحل/

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{x}{\|\vec{A}\|} \rightarrow \cos 45^\circ = \frac{x}{5} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{y}{\|\vec{A}\|} \rightarrow \sin 45^\circ = \frac{y}{5} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{5} \rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

∴ المتجه هو $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ وبدلالة متجه الوحدة يصبح $\frac{5}{\sqrt{2}}\vec{U}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\vec{U}_2$

د- متجه طوله $\frac{3}{4}$ وحدات واتجاهه π

الحل/

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{\frac{3}{4}} \rightarrow -1 = \frac{x}{\frac{3}{4}} \rightarrow x = \frac{-3}{4}$$

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{\frac{3}{4}} \rightarrow 0 = \frac{y}{\frac{3}{4}} \rightarrow y = 0$$

س

∴ المتجه هو $\left(\frac{-3}{4}, 0\right)$ ويدلّ على متجه الوحدة يصبح $\frac{-3}{4} \vec{U}_1$

9/ إذا كان $\vec{A} = (5, 2)$, $\vec{B} = (2, -4)$ جد x بحيث : $2\vec{A} + 3\vec{x} = 5\vec{B}$

الحل/

$$2\vec{A} + 3\vec{x} = 5\vec{B}$$

$$3\vec{x} = 5\vec{B} - 2\vec{A}$$

$$3\vec{x} = (10, -20) - (10, 4)$$

$$3\vec{x} = (10, -20) + (-10, -4)$$

$$3\vec{x} = (0, -24)$$

$$\frac{1}{3} [3\vec{x} = (0, -24)]$$

$$\vec{x} = \left(0, \frac{1}{3} * -24\right)$$

$$\vec{x} = (0, -8)$$



أمسح الباركود بالهاتف لطفاً

أسئلة حول الفصل الخامس

س1/ إذا كان $\vec{A} = (-1, 2)$ جد $\vec{B}$ إذا علم ان :

$$2\vec{A} - \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{A}) = 2\vec{B} - \frac{\vec{A} - 2\vec{B}}{3} + \frac{5\vec{B} - \vec{A}}{6}$$

س2/ إذا كان $\vec{A} = (2, -3)$ ، $\vec{B} = (-2, 4)$ عبر عن المتجه $\vec{C} = (5, 7)$ بدلالة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ؟

س3/ حل المعادلات الآتية :

1. $(x, 2) + (-3, y) = (0, 5)$
2. $(2x, 3y) - (y, -5x) = (4, -7)$

س4/ إذا كان $\vec{A} = (3, 4)$ ، $\vec{B} = (5, 0)$ برهن ان :

هو متجه وحدة $\frac{\vec{B} + \vec{A}}{\|\vec{A} + \vec{B}\|}$

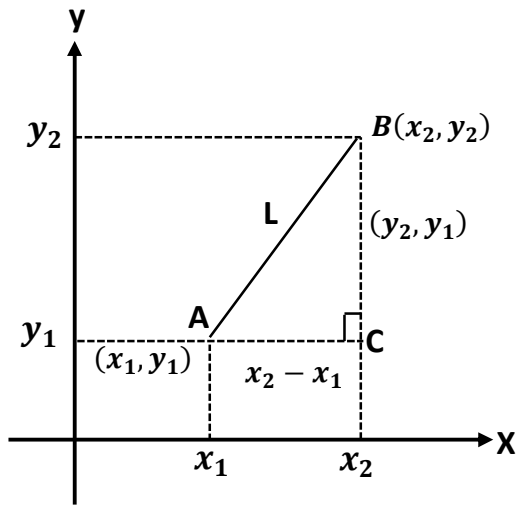


أمسح الباركود بالهاتف لطفاً

الفصل السادس

الهندسة الاحداثية

المسافة بين نقطتين معلومتين

لتكن $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$

نقطتين في المستوى

ومن $\triangle ABC$ القائم الزاوية في C يكون :

$$L^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \quad (\text{فيثاغورس})$$

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

قانون المسافة بين نقطتين

او بطريقة أخرى :

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

إذا علمنا أن إحداثيات طرفي متجه $\overrightarrow{AB}$ فإنه يمكن التعبير عن المتجه الحركي بدلالة هذه الإحداثيات وبأستخدام الخاصية التالية :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$= (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$\therefore \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إيجاد المسافة بين نقطتين معلومتين

$$\text{قانون المسافة بين نقطتين} \longrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ملاحظة مهمة

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} \text{ فإن } \overrightarrow{AB} \text{ لايجاد}$$

مثال 1 / اثبت ان النقط $A = (-2, 7)$ ، $B = (-3, 4)$ ، $C = (1, 16)$ تنتمي لمستقيم واحد؟

الحل /

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (-3, 4) - (-2, 7) = (-1, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = (1, 16) - (-2, 7) = (3, 9) = -3(-1, -3)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = -3 \overrightarrow{AC}$$

$\therefore A, B, C$ تنتمي لمستقيم واحد .

طريقة ثانية لحل المثال

$$AB = \sqrt{(-2 + 3)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \text{ وحدة طول}$$

$$BC = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (4 - 16)^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ وحدة طول}$$

$$AC = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (7 - 16)^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ وحدة طول}$$

$$BC = AB + AC$$

A, B, C تنتمي لمستقيم واحد والا لكانت رؤوس مثلث اذ ان مجموع أي ضلعين في مثلث اكبر من الضلع الثالث.

مثال 2 / برهن ان المثلث الذي رؤوسه النقط $A = (1,1)$ ، $B = (2,2)$ ، $C = (5,-1)$ هو مثلث قائم الزاوية؟

الحل /

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ وحدة طول}$$

$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ وحدة طول}$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \text{ وحدة طول}$$

$$\sqrt{(20)^2} = \sqrt{(2)^2} + \sqrt{(18)^2} \quad \text{حسب مبرهنة فيثاغورس}$$

$$20 = 2 + 18$$

∴ $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B .

مثال 3 / بين ان النقط $A = (-3,-1)$ ، $B = (1,-4)$ ، $C = (10,-5)$ ، $D = (6,-2)$ تمثل رؤوس متوازي الاضلاع؟

الحل / نفرض ان نقطة المنتصف لقطري الشكل الرباعي تمثل (R) ولايجاد قيمة هذه النقطتين بدلالة القطر (AC)

$$R = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$R = \left(\frac{-3 + 10}{2}, \frac{-1 - 5}{2} \right)$$

$$R = \left(\frac{7}{2}, -3 \right)$$

بدلالة القطر (BD)

$$R = \left(\frac{1 + 6}{2}, \frac{-4 - 2}{2} \right) \rightarrow R = \left(\frac{7}{2}, -3 \right)$$

الشكل الرباعي هو متوازي اضلاع لان قطراه متناصفان ∴

مثال 4 / اذا كانت النقط $A(3,2a)$ ، $B(a,1)$ ، $C(4,1)$ هي رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه $AB=AC$ **جد قيمة $a \in R$ ؟**

الحل /

$$\text{طول قطعة المستقيم} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

بما ان $AB=AC$ (معطى)

$$\therefore \sqrt{(3 - a)^2 + (2a - 1)^2} = \sqrt{(3 - 4)^2 + (2a - 1)^2}$$

$$(3 - a)^2 + (2a - 1)^2 = (3 - 4)^2 + (2a - 1)^2 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$(3 - a)^2 + (2a - 1)^2 - (2a - 1)^2 = (-1)^2$$

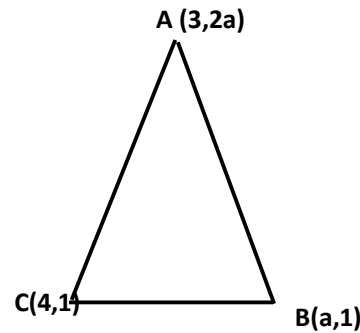
$$(3 - a)^2 = 1$$

$$(3 - a) = \pm 1$$

$$\text{اما } 3 - a = 1 \rightarrow a = 3 - 1 = 2$$

$$\text{تهمل } 3 - a = -1 \rightarrow a = 3 + 1 = 4$$

$$\therefore a = 2$$



سبب اهمال القيمة (4) هو لان النقطة $B(a,1)$ سوف تصبح $B(4,1)$ بعد التعويض وهي نفس مساقط النقطة $C(4,1)$ وهذا غير ممكن لانه سوف تصبح هنالك نقطتان فقط وهذا خلاف المعطى وهي ثلاث نقاط وليست نقطتان.

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

حلول تمارين (6-1)

س1 / جد المسافة بين كل زوج من النقاط الاتية :

$$(0,0), (3,4) \quad (أ)$$

$$\text{وحدة طول} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$(1,2), (4,6) \quad (ب)$$

$$\text{وحدة طول} = \sqrt{(6 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

(ج) $(-3, -5)$, $(5, 1)$

$$\sqrt{(-3 - 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ وحدة طول}$$

(د) $(-1, 4)$, $(-2, 3)$

$$\sqrt{(-1 + 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \text{ وحدة طول}$$

س 2 / جد محيط المثلث الذي رؤوسه $A(5, 7)$, $B(1, 10)$, $C(-3, -8)$

الحل /

$$AB = \sqrt{(1 - 5)^2 + (10 - 7)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ وحدة طول}$$

$$BC = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-8 - 10)^2} = \sqrt{16 + 324} = 2\sqrt{85} = 18.4 \text{ وحدة طول}$$

$$AC = \sqrt{(-3 - 5)^2 + (-8 - 7)^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ وحدة طول}$$

$$\text{وحدة طول} = 5 + 17 + 18.4 = 40.4$$

س 3 / رؤوس شكل رباعي هي $A(4, -3)$, $B(7, 10)$, $C(-8, 2)$, $D(-1, -5)$ جد طول قطريه ؟ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

الحل /

$$\text{طول قطعة المستقيم} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{وحدة طول } AC = \sqrt{(-8 - 4)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{وحدة طول } BD = \sqrt{(-1 - 7)^2 + (-5 - 10)^2} = \sqrt{64 + 255} = 17$$



أمسح الباركود بالهاتف لطفاً



س4/ اثبت ان النقط $A(3,-2)$, $B(-5,0)$, $C(0,-7)$, $D(8,-9)$ هي رؤوس متوازي الاضلاع؟

الحل/

حل اخر للسؤال :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (0 + 2)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0 + 5)^2 + (-7 - 0)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(8 - 0)^2 + (-9 + 7)^2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(8 - 3)^2 + (-9 + 2)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore AB = CD$$

$$BC = AD$$

النقاط A, B, C, D هي نقاط متوازي اضلاع

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{A}$$

$$\overline{AB} = (-5, 0) - (-3, -2)$$

$$\overline{AB} = (-5, 0) + (-3, 2)$$

$$\overline{AB} = (-8, 2)$$

$$\overline{DC} = \overline{C} - \overline{D}$$

$$\overline{DC} = (0, -7) - (8, -9)$$

$$\overline{DC} = (0, -7) + (-8, 9)$$

$$\overline{DC} = (-8, 2)$$

$\therefore \overline{AB} = \overline{DC}$ وهما لا يشتركان بنقطة

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC} \therefore$$

$$\overline{BC} = \overline{C} - \overline{B}$$

$$\overline{BC} = (0, -7) - (-5, 0)$$

$$\overline{BC} = (0, -7) + (5, 0) = (5, -7)$$

$$\overline{AD} = \overline{D} - \overline{A}$$

$$\overline{AD} = (8, -9) - (3, -2)$$

$$\overline{AD} = (8, -9) + (-3, 2) = (5, -7)$$

$$\overline{BC} = \overline{AD}$$

$$\therefore \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

ولا يشتركان بنقطة واحدة

$\therefore$ النقاط A, B, C, D هي نقاط متوازي اضلاع

س 5 / اذا كانت $A(-2,5)$, $B(3,3)$, $C(-4,2)$ ثلاث رؤوس متوازي اضلاع ABCD جد احداثي نقطته

؟ D

الحل /

حل اخر للسؤال :

بما ان الشكل A,B,C,D متوازي اضلاع اذن قطراه متناصفان في نقطته مثل L

بما ان نقطته L هي منتصف القطر الأول $\overline{AC}$ لذلك نجد احداثي نقطته L من خلال احداثي القطر $\overline{AC}$

$$L = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$L = \left(\frac{-2 - 4}{2}, \frac{5 + 2}{2} \right)$$

$$L = \left(-3, \frac{7}{2} \right)$$

نفرض ان احداثي نقطته $D(w,n)$

ومن خلال معرفته نقطته المنتصف L

نجد نقطته D من خلال القطر $\overline{BD}$

$$L_x = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow -3 = \frac{w + 3}{2}$$

$$w + 3 = -6 \rightarrow w = -6 - 3$$

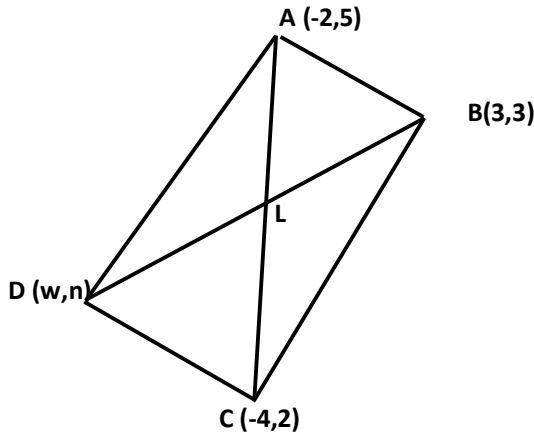
$$w = -9$$

$$L_y = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow \frac{7}{2} = \frac{n + 3}{2}$$

$$2n + 6 = 14 \rightarrow 2n = 14 - 6$$

$$2n = 8 \rightarrow n = 4$$

∴ نقطته $D(-9, 4)$



نفرض ان نقطته $D(m,n)$

$$\overline{AD} = \overline{D} - \overline{A}$$

$$\overline{AD} = (w, n) - (-2, 5)$$

$$\overline{AD} = (w, n) + (2 - 5)$$

$$\overline{AD} = (w + 2, n - 5)$$

$$\overline{BC} = \overline{C} - \overline{B}$$

$$\overline{BC} = (-4, 2) - (3, 3)$$

$$\overline{BC} = (-4, 2) + (-3, -3)$$

$$\overline{BC} = (-7, -1)$$

∴ حسب خواص المتوازي الاضلاع $\overline{AD} = \overline{BC}$

$$\therefore (w + 2, n - 5) = (-7, -1)$$

$$w + 2 = -7 \rightarrow$$

$$w = -7 - 2$$

$$w = -9$$

$$n - 5 = -1$$

$$n = -1 + 5$$

$$n = 4$$

∴ نقطته $D(-9, 4)$

س6 / بين ان المثلث الذي رؤوسه $A(2,3)$, $B(-1,-1)$, $C(3,-4)$ هو مثلث متساوي الساقين ؟

الحل /

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{16+9}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{25} = 5 \text{ وحدة طول}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1+49}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{50} \text{ وحدة طول}$$

$$\left[\overline{AB} = \overline{BC} \therefore \text{المثلث متساوي الساقين} \right]$$

س7 / اثبت ان النقط $(0,0)$, $(6,8)$, $(-3,-4)$ تقع على استقامة واحدة ؟

الحل /

$$A(-3, -4), B(6, 8), C(0, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$= (6, 8) - (-3, -4) = (9, 12) = 3(3, 4)$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B}$$

$$= (0, 0) - (6, 8) = (-6, -8) = 2(3, 4)$$

وهما يشتركان بنقطة B

اذن النقط C,B,A على استقامة واحدة

حل ثاني /

$$AB = \sqrt{(-3-6)^2 + (-4-8)^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15 \quad \text{وحدة طول}$$

$$BC = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \quad \text{وحدة طول}$$

$$AC = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{وحدة طول}$$

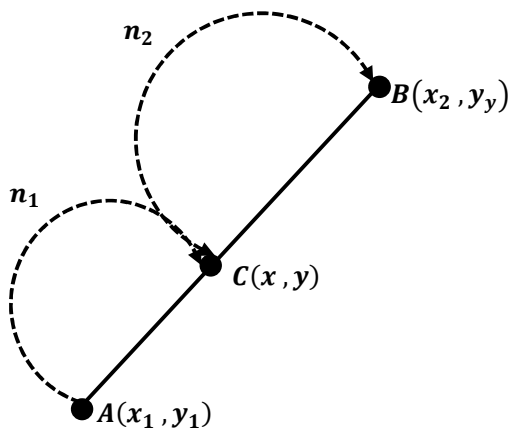
$$AC + BC = 5 + 10 = 15 = AB$$

اذن النقط C,B,A على استقامة واحدة

احداثيات نقطة تقسيم معلوم (من الداخل)

التعريف /

يقصد بتقسيم قطعة مستقيمة من الداخل إيجاد احداثيات نقطة تقع بين نقطتي نهايتها بحيث تقسيمها بنسبة معلومة .



ولنفرض ان $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ والمطلوب إيجاد C التي تقسم $\overline{AB}$

من الداخل بنسبة $n_1 : n_2$ لذلك نقول : نفرض $C = (x, y)$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$X = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} \quad \text{كذلك} \quad Y = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} \quad \text{فان}$$

$$\left(\frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}, \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} \right) = C \quad \text{نقطه التقسيم}$$

مثال 4 / جد إحداثيات النقطة التي تقسم قطعة المستقيم الواصلة بين نقطتين $A(4,-3)$, $B(-5,0)$ نسبة $\frac{1}{2}$ ؟

الحل /

$$X = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} = \frac{1(-5) + 2(4)}{1 + 2} = \frac{-5 + 8}{3} = 1$$

$$y = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} = \frac{1(0) + 2(-3)}{1 + 2} = \frac{-6}{3} = -2$$

∴ إحداثيات نقطة التقسيم هي $(1, -2)$

نقطة تنصيف القطعة المستقيمة

نفرض ان M نقطة تنصيف AB حيث $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ فإن :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

ولاثبات هذا القانون نجعل $n_1 = n_2 = n$ ثم نعوض في القانون السابق

$$X = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}$$

$$X = \frac{n x_2 + n x_1}{n + n} = \frac{n(x_2 + x_1)}{2n} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

وكذلك بالنسبة الى y حيث : $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

حلول تمارين (6-2)

س1/ جد إحداثيات النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة AB حيث $A(1,3)$, $B(4,6)$ بنسبة $\frac{2}{1}$

الحل/ نفرض ان نقطة التقسيم هي C

$$X_c = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} = \frac{2 * 4 + 1 * 1}{2 + 1} = \frac{8 + 1}{3} = 3$$

$$y_c = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} = \frac{2 * 6 + 1 * 3}{1 + 2} = \frac{15}{3} = 5$$

∴ نقطة $C(3,5)$

س2/ جد إحداثيات النقطة التي تنصف قطعة المستقيم AB حيث:

$A(2,-4)$, $B(-3,-6)$

الحل / نفرض ان C هي نقطة منتصف AB

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$C = \left(\frac{2 + (-3)}{2}, \frac{-4 + (-6)}{2} \right)$$

$$C = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-10}{2} \right) = \left(\frac{-1}{2}, -5 \right) \quad \text{نقطة المنتصف}$$

س3/ جد احداثيات النقطة C التي تقسم المستقيم AB بنسبة $\frac{3}{5}$ حيث $A(2,-1)$, $B(1,-3)$

الحل/

$$X_c = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 * 1 + 5 * 2}{3 + 5} = \frac{13}{8}$$

$$y_c = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 * -3 + 5 * 1}{3 + 5} = \frac{-9 + 5}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

$$C\left(\frac{13}{8}, -\frac{1}{2}\right) \therefore$$

س4/ جد احداثيات النقطة C التي تبعد عن A ثلاثة أمثال بعدها عن B ، حيث:

$$A(2,6) , B(4,-4)$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{1} \leftarrow AC = 3CB \quad \text{الحل}$$

$$X_c = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 * 4 + 1 * 2}{3 + 1} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$$y_c = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 * -4 + 1 * 6}{3 + 1} = \frac{-12 + 6}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

$$C\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right) \therefore$$

س5/ جد إحداثيات منتصفات أضلاع $\triangle ABC$ حيث $A(4, 0)$, $B(5, 2)$, $C(2, -3)$ ثم جد أطوال المستقيمات الواصلة بين رؤوس المثلث و منتصفات الأضلاع المقابلة؟

الحل/

نفرض h هي منتصف $\overline{AB}$

$$h = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$h = \left(\frac{4 + 5}{2}, \frac{0 + 2}{2} \right)$$

$$h = \left(\frac{9}{2}, 1 \right)$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{وحدة الطول}$$

نفرض D هي منتصف $\overline{BC}$

$$D = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$D = \left(\frac{5 + 2}{2}, \frac{2 - 3}{2} \right)$$

$$D = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\overline{Ch} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{Ch} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 2\right)^2 + (1 + 3)^2}$$

$$\overline{Ch} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16} = \frac{\sqrt{89}}{2} \quad \text{وحدة الطول}$$

نفرض U هي منتصف $\overline{AC}$

$$U = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

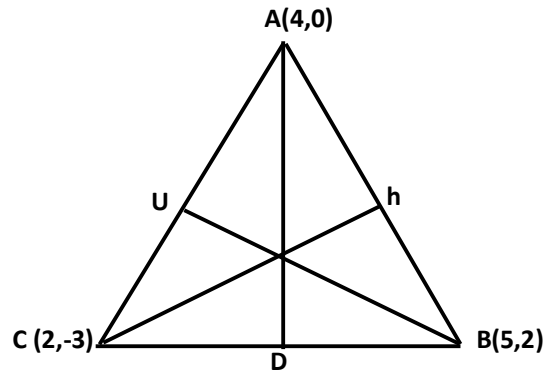
$$U = \left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{0 - 3}{2} \right)$$

$$U = \left(3, -\frac{3}{2} \right)$$

$$\overline{BU} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{BU} = \sqrt{(5 - 3)^2 + \left(2 + \frac{7}{2}\right)^2}$$

$$\overline{BU} = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \quad \text{وحدة الطول}$$



س6/ بين ان قطري الشكل الرباعي الذي رؤوسه:

$A(-1, -2)$, $B(1, 3)$, $C(-3, -3)$, $D(-5, -8)$ ينصف القطر الآخر؟

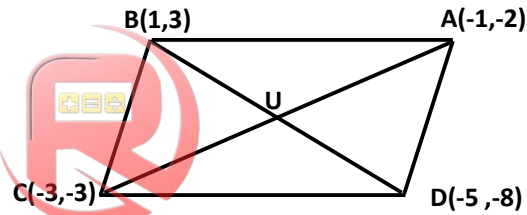
الحل /

نفرض ان U هي منتصف القطر $\overline{AC}$

$$U = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$U = \left(\frac{-1 - 3}{2}, \frac{-2 - 3}{2} \right)$$

$$U = \left(-2, -\frac{5}{2} \right)$$



ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

نفرض ان U هي منتصف القطر $\overline{BD}$

$$U = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$U = \left(\frac{1 - 5}{2}, \frac{3 - 8}{2} \right)$$

$$U = \left(-2, -\frac{5}{2} \right)$$

∴ القطران متناصفان لان نقطة المنتصف لكل قطر مساوية لمنتصف القطر الآخر.

ميل المستقيم Slop of Line

التعريف /

إذا كانت $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ فإن :
ميل المستقيم $AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بشرط $x_1 \neq x_2$.

ملاحظة

(1) إذا كان $y_2 - y_1 = 0$ يعني ان ميل $\overrightarrow{AB} = 0$ صفراً.

أي ان $\overrightarrow{AB} //$ محور السينات .

بمعنى ان ميل محور السينات = ميل كل مستقيم مواز له = صفر

(2) إذا كان $x_2 - x_1 = 0$ يعني ان ميل $\overrightarrow{AB}$ غير معرف.

أي ان $\overrightarrow{AB} //$ محور الصادات .

بمعنى ان ميل محور الصادات = ميل كل مستقيم موازياً له ويكون غير معرف

(3) إذا كانت Q قياساً للزاوية الموجبة التي يضيئها $\overrightarrow{AB}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ،

فإن ميل $\overrightarrow{AB}$ يساوي $\tan Q$ حيث $Q \in (0, 180^\circ) / \{90^\circ\}$

مثال 6 / جد ميل المستقيم المار بالنقطتين $A(2,3)$, $B(5,1)$

الحل /

$$m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3}{5 - 2} = -\frac{2}{3}$$

Parallel Condition شرط التوازي

التعريف/

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه وبالعكس أي $\vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2$ إذا وفقط إذا $m_1 = m_2$.

مثال 7 / بين ان النقاط $A(4,3)$, $B(2,1)$, $C(1,0)$ **تنتمي لمستقيم واحد ؟**

الحل /

$$m_{\vec{BC}} = \frac{0-1}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad ; \quad m_{\vec{AB}} = \frac{1-3}{2-4} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$m_{\vec{AB}} = m_{\vec{BC}} \therefore$$

تنتمي لمستقيم واحد. $\therefore C, B, A$

Perpendicular Condition شرط التعامد

التعريف/

إذا تعامد مستقيمان فإن حاصل ضرب ميلاهما $= -1$ وبالعكس .

أي $\vec{L}_1 \perp \vec{L}_2$ إذا وفقط إذا $m_1 * m_2 = -1$.

أو $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ أي ميل احدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الإشارة .

مثلاً : إذا كان ميل مستقيم يساوي $\frac{-3}{4}$ فأى مستقيم يوازيه يكون ميله $= \frac{-3}{4}$ وأى مستقيم عمود عليه

يكون ميله $= \frac{4}{3}$

حلول تمارين (6-3)

س1/

(1) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(0, -2)$, $(2, 0)$

الحل /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{0 - 2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

(2) بين ان النقاط $(-7, 6)$, $(-1, 4)$, $(2, 3)$ على استقامة واحدة ؟

الحل /

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{-1 - 4} = \frac{-1}{3}$$

$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{-7 - 2} = \frac{-1}{3}$$

 $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$ لأن ميلهما متساوي ويتركبان في نقطة A∴ النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة
ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات(3) إذا كانت $A(2, 3)$, $B(-3, h)$ جد قيمة h بحيث يكون $m_{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$

الحل /

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h - 3}{-3 - 2} \rightarrow 2h - 6 = -5$$

$$2h = -5 + 6 \rightarrow h = \frac{1}{2}$$

(4) ABC مثلث رؤوسه $A(1,6)$; $B(-2,-8)$; $C(7,-2)$ جد ميل المستقيم المتوسط للمثلث ABC المار من B ؟

الحل /

نفرض ان D هي منتصف القطر $\overline{AC}$

$$D = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{6-2}{2} \right) \rightarrow D(4,2)$$

$$m \overline{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8 - 2}{-2 - 4} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

ميل المستقيم المتوسط

س2/ لكل فقرة مما يأتي أربع اجابات واحدة منها صحيحة ، حدد الأجابة الصحيحة لكل فقرة :

(1) إذا كان $\vec{L} \perp \vec{H}$ وان $\vec{H}$ يمر بالنقطتين (2,3), (1,5) فإن ميل $\vec{L}$ يساوي :

$$-\frac{2}{3} \text{ (د)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (ج)}$$

$$-2 \text{ (ب)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (أ)}$$

الحل /

$$m \vec{H} = \frac{3-5}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\therefore m \vec{L} = \frac{1}{m \vec{H}} \quad (\text{متعامدان})$$

$$\therefore m \vec{L} = \frac{1}{-2}$$



(2) إذا كان $\vec{L} \parallel \vec{H}$ وان $\vec{L} \in (-1,5)$, $(-1,3)$ وان $\vec{H} \in (x,6)$, $(3,4)$ فإن قيمة x تساوي :

$$\text{(د) ليس أيا مما سبق صحيح}$$

$$1 \text{ (ج)}$$

$$3 \text{ (ب)}$$

$$-3 \text{ (أ)}$$

$$m \vec{H} = m \vec{L} \quad (\text{متوازيان})$$

الحل /

$$\frac{6-4}{x-3} = \frac{5-3}{-1+1}$$

$$\frac{2}{x-3} = \frac{2}{0} \rightarrow \left[\frac{2}{0} \notin R \right] \text{ حيث ان}$$

$$m \vec{L} = \frac{2}{0} \text{ غير معرف}$$



$$\vec{L} \parallel \vec{y} \quad \text{أي أن}$$

$$\vec{L} \parallel \vec{H} \quad \text{بما أن}$$

$$\therefore m \vec{L} \quad \text{غير معرف}$$

المستقيم الواصل بين (x, 6) ، (3, 4) يوازي محور الصادات فتكون قيمته x=3

(3) إذا كان $\vec{L} \parallel \vec{H}$ وان $\vec{H}$ يمر بالنقطتين (3, -2) ، (-3, 2) فإن ميل $\vec{L}$ يساوي :

$$-\frac{2}{3} \quad \text{(د)}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{(ج)}$$

$$-\frac{3}{2} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{(أ)}$$

الحل /

$$m \vec{H} = \frac{-2 - 2}{3 - (-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore m \vec{L} = m \vec{H} \quad (\text{متوازيان})$$

$$\therefore m \vec{L} = -\frac{2}{3}$$

الفقرة (د) هي
الأجابة الصحيحة

س3/

(1) باستخدام الميل بين ان النقط $A(5, 2)$; $B(-2, -1)$; $C(2, -2)$ هي رؤوس مثلث قائم الزاوية ؟

الحل /

$$m \overline{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{2 - 5} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$m \overline{BC} = \frac{-2 - (-1)}{2 - (-2)} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$m \overline{AC} * m \overline{BC} = \frac{4}{3} * -\frac{1}{4} = -1$$

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$ لأن حاصل ضرب ميلهما = -1

$\therefore$ المثلث A , B , C قائم الزاوية في C .

(2) لتكن $A(5, -1)$; $B(5, 1)$; $C(6, -2)$; $D(0, 2)$ بين ان الشكل ABCD متوازي أضلاع ؟

الحل /

$$m \overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{5 + 1} = -\frac{2}{3}$$

$$m \overline{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{6 - 0} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore m \overline{AB} = m \overline{DC} \rightarrow \therefore \overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$m \overline{AD} = \frac{2 - 5}{0 + 1} = -3$$

$$m \overline{BC} = \frac{-2 - 1}{6 - 5} = -3$$

$$\therefore m \overline{AD} = m \overline{BC} \rightarrow \therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

∴ الشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

(3) لتكن A(5,2) ; B(2,-1) ; C(-1, 2) ; D(2,5) بين ان الشكل ABCD هو مربع ؟

الحل /

$$AB = \sqrt{(5 - 2)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{18}$$

وحدة الطول

$$BC = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{18}$$

وحدة الطول

$$CD = \sqrt{(2 + 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{18}$$

وحدة الطول

$$DA = \sqrt{(5 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{18}$$

وحدة الطول

$$\therefore AB = BC = CD = DA$$

$$m \overline{AD} = \frac{5 - 2}{2 - 5} = -1$$

$$m \overline{DC} = \frac{5 - 2}{2 + 1} = 1$$

$$m \overline{AD} * m \overline{DC} = -1$$

$$\therefore \overline{AD} \perp \overline{DC}$$

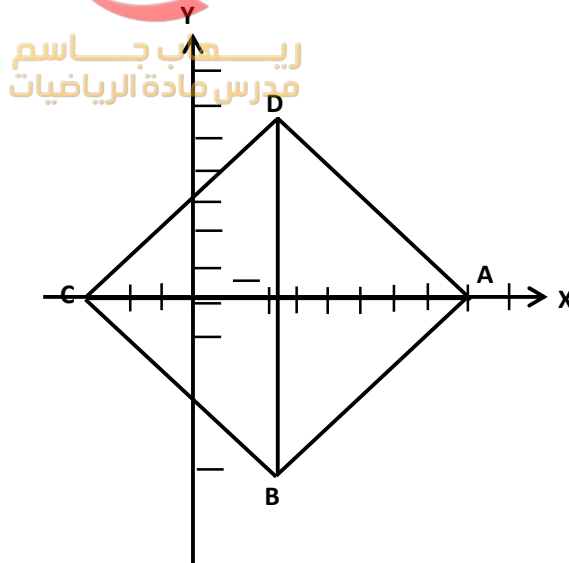
$$\therefore \angle D = 90^\circ \text{ (قائمة)}$$

$$m \overline{AC} = \frac{2 - 2}{-1 - 5} = 0$$

$$\therefore AC \parallel \text{محور السينات}$$

$$m \overline{DB} = \frac{-1 - 5}{2 - 2} = -\frac{6}{0} \text{ غير معرف}$$

∴ الشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع .



بما ان المحورين السيني و الصادي متعامدان

إذن قطري الشكل AC , DB متعامدان

إذن الشكل ABCD هو مربع

∴ DB ∥ محاور الصادات

(4) مثلث رؤوسه A(2,4) ; B(6,0) ; C (-2, -3) ، جد :

أ- ميل العمود المرسوم من A على BC

ب- ميل المستقيم المرسوم من B و موازيا لـ AC

الحل /

أ-

$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 0}{-2 - 6} = \frac{3}{8}$$

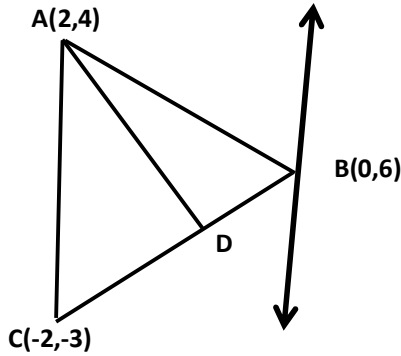
$$\therefore m_{\overline{AD}} = -\frac{8}{3}$$

لأن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

ب-

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-3 - 4}{-2 - 2} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

∴ ميل المستقيم الموازي لـ AC = $\frac{7}{4}$



(5) بين ان الشكل الرباعي الذي رؤوسه A(-2, 2) ; B(2,-2) ; C(4,2) ; D(2,4) يمثل شبه منحرف

متعامد القطرين؟

الحل /

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{2 + 2} = -1$$

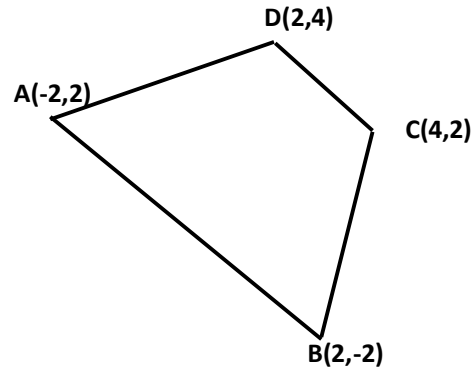
$$m_{\overline{DC}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{2 - 4} = -1$$

$$\therefore m \overline{AB} = m \overline{DC} \rightarrow \therefore \overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

$$m \overline{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{-2 - 2} = \frac{1}{2}$$

$$m \overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{2 - 4} = 2$$

$$\therefore m \overline{AD} \neq m \overline{BC} \rightarrow \therefore \overline{AD} \nparallel \overline{BC}$$



∴ الشكل الرباعي ABCD شبه منحرف .

ولأثبت أنه متعامد القطرين نجد ميل القطرين :

$$m \overline{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{4 + 2} = 0$$

∴ القطر $\overline{AC}$ يكون موازياً لمحور السينات لأن ميله = صفر

$$m \overline{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 + 2}{2 - 2} = \text{كمية غير معرفة}$$

∴ القطر $\overline{BD}$ يكون موازياً لمحور الصادات لأن ميله = غير معرف

∴ القطران متعامدان

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

(6) جد قيمة x التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين $(-2, -9)$; $(x, 4)$ عموداً على المستقيم المار

بالنقطتين $(0, 3)$; $(4, 1)$ ؟

الحل /

نفرض أن $A(x, 4)$; $B(-2, -9)$

$$m \overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-9 - 4}{-2 - x} = \frac{-13}{-2 - x}$$

نفرض أن $C(4, 1)$; $D(0, 3)$

$$m \overline{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{0 - 4} = -\frac{1}{2}$$

∴ المستقيمان $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ متعامدان (معطى)

$$m_{\overline{AB}} * m_{\overline{CD}} = -1 ∴$$

$$\frac{-13}{-2-x} * -\frac{1}{2} = -1$$

$$\frac{13}{-4-2x} = -1$$

$$-1(-4-2x) = 13$$

$$4 + 2x = 13 \rightarrow 2x = 9$$

$$∴ x = \frac{9}{2}$$

معادلة المستقيم Equation of the Line

إذا كانت (x,y) اية نقطة من نقاط أي مستقيم فإن العلاقة بين x,y تسمى معادلة ذلك المستقيم.

والمعادلة القياسية العامة للمستقيم هي : $ax + by + c = 0$

(1) المستقيم الذي يقطع المحورين يمكن تمثيله بيانياً بوضع $x = 0$

$$y = \frac{-c}{b} ∴$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

$$x = \frac{-c}{a} \leftarrow y = 0$$

(2) وعندما يكون $b=0$ يكون $ax+c = 0$ تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي ومنها $x=0$

تمثل معادلة المحور الصادي .

(3) وعندما يكون $a=0$ يكون $by+c = 0$ تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور السيني ومنها $y=0$

تمثل معادلة المحور السيني.

(4) وعندما يكون $c=0$ يكون $ax + by = 0$ تمثل معادلة مستقيم يمر من نقطة الأصل.

كيفية إيجاد معادلة المستقيم

(1) إذا علمت منه نقطتان:

معادلة المستقيم AB حيث $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:لتكن $C(x, y) \in \overline{AB}$ فإن :

$$\text{قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطتين} \longrightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(2) إذا علمت منه نقطة وميل :

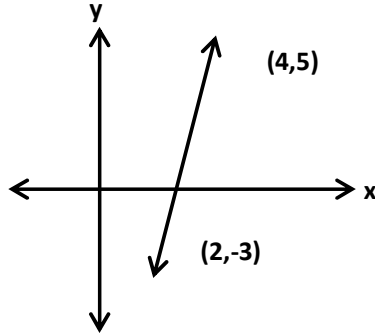
من القانون السابق : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\text{قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل} \longrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

(3) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات هي $x = a$ وكل مستقيم يمر بالنقطة (x_1, y_1) ويوازي محور الصادات تكون معادلته $x = x_1$ مثال / جد معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $(2, 3)$ ؟الحل / معادلة المستقيم $x = 2$ (4) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات هي $y = b$ وكل مستقيم يمر بالنقطة (x_1, y_1) ويوازي محور السينات تكون معادلته $y = y_1$ مثال / جد معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة $(3, -2)$ ؟الحل / معادلة المستقيم $y = -2$

مثال 9 / جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2, -3)$; $(4, 5)$ ؟

الحل /



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{5 + 3}{4 - 2}$$

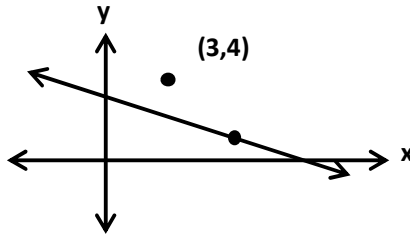
$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{4}{2}$$

$$2y + 6 = 4x - 8$$

$$\text{معادلة المستقيم} \longrightarrow 4x - 2y - 14 = 0$$

مثال 10 / جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, 3)$; $(7, 1)$ وهل النقطة $(3, 4)$ تنتمي إليه ام لا ؟

الحل /



$$\frac{y - 1}{x - 7} = \frac{3 - 1}{0 - 7}$$

$$\frac{y - 1}{x - 7} = \frac{-2}{7}$$

$$2x - 14 = -7y + 7$$

$$\text{معادلة المستقيم} \longrightarrow 2x + 7y - 21 = 0$$

لكي نتأكد ان $(3, 4)$ تنتمي للمستقيم أم لا ، نعوض عن $x = 3$; $y = 4$ في معادلة المستقيم :

$$2(3) + 7(4) - 21 = 0$$

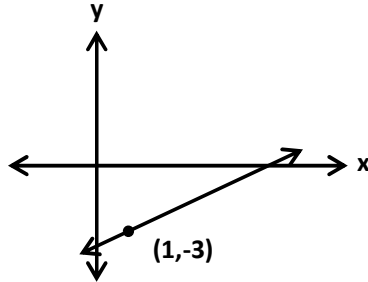
$$6 + 28 - 21 = 0$$

$$13 \neq 0$$

∴ النقطة $(3, 4)$ لا تنتمي للمستقيم

مثال 11 / جد معادلة المستقيم المار من النقطة (1,-3) وميله $\frac{1}{2}$

الحل /



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\left[y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \right] * 2$$

$$2y + 6 = x - 1$$

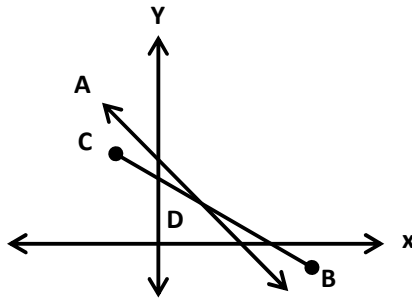
$$\text{معادلة المستقيم} \longrightarrow x - 2y - 7 = 0$$

مثال 11 / جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة A(-2, 5) ونقطة تنصيف القطعة المستقيمة

التي نهايتها النقطتان B(4,-1) ; C(-2,3)

الحل /

لتكن D منتصف $\overline{BC}$



$$D = \left(\frac{4 + (-2)}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (1, 1)$$

معادلة $\overline{AD}$ هي :

$$\frac{y - 5}{x + 2} = \frac{1 - 5}{1 + 2}$$

$$\frac{y - 5}{x + 2} = \frac{-4}{3}$$

$$3y - 15 = 4x - 8$$

$$4x + 3y - 7 = 0$$

معادلة المستقيم $\longrightarrow$



أمسح الباركود بالهاتف لطفًا



مثال 13 / جد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة $(-3, 5)$ ؟

الحل /

$$O(0,0) ; A(-3,5)$$

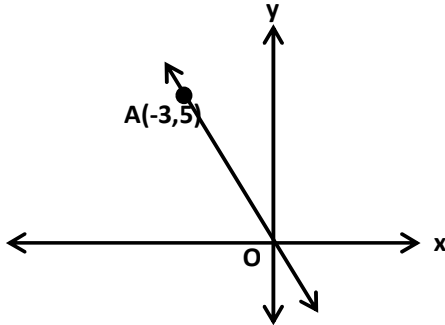
معادلة $\overrightarrow{OA}$ هي :

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{5 - 0}{-3 - 0}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{-3}$$

$$5x = -3y$$

$$\text{معادلة المستقيم} \longrightarrow 5x + 3y = 0$$



نتيجة

يمكن إيجاد ميل المستقيم من معادلته :

نفرض ان معادلة المستقيم : $ax + by = 0$

ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$ بعكس الإشارة.

بشرط x, y في طرف واحد من المعادلة وأن $b \neq 0$

$$\therefore \text{ ميل المستقيم} = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$$

$$\text{اي ميل المستقيم} = \frac{-a}{b}$$

مثال 14 / جد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته : $3x - 4y - 12 = 0$

الحل /

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

المقطع الصادي : نعوض عن $x = 0$ فيكون :

$$-4y - 12 = 0 \rightarrow y = -3$$

اذن المقطع الصادي هو $(0, -3)$.

طريقة ثانية / لأيجاد المقطع الصادي :

$$y = \frac{-c}{b} = \frac{-(-12)}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

اذن المقطع الصادي هو $(0, -3)$.

مثال 15 / جد معادلة المستقيم الذي يصنع من الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 150°

و يمر بالنقطة $(1, -4)$ ؟

الحل /

$$m = \tan 150^\circ$$

$$m = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$$

$$m = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\therefore y + 4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)$$

معادلة المستقيم $\rightarrow$

$$x + \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 1 = 0$$

مثال 16 / جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2, 1)$ وعمودي على المستقيم الذي معادلته :

$$2x - 3y - 7 = 0$$

الحل /

من المستقيم : $2x - 3y - 7 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \text{ميل المستقيم المعلوم :}$$

إذن ميل المستقيم المطلوب : $\frac{-3}{2}$ (لأن المستقيمان المعلوم والمطلوب متعامدان)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\left[y - 1 = \frac{-3}{2}(x + 2) \right] * 2$$

$$2y - 2 = -3x - 6$$

→ معادلة المستقيم المطلوب

$$3x + 2y + 4 = 0$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات



أمسح الباركود بالهاتف لطفاً

حلول تمارين (4-6)

س1/

(1) **جد معادلة المستقيم** الذي ميله $-\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(-4, 0)$

الحل/

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\left[y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 4) \right] * 2$$

$$2y - 0 = -x - 4$$

معادلة المستقيم $\longrightarrow x + 2y + 4 = 0$

(2) **جد معادلة المستقيم** الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة $(-1, 2)$

الحل/

∴ المستقيم ∥ محور السينات

∴ ميل المستقيم = صفر

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = 0(x - 2)$$

معادلة المستقيم $\longrightarrow y = -1$

(3) **جد معادلة المستقيم** الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة $(-1, 2)$

الحل/

∴ المستقيم ∥ محور الصادات

∴ ميله غير معرف

∴ معادلة المستقيم هي $x = 2$ 

(4) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 3)$; $(-1, 5)$ ؟

الحل /

∴ الاحداثي السيني ثابت و الاحداثي الصادي متغير

∴ المستقيم ∥ محور الصادات

∴ معادلة المستقيم هي $x = -1$

(5) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2, -1)$ و الموازي الى $\vec{L_1}$ الذي ميله $\frac{2}{3}$ (يعني ميل

$\vec{L_1}$) ؟

الحل /

$$\because \vec{L_1} \parallel L$$

$$m \vec{L_1} = m L$$

$$\therefore m L = \frac{2}{3}$$

لايجاد معادلة المستقيم L :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$\left[y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \right] * 3$$

$$3y + 3 = 2x - 4$$

معادلة المستقيم $\longrightarrow 2x - 3y - 7 = 0$

(6) **جد معادلة المستقيم** الذي يمر بالنقطة $(0, -2)$ وعمودي على المستقيم الذي ميله $-\frac{3}{5}$ **الحل /**

نفرض ان المستقيم الذي يمر بالنقطة $(0, -2)$ هو M ، نفرض ان المستقيم العمود عليه هو R

∴ المستقيمان متعامدان

$$m M * m R = -1 \therefore$$

$$m M * -\frac{3}{5} = -1$$

$$m M = -1 * -\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

من معرفة ميل المستقيم M يمكن إيجاد معادلته و كالاتي :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = \frac{5}{3}(x - 0)$$

$$\left[y + 2 = \frac{5}{3}(x - 0) \right] \quad \text{نضرب الطرفين في 3}$$

$$3y + 6 = 5x - 0$$

$$\text{معادلة المستقيم العمودي} \longrightarrow 5x - 3y - 6 = 0$$

(7) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (3, -4) وعموديا على المستقيم المار بالنقطتين (0, 3) ;

§ (2, -2)

الحل /

نفرض ان المستقيم المار بالنقطتين هو D، نفرض ان المستقيم المار بالنقطة هو Z

نجد ميل المستقيم Z :

$$m_Z = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 3}{2 - 0} = \frac{-5}{2}$$

∴ ميل المستقيم D هو $\frac{2}{5}$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = \frac{5}{3}(x - 3)$$

$$\left[y + 4 = \frac{2}{5}(x - 3) \right] * 5$$

$$5y + 20 = 2x - 6$$

$$\text{معادلة المستقيم D} \rightarrow 2x - 5y - 26 = 0$$

(8) لتكن A(4, -2), B(1,2) جد معادلة المستقيم العمود الذي ينصف AB ؟

الحل /

نفرض ان المستقيم العمود الذي ينصف $\overline{AB}$ في نقطة C :

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{-2 + 2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{5}{2}, 0 \right)$$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 + 2}{1 - 4} = \frac{-4}{3}$$

∴ ميل العمود هو $\frac{3}{4}$

∴ نجد المعادلة من الميل $\frac{3}{4}$ والنقطة $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{4} \left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\left[y - 0 = \frac{3}{4}x - \frac{15}{8}\right] * 8$$

$$8y - 0 = 6x - 15$$

معادلة العمود $\overline{AB}$ → $6x - 8y - 15 = 0$

س2/

(1) جد معادلة المستقيم الذي ميله $= -3$ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله 7 وحدات

؟

الحل / نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي $(0, 7)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = -3(x - 0)$$

$$y - 7 = -3x$$

معادلة المستقيم → $3x + y - 7 = 0$

(2) جد معادلة المستقيم الذي ميله $= 2$ ويقطع جزءاً سالباً من محور السينات طوله 6 وحدات ؟

الحل /

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 2(x + 16)$$

$$y - 0 = 2x + 12$$

معادلة المستقيم → $2x - y + 12 = 0$

(3) جد الميل و الجزء المقطوع من محور الصادات لكل مستقيم فيما يأتي :

a. $\vec{L}_1 : 2x - 3y + 5 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{-c}{b} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

b. $\vec{L}_2 : 8y = 4x + 16$

$$[\vec{L}_2 : 4x - 8y + 16 = 0] \div 4$$

$$\vec{L}_2 : x - 2y + 4 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{-c}{b} = \frac{-4}{-2} = 2$$

(4) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (5, -2) و يوازي المستقيم الذي معادلته : $2x - y + 3 = 0$

الحل /

ريهاب جاسم محمد
مدرس مادة الرياضيات

نفرض ان المستقيم الذي يمر بالنقطتين (5, -2) هو $\vec{N}$.

نفرض ان المستقيم الذي معادلته $2x - y + 3 = 0$ هو $\vec{W}$

$$m \vec{W} = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\vec{N} \parallel \vec{W}$$

$$m \vec{N} = 2 \quad ((\text{المستقيمان المتوازيان ميلهما متساوي}))$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 5 = 2(x - 2)$$

$$y + 5 = 2x - 4$$

$$2x - y - 9 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم } \vec{N}$$

(5) **جد معادلة المستقيم $\vec{L}$** الذي يقطع جزءاً سالباً من محور الصادات طوله 4 وحدات و عمودي على المستقيم $2y = 4x - 1$

الحل /

نفرض ان المستقيم الذي معادلته $4x - 2y - 1 = 0$ هو $\vec{N}$

$$m \vec{N} = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\therefore \vec{L} \perp \vec{N}$$

$$\therefore m \vec{L} = \frac{-1}{2}$$

والنقطة التي يمر بها (0, -4) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = \frac{-1}{2} (x - 0)$$

$$\left[y + 4 = \frac{-1}{2} x \right] * 2$$

$$2y + 8 = -x$$

$$x + 2y + 8 = 0 \quad \leftarrow \text{ريهاب ج معادلة المستقيم } \vec{L}$$

(6) ليكن $\vec{L}$ مستقيماً معادلته : $x + y - 2 = 0$ **جد ميله ونقطة تقاطعه مع محور الصادات ثم أرسم**

$\vec{L}$ ؟

الحل /

$$m \vec{L} = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y = \frac{-c}{b} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

∴ نقطة التقاطع مع المحور الصادي هي (0,2) .

(7) جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة $(2, -2)$ وعمودي على المستقيم الذي معادلته :

$x + y = 0$ ، ثم جد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الاحداثيين ؟

الحل /

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{1} = -1$$

ميل المستقيم المعلوم معادلته -1

$$\therefore m \vec{L} = 1 \quad ((\text{لأن المستقيمان متعامدان}))$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = 1(x - 2)$$

$$y + 2 = x - 2$$

$$x - y - 4 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم } \vec{L}$$

المستقيم $\vec{L}$ يقطع المحور السيني عندما $y = 0$:

$$x - 0 - 4 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

∴ نقطة تقاطع المستقيم $\vec{L}$ مع المحور السيني هي $(4, 0)$.

المستقيم $\vec{L}$ يقطع المحور الصادي عندما $x = 0$:

$$0 - y - 4 = 0$$

$$-y - 4 = 0$$

$$y = -4$$

∴ نقطة تقاطع المستقيم $\vec{L}$ مع المحور الصادي هي $(0, -4)$.

(8) المستقيم $\vec{L} : 2x - y = 3$ والمستقيم $\vec{H} : 3x + 6y = -3$

أ- بين أن $\vec{L} \perp \vec{H}$

الحل /

$$m \vec{L} = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$m \vec{H} = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$m \vec{L} * m \vec{H} = 2 * -\frac{1}{2} = -1$$

إذن المستقيمان $\vec{L}$, $\vec{H}$ متعامدان لأن حاصل ضرب ميلهما -1

ب- نقطة تقاطع المستقيمين

الحل /

$$6 * [2x - y = 3]$$

$$3x + 6y = -3$$

$$12x - 6y = 18 \rightarrow (1)$$

$$3x + 6y = -3 \rightarrow (2)$$

بالجمع

$$15x = 15$$

$$x = 1$$

نعوض في معادلة (2) :

$$3 * 1 + 6y = -3$$

$$6y = -3 - 3$$

$$6y = -6$$

$$y = -1$$

∴ نقطة تقاطع المستقيمان هي (1, -1).

(9) جد معادلة المستقيم الذي يصنع 135° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات و المار بنقطة

الأصل؟

الحل /

$$m = \tan 135^\circ$$

$$m = \tan(135^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ$$

$$m = -1$$

$$\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\therefore y - 0 = -1(x - 0)$$

$$\text{معادلة المستقيم} \rightarrow x + y = 0$$

(10) المستقيم $L : 2y = ax + 1$ يمر بالنقطة (1, 2) جد :



أمسح الباركود بالهاتف لطفاً

$a \in R$ (i)

الحل /

∴ النقطة (1,2) تمر بالمستقيم L

∴ تحقق معادلته :

$$2(2) = a(1) + 1$$

$$4 = a + 1$$

$$a = 3 \in R$$

(ب) ميل المستقيم L

الحل /

بعد إيجاد قيمة (a) أصبحت معادلة L هي :

$$3x - 2y + 1 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

(ج) مقطع الصادي

الحل /

المقطع الصادي : نعوض عن $x = 0$

$$3(0) - 2y + 1 = 0$$

$$-2y = -1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

إذا كان المستقيم $L: ax + by + c = 0$ والنقطة $N(x_1, y_1)$ معلومة فيعرف بعد النقطة N عن المستقيم L بأنه المسافة العمودية (D) بين النقطة N والمستقيم L وتعطى بالعلاقة الآتية :

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \text{قانون البعد}$$

مثال 17 / جد بعد النقطة $A(1,3)$ عن المستقيم $2y + x = 2$

الحل / نضع المعادلة بالشكل الآتي :

$$x + 2y - 2 = 0 ; a = 1 , b = 2 , c = -2$$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1) + (2)(3) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} ; D = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

نتيجة

يمكن إيجاد البعد بين المستقيمين المتوازيين

$$\vec{L}_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 , \vec{L}_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ حيث :}$$

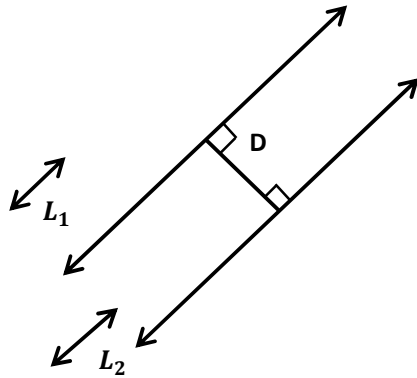
$$\frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \vec{L}_1 , \vec{L}_2 \text{ البعد بين}$$

مثال 18 / جد البعد بين المستقيمين المتوازيين

$$\vec{L}_1: x + 3y = 1 , \vec{L}_2: x - 3y = 4$$

الحل / نأخذ نقطة على أحد المستقيمين المتوازيين وليكن المستقيم $\vec{L}_1$ ، ثم نجد بعد هذه النقطة عن المستقيم $\vec{L}_2$

(البعد بين مستقيمين متوازيين هو بعد أي نقطة تنتمي لأحدهما عن الآخر)



نفرض ان : $y = 0$

$$x + 3(0) = 1 \rightarrow x - 0 = 1 \rightarrow x = 1$$

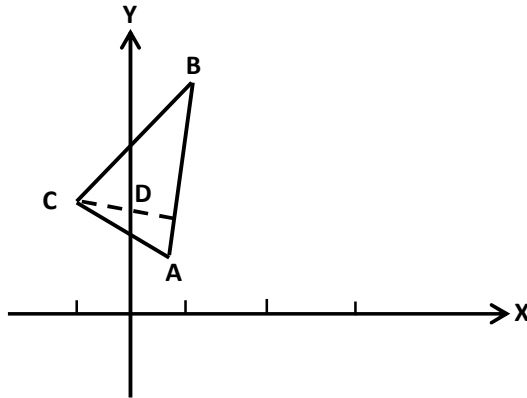
∴ النقطة $(1, 0)$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1) - (3)(0) - 4|}{\sqrt{1 + 9}}$$

$$D = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{وحدة طول}$$

مثال 19 / جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(1, 2)$; $B(3, 5)$; $C(-1, 3)$

الحل / نجد معادلة أحد الأضلاع ، وليكن المستقيم AB :



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{5 - 2}{3 - 1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

$$3x - 2y + 1 = 0$$

الآن بعد النقطة $C(-1, 3)$

عن المستقيم AB يمثل ارتفاع $\triangle ABC$

$$D = \frac{|(3)(-1) + (2)(3) + 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \text{ unit}$$

نجد الطول :

$$AB = \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$Area \Delta = \frac{1}{2} (AB) \cdot D = \frac{1}{2} (\sqrt{13}) \cdot \frac{8}{\sqrt{13}} = 4 \text{ unit}^2$$



حلول تمارين (5-6)

س1/ ضع علامة (✓) إذا كانت العبارة صائبة وعلامة (×) إذا كانت العبارة خاطئة فيما يلي :

- (1) بعد نقطة الأصل عن المستقيم $y = 3$ هو 3 وحدات . ✓
- (2) بعد نقطة الأصل عن المستقيم $y = -5$ هو 5 وحدات . ✓
- (3) بعد نقطة الأصل عن المستقيم $x = -5$ هو 5 وحدات . ✓
- (4) البعد بين المستقيمين المتوازيين $y = 4$, $y = -1$ هو 3 وحدات . ×

$$\text{وحدات} = \frac{|4 - (-1)|}{\sqrt{0+1}} = \frac{5}{1} = 5$$

س2/

(1) جد بعد النقطة $(-2, 1)$ عن المستقيم $6x + 8y - 21 = 0$

الحل / $a = 6$; $b = 8$; $c = -21$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(6)(-2) + (8)(1) - 21|}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$D = \frac{|-12 + 8 - 21|}{\sqrt{100}} = \frac{|-25|}{10} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \text{وحدة طول}$$

(2) جد بعد نقطة الأصل عن المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات

طوله (4 وحدات) ؟

$$m = \frac{1}{3}$$

الحل /

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

والنقطة التي يمر بها $(0, 4)$:

$$y - 4 = \frac{1}{3} (x - 0)$$

$$\left[y - 4 = \frac{1}{3} x \right] * 3$$

$$3y - 12 = x$$

$$x - 3y + 12 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم}$$

من معادلة المستقيم ونقطته الأصل نجد البعد (D):

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(0) + (-3)(0) + 12|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{10}} \quad \text{وحدة طول}$$

(3) جد البعد بين المستقيمين المتوازيين :

$$\vec{L}_1: 8x - 6y + 4 = 0 \quad , \quad \vec{L}_2: 4x - 3y - 1 = 0$$

الحل /

$$\text{نقسم } \vec{L}_1 \text{ على } 2: 4x - 3y + 2 = 0$$

$$D = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-1)|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5} \quad \text{وحدة طول البعد}$$

(4) جد بعد النقطة (0, 2) عن المستقيم المار بالنقطتين A(1,-1), B(3,5)

الحل /

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 1}{x - 1} = \frac{5 + 1}{3 - 1}$$

$$\frac{y + 1}{x - 1} = \frac{6}{2}$$

$$3x - y - 4 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم المار بالنقطتين}$$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(3)(0) + (-1)(2) - 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \quad \text{وحدة طول}$$

(5) جد مساحة المثلث ABC حيث A(-4,6) ; B(-3,-1) ; C(5,-2)

الحل / نجد معادلة $\overline{AC}$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 6}{x + 4} = \frac{-2 - 6}{5 + 4}$$

$$\frac{y - 6}{x + 4} = \frac{-8}{9}$$

$$-8x - 32 = 9y - 54$$

$$-8x - 9y + 22 = 0$$

$$8x + 9y - 22 = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة المستقيم } \overline{AC}$$

بعد النقطة B عن المستقيم $\overline{AC}$ هو ارتفاع المثلث :

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(8)(-3) + (9)(-1) - 22|}{\sqrt{64 + 81}} = \frac{55}{\sqrt{145}} \quad \text{وحدة طول}$$

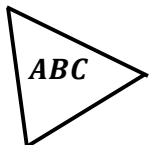
يمثل ارتفاع المثلث BD

$$\overline{AC} \text{ طول} = \sqrt{(6 + 2)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145} \quad \text{وحدة طول}$$

$$BD * AC * \frac{1}{2} = \text{مساحة المثلث } ABC$$

$$\frac{55}{\sqrt{145}} * \sqrt{145} * \frac{1}{2} = \text{مساحة المثلث } ABC$$

$$\text{مساحة المثلث } ABC = \frac{55}{2} = 27 \frac{1}{2} \quad \text{وحدة مربعة}$$



أسئلة حول الفصل السادس

س1/ مستقيم ميله $\frac{3}{4}$ ويمر بالنقطة $A(1,2)$ ، جد إحداثي نقطة B تنتمي للمستقيم نفسه وتبعد عن A بمقدار (5) وحدات .

س2/ لتكن $A(-2, -2)$; $B(4,4)$; $C(2,6)$ رؤوس مثلث . أحسب مساحة المثلث الذي رؤوسه منتصفات أضلاع المثلث ABC

س3/ إذا كان بعد المستقيم $3x - 4y - c = 0$ عن نقطة الأصل يساوي بعد المستقيم $5x + 12y - 2c - 6 = 0$ عن نقطة الأصل . فما قيمة c ؟



أمسح الباركود بالهاتف لطفاً



الفصل السابع

الإحصاء

الوسط الحسابي Arithmetic Mean

مقاييس النزعة المركزية :

هي مقاييس عددية تستخدم لقياس موضع تجمع البيانات . ومن خصائص البيانات ان لها نزعة أو ميل تتركز حول قيمة معينة متوسطة.

ومن أهم مقاييس النزعة المركزية :

1- الوسط الحسابي.

2- الوسيط.

3- المنوال.

التعريف/

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم : بأنه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساويا لمجموع القيم الأصلية . وبالتالي فإن الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها.

طريقة حسابه

- الطريقة الأولى :

(1) إذا كانت المعلومات الأحصائية (البيانات) غير مبوبة :

$$\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} = \text{الوسط الحسابي}$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

وبالرموز :

مثال 1 / إذا كانت اعمار خمسة أشخاص هي : 5, 8, 9, 11, 12 سنة ، أحسب الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الأشخاص ؟

الحل /

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{12 + 11 + 9 + 8 + 5}{5} = \frac{45}{5} = 9 \text{ سنوات}$$

(2) إذا كانت البيانات مبوبة : إذا كانت القيم الأحصائية متجمعة في توزيع تكراري فيمكن استخدام القانون الآتي :

$$\frac{\text{مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}} = \text{الوسط الحسابي}$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

وبالرموز :

مثال 2 / لنفرض وجود (3) أشخاص عمر كل منهم (8) سنوات ، و (5) أشخاص عمر كل منهم (9) سنوات ، و (4) أشخاص عمر كل منهم (11) سنة ، و شخصين عمر كل منهم (12) سنة ، كما في الجدول الآتي :

العمر	8	9	11	12
عدد الأشخاص	3	5	4	2

(هذا جدول من دون فئات) فيكون العدد (العمر) هو الذي يمثل مركز الفئة ، أحسب الوسط الحسابي للعمر ؟

الحل / إذا رمزنا للعمر بالرمز x ولعدد الأشخاص أو التكرار بالرمز f فإن خطوات الحل يمكن تبسيطها كما في الجدول الآتي :

العمر (x)	التكرار (f)	العمر * التكرار (x f)
8	3	8 x 3 = 24
9	5	9 x 5 = 45
11	4	11 x 4 = 44
12	2	12 x 2 = 24
المجموع	14	137

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{137}{14} = 9.786 \text{ سنة}$$

الوسط الحسابي للعمر

ولنتقدم خطوة أخرى و نأخذ حالة الجداول التكرارية ذات الفئات :

مثال 3 / الجدول الآتي يبين توزيع مئة شخص حسب فئات الوزن بالكيلو غرام . والمطلوب حساب الوسط الحسابي للوزن :

فئات الوزن	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 - 90	المجموع
عدد الأشخاص	9	15	22	25	18	11	100

الحل / نجد مركز الفئة (x) :

$$35 = \frac{30 + 40}{2} = \text{مركز الفئة الأولى}$$

$$\text{مركز الفئة الثانية} = 10 + 35 = 45 \dots \dots \dots \text{ وهكذا}$$

وبالتالي فإن خطوات الحل هي :

(1) حساب مراكز الفئات ونرمز لها (x).

(2) نضرب مركز الفئة (x) في تكرارها (f) .

$$\bar{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

(3) نجد الوسط الحسابي من العلاقة :

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

$$\bar{X} = \frac{6110}{100}$$

$$\bar{X} = 61.1$$

العمر * التكرار (x f)	مراكز الفئات (x)	التكرار (f)	فئات الوزن
315	35	9	30 -
675	45	15	40 -
1210	55	22	50 -
1625	65	25	60 -
1350	75	18	70 -
935	85	11	80 - 90
6110		100	المجموع

مثال 4 / جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري الآتي :

المجموع	18 - 20	16 -	14 -	12 -	10 -	8 -	الفئات
60	4	6	10	20	15	5	التكرار

الحل /

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

$$\bar{X} = \frac{798}{60}$$

$$\bar{X} = 13.3$$

العمر * التكرار (x f)	مراكز الفئات (x)	التكرار (f)	فئات الوزن
45	9	5	8 -
165	11	15	10 -
260	13	20	12 -
150	15	10	14 -
102	17	6	16 -
76	19	4	18 - 20
798		60	المجموع

- الطريقة الثانية : طريقة الوسط الفرضي أو الانحرافات

تعتمد هذه الطريقة على اختيار إحدى القيم (مراكز الفئات) بوصفها وسطا فرضيا ثم إيجاد انحراف كل فئة عن ذلك الوسط الفرضي ومن ثم نطبق القانون:

الوسط الحسابي = الوسط الفرضي + $\frac{\text{انحراف مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$$\bar{X} = \bar{x}_0 + \frac{\sum f \cdot E}{\sum f} \quad \text{وبالرموز :}$$

حيث أن :

 $\bar{x}_0$: الوسط الفرضي . f : تكرار الفئة. $\sum f$: مجموع التكرارات. $E = x - \bar{x}_0$: الانحراف ويساوي :

مثال 5 / الجدول التكراري التالي يبين أعمار (100) طالب جامعي . أوجد الوسط الحسابي للأعمار بطريقة الوسط الفرضي ؟

الحل /

(1) نستخرج مراكز الفئات.

(2) نختار الوسط الفرضي ($\bar{x}_0$) من بين مراكز الفئات و ليكن (21) الذي يقابل أكبر تكرار.

(3) نستخرج انحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي

(الانحراف = مركز الفئة - الوسط الفرضي) $E = x - \bar{x}_0$ (4) نستخرج حاصل ضرب تكرار كل فئة (f) * انحراف مركزها عن الوسط الفرضي.(5) نستخرج المجموع الكلي للتكرارات والمجموع الكلي $\sum f \cdot E$ ، نكتب المعلومات السابقة في

جدول كالآتي :

فئات الأعمار	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	$E = x - \bar{x}_0$	$f \cdot E$
18 -	20	19	$19 - 21 = -2$	$20 * -2 = -40$
20 -	44	21	$21 - 21 = 0$	$44 * 0 = 0$
22 -	18	23	$23 - 21 = 2$	$18 * 2 = 36$
24 -	13	25	$25 - 21 = 4$	$13 * 4 = 52$
26 -	3	27	$27 - 21 = 6$	$3 * 6 = 18$
28 - 30	2	29	$29 - 21 = 8$	$2 * 8 = 16$
المجموع	100			82

$$\bar{X} = \bar{x}_0 + \frac{\sum f \cdot E}{\sum f}$$

$$\bar{X} = 21 + \frac{82}{100}$$

الوسط الحسابي للأعمار $\bar{X} = 21.82$

مزايا الوسط الحسابي و عيوبه

- المزايا :

- (1) يتميز بعملياته الحسابية البسيطة.
- (2) تدخل جميع القيم في حسابه .

- العيوب :

- (1) يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة الكبيرة جدا او الصغيرة جدا .
- (2) لا يمكن حسابه حسابا بيانيا .

الوسيط Median

التعريف/

يعرف الوسيط لمجموعة من القيم : بأنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا و بالتالي فإن عدد القيم الأصغر منه يكون مساويا للقيم الأكبر منه.

طريقة حساب الوسيط

- (1) البيانات غير مبوبة : نرتب القيم ترتيبا تصاعديا أو تنازليا ثم نأخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط هذا بفرض ان عدد القيم فردي.
- أما اذا كان عدد القيم زوجي فنأخذ القيمتين اللتين في المنتصف ويكون الوسيط هو مجموع القيمتين مقسوما على اثنين.

مثال 6 / أوجد الوسيط لأوزان بعض الطلاب و التي هي : (52) كغم ، (58) كغم ، (50) كغم ، (63) كغم ، (55) كغم ؟

الحل / نرتب القيم تصاعديا 50 , 52 , 55 , 58 , 63

نلاحظ ان القيمة التي في المنتصف هي الثالثة في الترتيب .

∴ الوسيط = 55

مثال 7 / أوجد الوسيط لأوزان بعض الطلاب و التي هي : (52) كغم ، (58) كغم ، (50) كغم ، (63) كغم ، (57) كغم ، (55) كغم ؟

الحل / نرتب القيم تصاعديا 50 , 52 , 55 , 57 , 58 , 63

نلاحظ وجود قيمتين في المنتصف ويكون :

$$\text{ترتيب الأول} = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad (\text{الثالث})$$

$$\text{ترتيب الثاني} = 1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{6}{2} = 4 \quad (\text{الرابع})$$

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{\text{الثالث} + \text{الرابع}}{2} = \frac{57 + 55}{2} = 56$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

(2) البيانات المبوبة : يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات ، وتكون خطوات الحل كما يأتي :

أ - نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري.

$$\text{ب - حساب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرار}}{2}$$

ج - تحديد الفئة التي تحتوي على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتسمى الفئة الوسيطة وهي الفئة التي تقابل اول تكرار اكبر او يساوي ترتيب الوسيط.

ترتيب الوسيط - التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \frac{\text{تكرار الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة}}{\text{تكرار الفئة الوسيطة}} * \text{طول الفئة}$$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{f m} * w$$

وبالرموز :

حيث ان :

 ME : الوسيط. fb : التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة. $f m$: تكرار الفئة الوسيطة. w : طول الفئة. L : الحد الادنى للفئة الوسيطة .

مثال 8 / جد وسيط الوزن من الجدول التالي :

فئات الوزن	التكرار عدد الأشخاص	التكرار المتجمع الصاعد
30 -	9	9
40 -	15	24
50 -	22	46
60 -	25	71
70 -	18	89
80 - 90	11	100
المجموع	100	

ترتيب الوسيط $= \frac{100}{2} = 50$ $\left(\frac{\sum f}{2} \right)$ $w = 70 - 60 = 10$ الفئة الوسيطة

تكرار الفئة الوسيطة $fm = 25$ الحد الادنى للفئة الوسيطة $L = 60$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة $fb = 46$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{f m} * w$$

$$ME = 60 + \frac{50 - 46}{25} * 10$$

$$ME = 60 + \frac{8}{5} \rightarrow ME = 60 + 1.6 = 61.6$$

مزايا الوسيط و عيوبه

- المزايا :

- (1) لا يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة .
- (2) يمكن حسابه حسابا بيانيا .

- العيوب :

- (1) لا تأخذ جميع القيم في حسابه .
- (2) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية .

المنوال Mode

التعريف/

يعرف المنوال لمجموعة من القيم : بأنه القيمة الأكثر تكرارا او التي تقابل اكبر التكرارات. ويرمز له (MO)

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

طريقة حساب المنوال

(1) البيانات غير مبوبة :

مثال 9 / ما هي القيمة المنوالية لمجموعة الاعداد الاتية :

1. 4 , 2 , 4 , 7 , 8 , 3 , 4 , 9 , 7 , 4

الحل /

المنوال = 4 لأنها تكررت اكثر من غيرها .

2. 18 , 10 , 5 , 6 , 8 , 1 , 5 , 6

الحل /

المنوال = 5 , 6 لأنهما تكررا اكثر من غيرهما.

3. 12 , 11 , 10 , 7 , 3 , 4 , 5 , 8

الحل /

المنوال = لا يوجد

(2) البيانات المبوبة :

أ- طريقة الفروق (طريقة بيرسون)

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1+d_2}$ * طول الفئة المنوالية

حيث ان :

 d_1 : تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي قبلها . d_2 : تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي بعدها .

وان التكرار المنوالي هو اكبر تكرار في الجدول التكراري . والفئة المنوالية التي تقابل

اكبر تكرار

مثال 10 / أحسب المنوال من الجدول الاتي :

الفئات	التكرار
30 -	9
40 -	15
50 -	22
60 -	25
70 -	18
80 - 90	11

$$d_1 = 25 - 22 = 3$$

$$d_2 = 25 - 18 = 7$$

$$\text{طول الفئة المنوالية} = 70 - 60 = 10$$

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1+d_2}$ * طول الفئة المنوالية

$$\text{المنوال} = 10 * \frac{3}{3+7} + 60$$

$$\text{المنوال} = 3 + 60 = 63$$

(ب) طريقة العزوم (الرافعة)

وتكون خطوات الحل كما يأتي :

أ- في هذه الطريقة نرسم عتلة و نجعل تكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند احدى نهايتي العتلة .

والتكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند النهاية الاخرى للعتلة و طول العتلة = طول الفئة .

ب - نفرض قوة الأرتكاز التي تمثل بعد المنوال عند احد الطرفين $x =$.

ج - نطبق قانون العتلة (القوة * ذراعها = المقاومة * ذراعها) .

د - نستخرج قيمة x ونضيفها الى الحد الادنى للفئة المنوالية فنحصل على المنوال.

مثال 11 / جد المنوال من الجدول الاتي :

الفئات	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 - 100
التكرار	6	38	59	37	8	2

الحل /

الفئة المنوالية $(70 - 60)$

طول العتلة = طول الفئة = 10

القوة * ذراعها = المقاومة * ذراعها

$$(10 - x)(37) = x(38)$$

$$370 - 37x = 38x$$

$$75x = 370$$

$$x = \frac{370}{75} = 4.9 \therefore$$

$$\therefore \text{المنوال} = 4.9 + 60 = 64.9$$

طول العتلة = طول الفئة = 10



تكرار الفئة بعد
المنوالية = 37

تكرار الفئة قبل
المنوالية = 38

مزايا المنوال و عيوبه

- المزايا :

(1) بسيط في طريقة حسابه .

(2) لا يتأثر بالقيم الشاذة والمتطرفة .



- العيوب :

- (1) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية .
- (2) لا يمكن ايجاده في حالة عدم وجود قيم متكررة اكثر من غيرها .
- (3) قد يوجد اكثر من منوال في حالة تكرار القيم بنفس الدرجة.

حلول تمارين (7-1)

س1/ عرف الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال ؟

الحل /

الوسط الحسابي : القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساويا لمجموع القيم الأصلية .
(الوسط الحسابي هو مجموع القيم مقسوما على عددها) ويرمز له $\bar{X}$.

الوسيط : القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا ويرمز له (ME).

المنوال : القيمة الأكثر تكرارا او التي تقابل اكبر التكرارات. ويرمز له (MO)

س2/ البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب :

19 , 17 , 18 , 15 , 18 , 17 , 16 , 17 , 15

1. الوسط الحسابي

الحل /

$$\bar{X} = \frac{19 + 17 + 18 + 15 + 18 + 17 + 16 + 17 + 15}{9}$$

$$= \frac{152}{9} = 16.88$$

2. الوسيط

الحل / نرتب الاعداد تصاعديا بدون تكرار :

15 , 16 , 17 , 18 , 19

(17) هو الوسيط للاعداد

3. المنوال

الحل / هو اكثر الاعداد تكرارا فيساوي 17 .

س3/ اذا كان الوسط الحسابي للدخل الشهري لخمسة أشخاص (40000) دينار فما مجموع دخولها ؟

الحل /

$$\bar{X} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} \rightarrow 40000 = \frac{\text{مجموع القيم}}{5}$$

دينار $200000 = 40000 * 5 = \text{مجموع القيم (مجموع الدخول)}$

س4/ الجدول التالي يبين توزيع درجات الحرارة في احدى المدن خلال (90) يوما في فصل الصيف في احد الاعوام :

المجموع	44 - 48	40 -	36 -	32 -	28 -	24 -	20 -	فئات درجات الحرارة
90	7	9	15	23	18	10	8	عدد الايام

1. حساب الوسط الحسابي لدرجات الحرارة ؟

2. حساب قيمة الوسيط ؟

3. حساب قيمة المنوال ؟

الحل /

التكرار المتجمع الصاعد	$x \cdot f$	مراكز الفئات (x) مدرس مادة الرياضيات	عدد الأيام (f)	فئات درجات الحرارة
8	176	22	8	20 -
18	260	26	10	24 -
(36)	540	30	18	28 -
59	782	34	(23)	32 -
74	570	38	15	36 -
83	378	42	9	40 -
90	322	46	7	44 - 48
	3028		90	المجموع

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{3028}{90} = 33.64$$

1. الوسط الحسابي

$$w = 36 - 32 = 4$$

2. طول الفئة

تكرار الفئة الوسيطة $fm = 23$

الحد الأدنى للفئة الوسيطة $L = 32$

التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة $fb = 36$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{f m} * w \quad \left(\frac{\sum f}{2} \right) = \frac{90}{2} = 45 \quad \text{ترتيب الوسيط}$$

$$ME = 32 + \frac{45 - 36}{23} * 4$$

$$ME = 33.6 \quad \text{الوسيط}$$

$$d_1 = 23 - 18 = 5 \quad d_2 = 23 - 15 = 8 \quad 3.$$

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1 + d_2} * \text{طول الفئة المنوالية}$

$$\text{المنوال} = 32 + \frac{5}{5 + 8} * 4$$

$$\text{المنوال} = 33.6$$

س5/ الجدول التالي يبين رواتب (60) معلم في مدرسة والمطلوب إيجاد الوسيط لهذه الرواتب :

الرواتب بالالف دينار	150 -	160 -	170 -	180 -	190 -	200 - 210	المجموع
عدد المعلمين	5	10	15	20	7	3	60

الحل /

فئات الوزن	التكرار عدد الأشخاص	التكرار المتجمع الصاعد
150 -	5	5
160 -	10	15
170 -	15	(30)

fb

الفئة الوسيطة L

fm

180 -	20	50
190 -	7	57
200 - 210	3	60
المجموع	60	

ترتيب الوسيط $\left(\frac{\sum f}{2}\right) = \frac{60}{2} = 30$ الفئة الوسيطة $w = 180 - 170 = 10$

الحد الأدنى للفئة الوسيطة $L = 180$ تكرار الفئة الوسيطة $fm = 20$

التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطة $fb = 30$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{f m} * w$$

$$ME = 180 + \frac{30 - 30}{20} * 10 \rightarrow ME = 180$$

س

6/ الجدول التالي يبين الارياح اليومية لمجموعة من المحلات في احدى المدن ، جد الوسط الحسابي (معدل الريح اليومي) لهذه الارياح :

الرياح اليومي بالالف دينار	4 -	8 -	12 -	16 -	20 -	24 - 28
عدد المحلات	8	10	15	20	12	6

ريهاب جاسم محمد
مدرس مادة الرياضيات

الحل /

فئات الريح	عدد المحلات (f)	مركز الفئة (x)	(x . f)
4 -	8	6	48
8 -	10	10	100
12 -	15	14	210
16 -	20	18	360
20 -	12	22	264
24 - 28	6	28	165
المجموع	71		1138

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{1138}{71} = 16.03 \text{ الف دينار}$$

Measures of Variation

مقاييس التشتت

لكل مجموعة من الأعداد وسطا حسابيا ، و ان اعداد هذه المجموعة ربما تكون متجمعة بالقرب منع أو مبتعدة عنه . إذا كانت هذه الأعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي فأن مقدار تشتتها ضئيل ، وإذا كانت هذه الأعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فأن تشتتها كبير.

مثلا : ان الوسط الحسابي للأعداد : 30 , 40 , 50 , 60 , 70 هو 50

و الوسط الحسابي للأعداد : 10 , 20 , 90 , 100 , 30 هو 50

عند تأمل المجموعة الأولى نشاهد ان تشتتها عن الوسط الحسابي ضئيل بينما تشتت اعداد المجموعة الثانية عن الوسط الحسابي كبير
ان مقاييس التشتت التي سوف ندرسها هي :

1- المدى Range .

2- الانحراف المعياري Standard Deviation .

المدى

هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتغير +1

والمدى ليس ذات مقياس مهم للتشتت لأنه يتوقف على قيمتين فقط من قيم المتغير . وهما أقل قيمة وأكبر قيمة للمتغير . و لذا فهو يتأثر تأثرا بالغا بذبذبات العينة و ان اي تغير يحدث في أي من هاتين القيمتين يؤثر بوضوح في قيمة المدى.

أ- البيانات غير مرغوبة

مثال 12 / ماهو المدى في مجموعة القيم التالية : 12 , 35 , 68 , 24 , 98

الحل / $R = 98 - 12 + 1 = 87$ (المدى)

ب- البيانات المرغوبة

مثال 13 / ماهو المدى في التوزيع التكراري التالي :

الفئات	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55
--------	-----	------	------	------	---------

التكرار

3

8

15

14

7

الحل /

المدى = الحد الأدنى للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى + 1

$$\therefore R = 55 - 5 + 1 = 51$$

الأنحراف المعياري

يعد الانحراف المعياري من أكثر مقاييس التشتت استخداماً . فإذا كانت لدينا n من المفردات $x_1, x_2, \dots, x_n$ ووسطها الحسابي $\bar{X}$. فإن هذه المفردات تكون متقاربة من بعضها إذا كانت قريبة من وسطها الحسابي $\bar{X}$.

إذا كانت انحرافاتنا عن $\bar{X}$ صغيرة $x_1, x_2, \dots, x_n$ وبالتالي فإن انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يمكن استخدامها لقياس التشتت. ويمكن أن يتم ذلك بأخذ متوسط هذه الانحرافات .

التعريف /

الانحراف المعياري : هو القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (S)

- حساب الانحراف المعياري لقيم غير موجبة :

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

مثال 14 / أحسب الانحراف المعياري للقيم الآتية : 9 , 7 , 5 , 3 , 1

الحل /

x	x ²
1	1
3	9

5	25
7	49
9	81
25	165

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{165}{5} - 25} = \sqrt{33 - 25} = 2\sqrt{2}$$

المجموع ←

ملاحظة

عند طرح كمية ثابتة من جميع القيم ، لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري والمثال (15) يوضح ذلك .

مثال 15 / أطر 1 من الأعداد 1, 3, 5, 7, 9 ثم احسب الانحراف المعياري للقيم الجديدة . قارن النتيجة مع مثال (14) ماذا تلاحظ ؟

الحل / الأعداد : 1, 3, 5, 7, 9 ، أطر 1 : 0, 2, 4, 6, 8

x	x ²
0	0
2	4
4	16
6	36
8	64
20	120

المجموع

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{120}{5} - 16} = \sqrt{24 - 16} = 2\sqrt{2}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

نلاحظ نفس الانحراف المعياري للأعداد قبل طرح (1) كما في المثال (14)



الدرجة المعيارية Standard Degree

التعريف/

الدرجة المعيارية: تعرف الدرجة المعيارية بأنها خارج قسمة انحراف قيمة ذلك المتغير عن الوسط الحسابي لتلك المجموعة على الانحراف المعياري لها.

قانون الدرجة المعيارية :

$$SD = \frac{X - \bar{X}}{S}$$

الأرتباط Correlation

التعريف/

الأرتباط: هو العلاقة الرياضية بين متغيرين ، بحيث اذا تغير احدهما باتجاه معين يميل الآخر الى التغيير في اتجاه معين ايضاً ، فإذا كان التغيير باتجاه واحد سمي الارتباط طردياً ، أما اذا كان التغيير باتجاهين متعاكسين سمي الارتباط عكسياً.

معامل الارتباط Correlation Coefficient (r) بين المتغيرين x , y :

نحسب معامل الارتباط (r) حيث :

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \bar{y}}{S_x S_y}$$

حيث ان :

- $\bar{x}$: الوسط الحسابي للمتغير x .
- $\bar{y}$: الوسط الحسابي للمتغير y .
- S_x : الانحراف المعياري للمتغير x .
- S_y : الانحراف المعياري للمتغير y .

بعض خصائص (r) :

- (1) r موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب) .
- (2) r = 1 في حالة الارتباط الطردي التام .
- (3) r سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب) .
- (4) r = 0 في حالة انعدام الارتباط.

يلاحظ مما سبق ان قيمة الارتباط تنتمي $[-1, 1]$ وكلما اقتربت قيمة r من +1 أو -1 كان هذا دليلا على قوة الارتباط بين المتغيرين وكلما اقتربت قيمته من الصفر كان هذا دليلا على انعدام الارتباط .

مثال 16 / جد معامل الارتباط بين المتغيرين x , y اذا كان :

ثم بين نوعه ؟

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

الحل /

$$\bar{X} = \frac{15}{5} = 3 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

x	y	x ²	y ²	x y
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
15	30	55	220	110

المجموع

$$S_x = \sqrt{\frac{55}{5} - 9} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{220}{5} - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \bar{y}}{S_x S_y}$$

$$r = \frac{\frac{110}{5} - (3)(6)}{(\sqrt{2})(2\sqrt{2})} = \frac{22 - 18}{4} = \frac{4}{4} = +1$$

∴ نوع الارتباط طردي تام .

حلول تمارين (7-2)

س1/ أوجد المدى للقيم التالية : 3 , 0 , 8 , 7 , 9 , 12

الحل /

(i) المدى = اكبر قيمة - اصغر قيمة + 1

$$\therefore R = 12 - 0 + 1 = 13$$

(ب)

$$\text{المدى} = 32 - 20 + 1 = 13$$

س2/ أحسب الانحراف المعياري للقيم التالية : 10 , 8 , 6 , 4 , 2

الحل /

x	x ²
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100
30	220

المجموع

$$\bar{X} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{220}{5} - (6)^2} = \sqrt{44 - 36} = 2\sqrt{2}$$

س3/ أوجد الانحراف المعياري للأعداد 3, 6, 2, 1, 7, 5 ثم أضف (5) الى كل منها وأثبت ان هذه الاضافة لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري ولكنها تؤثر على قيمة الوسط الحسابي ؟

الحل / قبل الأضافة :

x	x ²
3	9
6	36
2	4
1	1
7	49
5	25
24	124

$$\bar{X} = \frac{24}{6} = 4$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{124}{6} - 81} = \sqrt{4.7} = 2.17$$

الانحراف المعياري قبل الاضافة

بعد الأضافة :

x	x ²
8	64
11	121
7	49
6	36
12	144
10	100
54	514

$$\bar{X} = \frac{54}{6} = 9$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{514}{6} - 81} = \sqrt{4.7} = 2.17$$

الانحراف المعياري بعد الاضافة

الانحراف المعياري في الحالتين متساوي ، اما الوسط الحسابي فهو مختلف

ففي الأولى = (4) وفي الثانية = (9)

الاضافة تؤثر على الوسط الحسابي و لا تؤثر على الانحراف المعياري.

س4/ جد معامل الارتباط بين قيم الظاهرتين (x , y) من البيانات :

x	1	2	3
y	2	4	6

الحل /

$$\bar{X} = \frac{6}{3} = 2 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{12}{3} = 4$$

x	y	x ²	y ²	x y
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
6	12	14	56	28

المجموع

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{14}{3} - 4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{\frac{\sum x y}{n} - \bar{x} \bar{y}}{S_x S_y}$$

$$r = \frac{\frac{28}{3} - (2)(4)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} * \frac{3}{4} = +1$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum Y^2}{n} - (\bar{Y})^2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{56}{3} - 16} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

ريهاب جاسم
مدرس مادة الرياضيات

∴ نوع الارتباط طردي تام .

س5/ في الجدول المبين في السؤال الاول لو ضرب قيم الظاهرة x في 4 نحصل على جدول اخر هو :

x	4	8	12
y	2	4	6

الحل /

$$\bar{X} = \frac{24}{3} = 8 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{12}{3} = 4$$

x	y	x ²	y ²	x y
4	2	16	4	8
8	4	64	16	32
12	6	144	36	72
24	12	224	56	112

المجموع

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{224}{3} - (8)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{\frac{\sum x y}{n} - \bar{x} \bar{y}}{S_x S_y}$$

$$r = \frac{\frac{112}{3} - (4)(8)}{\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{112 - 96}{3}}{\frac{16}{3}} = \frac{16}{3} * \frac{3}{16} = +1$$

∴ نوع الارتباط طردي تام .

س6/ جد معامل الارتباط بين المتغيرين x, y ، ثم بين نوعه :

x	-13	-9	-5	-1	3
y	3	1	-1	-3	-5

الحل /

$$\bar{X} = \frac{-25}{5} = -5 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{-5}{5} = -1$$

x	y	x^2	y^2	xy
-13	3	169	9	-39
-9	1	81	1	-9
-5	-1	25	1	5
-1	-3	1	9	3
3	-5	9	25	-15
-25	-5	285	45	-55

المجموع

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{285}{5} - 25} = 4\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \bar{y}}{S_x S_y}$$

$$r = \frac{\frac{-55}{5} - (-5)(-1)}{(4\sqrt{2})(2\sqrt{2})} = \frac{-16}{16} = -1$$

∴ نوع الارتباط عكسي تام .

$$S = \sqrt{\frac{\sum Y^2}{n} - (\bar{Y})^2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{45}{5} - 1} = 2\sqrt{2}$$



قناتي على يوتيوب

أمسح الباركود بالهاتف لطفاً

